Professor Dr.-Ing. Stefan Kowalewski
Dipl.-Inform. Dominik Franke
Dipl.-Inform. Sebastian Biallas

Aachen, 21. Januar 2011
SWS: V4/Ü2, ECTS: 7

Einführung in die Technische Informatik

WS 2010/2011

Blatt 12: Musterlösung

ACHTUNG: Die Musterlösung ist ein zusätzliches Serviceangebot. Sie erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Korrektheit.

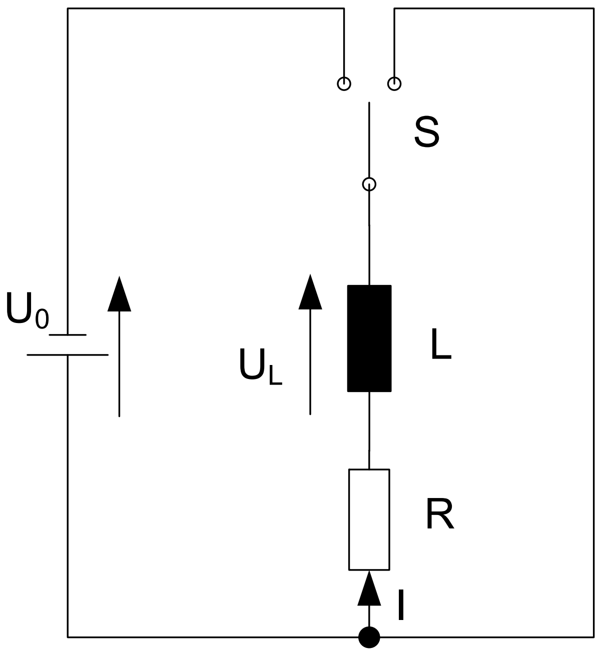
Aufgabe 1: ($\star$) Der ideale Plattenkondensator

Aufgabe 2: ($\star$) Auf- und Entladen eines Kondensators

Aufgabe 3: ($\star$) Die ideale Zylinderspule

Aufgabe 4: Auf- und Entladen einer Spule

Gegeben sie die folgenden Spulenschaltung. Alle Bauteile können als ideal angenommen werden.



Die Bauteile haben die folgenden Dimensionen: $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R = 400\,\Omega$ und $L = 60\,\mu\mathrm{H}$.

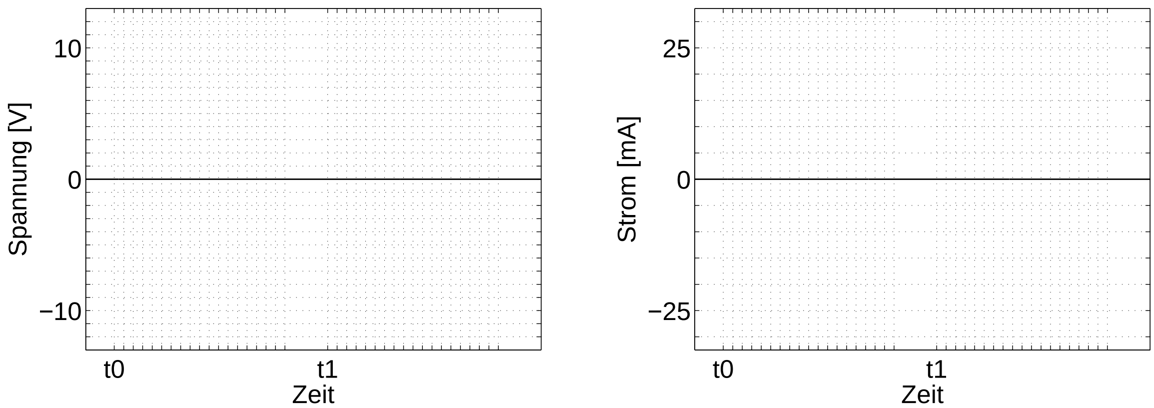
a) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ der Schaltung.

b) Berechnen Sie den maximalen Strom, der durch die Schaltung fließt und die maximale Spannung, die über der Spule abfällt.

c) Der Schalter S wird zum Zeitpunkt t_0 umgelegt (nach links), so dass die Spule geladen wird. Berechnen Sie die relativen (im Verhältnis zum Maximalwert) und absoluten Spannungsdifferenzen über der Spule ($U_L(t)$) und Ströme durch die Spule $I(t)$ für die Zeitpunkte t_0 , $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, $t_0 + 3\tau$, $t_0 + 4\tau$ und $t_0 + 5\tau$.

d) Der Schalter S wird zum Zeitpunkt t_1 ($t_1 \gg t_0 + 5\tau$) nach rechts umgelegt, so dass die Spule entladen wird. Berechnen Sie die relativen (im Verhältnis zum Maximalwert) und absoluten Spannungsdifferenzen über der Spule ($U_L(t)$) und Ströme durch die Spule $I(t)$ für die Zeitpunkte t_1 , $t_1 + \tau$, $t_1 + 2\tau$, $t_1 + 3\tau$, $t_1 + 4\tau$ und $t_1 + 5\tau$.

e) Zeichnen Sie ihre errechneten Punkte in die untenstehende Diagramme ein. Eine Unterteilung auf der Abszisse entspricht 50 ns, eine Unterteilung auf der Oridinate entspricht 1 V bzw. 5 mA.



Lösungsvorschlag

a) Es gilt:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{60\,\mu\mathrm{H}}{400\,\Omega} = 1.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = 150\,\mathrm{ns}$$

b) Die Maximal über der Spule abfallenden Spannung $u_{L,max}$ ist gleich der Quellenspannung U_0. Diese wird direkt nach dem Umlegen des Schalters S erreicht. Der maximale Strom der durch den Kondensator C fließt ist gleich dem maximalen Strom durch den Widerstand R. Dieser ist gleich $i_{max} = \frac{U_{R,max}}{R} = \frac{U_{L,max}}{R} = \frac{U_0}{R} = \frac{10\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 0.025\,\mathrm{A} = 25\,\mathrm{mA}$. Dieser Strom fließt vom Betrag her für $t \to \infty$ nach dem Umlegen des Schalters S.

c) Der Strom, der während des Aufladens durch die Spule fließt und die Spannung, die während dessen über der Spule abfällt lässt sich berechnen zu:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{max} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ u(t) &= u_{L,max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Wobei $t = 0$ dem Zeitpunkt des Umlegens des Schalters S entspricht.
Der relative Strom errechnet sich also zu $i(t)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$, sowie der absolute zu $i(t) = i(t)_{rel} \cdot i_{max}$
$i(t_0)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{0\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} = 0$ und $i(t_0) = 0 \cdot 25\,\mathrm{mA} = 0\,\mathrm{mA}$
$i(t_0 + \tau)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{20\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.632$ und $i(t_0 + \tau) \approx 0.632 \cdot 25\,\mathrm{mA} = 15.8\,\mathrm{mA}$
$i(t_0 + 2\tau)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{40\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.865$ und $i(t_0 + 2\tau) \approx 0.865 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 21.6\,\mathrm{mA}$
$i(t_0 + 3\tau)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{60\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.950$ und $i(t_0 + 3\tau) \approx 0.950 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 23.7\,\mathrm{mA}$
$i(t_0 + 4\tau)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{80\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.982$ und $i(t_0 + 4\tau) \approx 0.982 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 24.6\,\mathrm{mA}$
$i(t_0 + 5\tau)_{rel} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{100\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.993$ und $i(t_0 + 5\tau) \approx 0.993 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 24.8\,\mathrm{mA}$

Die relative Spannung errechnet sich zu $u(t)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$, sowie die ansolute Spannung zu $u(t) = u(t)_{rel} \cdot u_{L,max}$.
$u(t_0)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{0\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} = 1$ und $u(t_0) = 1 \cdot 10\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V}$
$u(t_0 + \tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{20\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0,368$ und $u(t_0 + \tau) \approx 0.368 \cdot 10\,\mathrm{V} = 3.68\,\mathrm{V}$
$u(t_0 + 2\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{40\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0,135$ und $u(t_0 + 2\tau) \approx 0.135 \cdot 10\,\mathrm{V} = 1.35\,\mathrm{V}$
$u(t_0 + 3\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{60\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0,050$ und $u(t_0 + 3\tau) \approx 0.050 \cdot 10\,\mathrm{V} = 0.5\,\mathrm{V}$
$u(t_0 + 4\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{80\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0,018$ und $u(t_0 + 4\tau) \approx 0.018 \cdot 10\,\mathrm{V} = 0.18\,\mathrm{V}$
$u(t_0 + 5\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{100\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0,007$ und $u(t_0 + 5\tau) \approx 0.007 \cdot 10\,\mathrm{V} = 0.07\,\mathrm{V}$

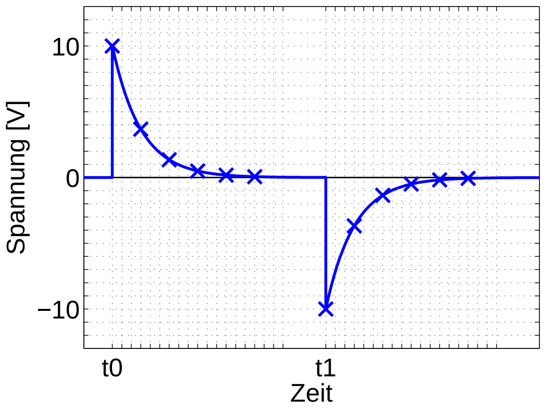
d) Der Strom, der während des Entladens durch die Spule fließt und die Spannung, die während dessen über der Spule abfällt lässt sich berechnen zu:

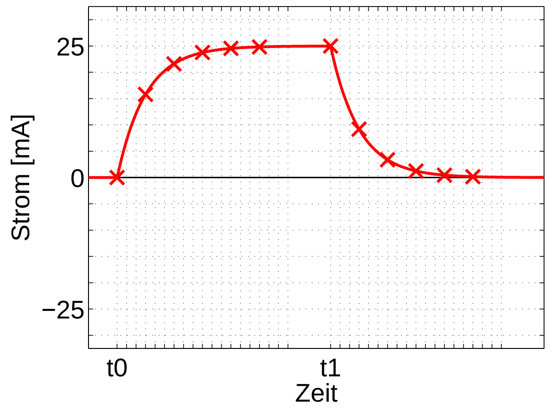
$$i(t) = i_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = -u_{L,max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Wobei $t = 0$ dem Zeitpunkt des Umlegens des Schalters S entspricht.
Der relative Strom errechnet sich also zu $i(t)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$, sowie der absolute zu $i(t) = i(t)_{rel} \cdot i_{max}$
$i(t_1)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{0\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} = 1$ und $i(t_1) = 1 \cdot 25\,\mathrm{mA} = 25\,\mathrm{mA}$
$i(t_1 + \tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{20\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.368$ und $i(t_1 + \tau) \approx 0.368 \cdot 25\,\mathrm{mA} = 9.2\,\mathrm{mA}$
$i(t_1 + 2\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{40\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.135$ und $i(t_1 + 2\tau) \approx 0.135 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 3.38\,\mathrm{mA}$
$i(t_1 + 3\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{60\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.050$ und $i(t_1 + 3\tau) \approx 0.050 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 1.3\,\mathrm{mA}$
$i(t_1 + 4\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{80\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.018$ und $i(t_1 + 4\tau) \approx 0.018 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 0.5\,\mathrm{mA}$
$i(t_1 + 5\tau)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{100\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx 0.007$ und $i(t_1 + 5\tau) \approx 0.007 \cdot 25\,\mathrm{mA} \approx 0.2\,\mathrm{mA}$

Die relative Spannung errechnet sich zu $u(t)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$, sowie die ansolute Spannung zu $u(t) = u(t)_{rel} \cdot u_{L,max}$.
$u(t_1)_{rel} = \mathrm{e}^{-\frac{0\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} = -1$ und $u(t_0) = -1 \cdot 10\,\mathrm{V} = -10\,\mathrm{V}$
$u(t_1 + \tau)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{20\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx -0.368$ und $u(t_1 + \tau) \approx -0.368 \cdot 10\,\mathrm{V} = -3.68\,\mathrm{V}$
$u(t_1 + 2\tau)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{40\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx -0.135$ und $u(t_1 + 2\tau) \approx -0.135 \cdot 10\,\mathrm{V} = -1.35\,\mathrm{V}$
$u(t_1 + 3\tau)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{60\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx -0.050$ und $u(t_1 + 3\tau) \approx -0.050 \cdot 10\,\mathrm{V} = -0.5\,\mathrm{V}$
$u(t_1 + 4\tau)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{80\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx -0.018$ und $u(t_1 + 4\tau) \approx -0.018 \cdot 10\,\mathrm{V} = -0.18\,\mathrm{V}$
$u(t_1 + 5\tau)_{rel} = -\mathrm{e}^{-\frac{100\,\mathrm{ms}}{20\,\mathrm{ms}}} \approx -0.007$ und $u(t_1 + 5\tau) \approx -0.007 \cdot 10\,\mathrm{V} = -0.07\,\mathrm{V}$





e)

Aufgabe 5: Frequenzabhängige Filter

Im Folgenden werden verschiedene Schaltungen zur frequenzabhängigen Filterung von Signalen gegeben. Bearbeiten Sie zu jeder dieser Schaltungen die folgenden Aufgabenpunkte. Nehmen Sie als Größen der Bauteile an:
Widerstand: 100 Ω, Spule: 10 mH und Kondensator: 1 mF.

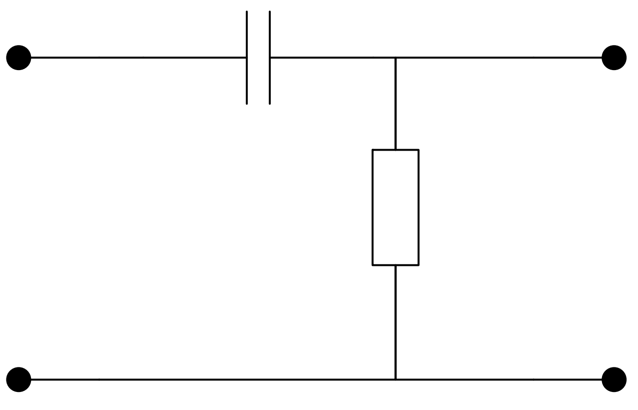
a) Bestimmen Sie für jedes verwendete Bauteil das resultierende Verhalten, falls die Frequenz des Eingangssignals gegen 0 Hz geht: $f_{ein} \to 0$. Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der Schaltung für $f_{ein} \to 0$.

b) Bestimen Sie für jedes verwendete Bauteil das resultierende Verhalten, falls die Frequenz des Eingangssignals gegen ∞ Hz geht: $f_{ein} \to \infty$. Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der Schaltung für $f_{ein} \to \infty$.

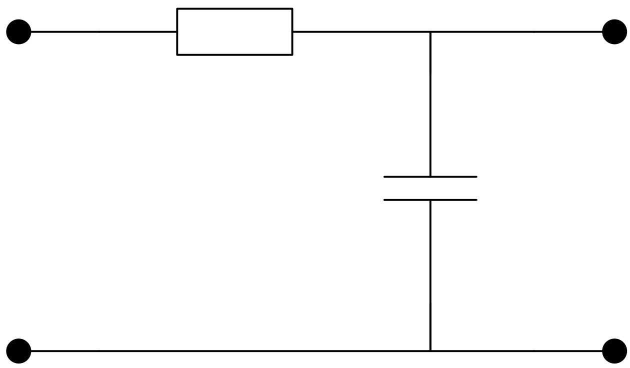
c) Ordnen Sie die Schaltung je einem der Frequenzgänge zu.

d) Errechnen Sie die Grenzfrequenz der Schaltung mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Formel.

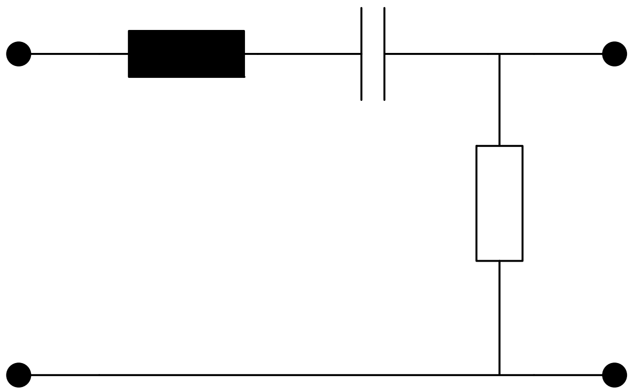
1. Schaltung:



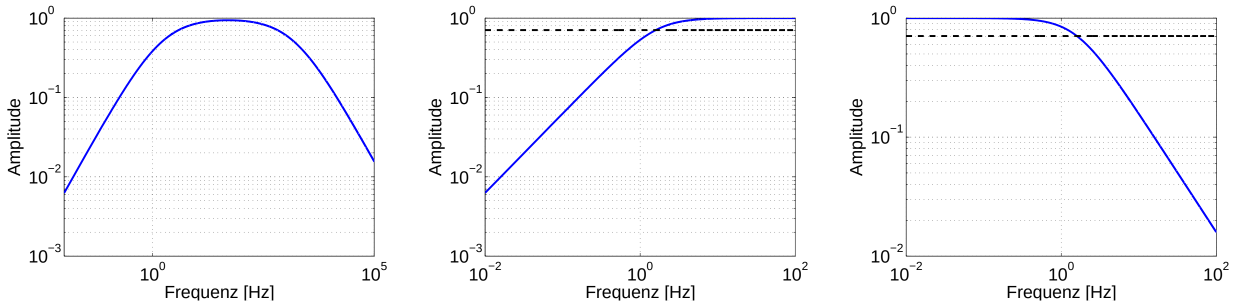
2. Schaltung:



3. Schaltung:



Frequenzgänge:



Korrelierende Schaltung:

☐ ☐ ☐

Die folgenden Aufgabenpunkte beziehen sich nur noch auf Schaltung 2.

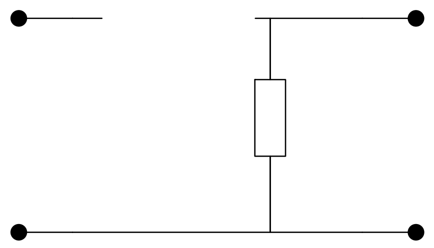
e) Wie könnte eine Schaltung mit denselben Eigenschaften wie Schaltung 2, jedoch mit einer Spule statt eines Kondensators realisiert werden? Wie wäre diese Spule zu dimensionieren, um dieselben Eigenschaften zu erzielen?

f) Wie könnte eine stärkere Dämpfung (also ein stärkeres Abfallen der Übertragungsfunktion) für Schaltung 2 erzielt werden? Geben Sie die neue Schaltung an.

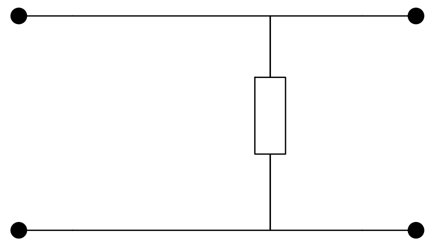
Lösungsvorschlag

1. Schaltung:

   (a) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr kleine Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to 0$; Gleichstromfall) wirkt der Kondensator wie eine offene Klemme. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 0.

   (b) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr große Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to \infty$) wirkt der Kondensator wie ein Kurzschluss. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 1.

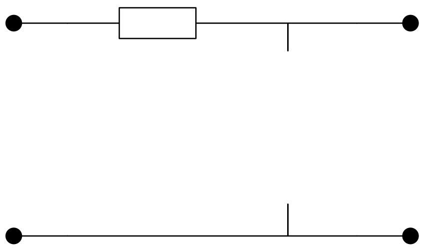
   

   (c) Demnach gehört der zweite Frequenzgang zu dieser Schaltung (Hochpass).

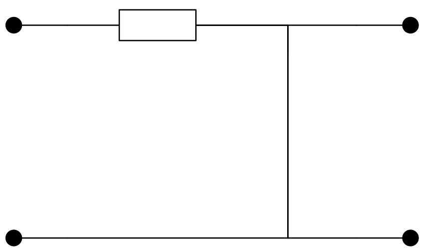
   (d) Die Grenzfrequenz dieses Hochpasses errechnet sich zu:
   $f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{mF}} = \frac{1}{\pi \cdot 0.2\,\mathrm{s}} \approx 1.59\,\mathrm{Hz}$

2. Schaltung:

   (a) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr kleine Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to 0$; Gleichstromfall) wirkt der Kondensator wie eine offene Klemme. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 1.



(b) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr große Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to \infty$) wirkt der Kondensator wie ein Kurzschluss. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 0.

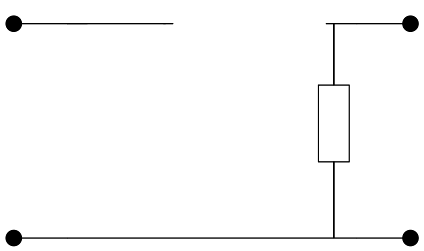


(c) Demnach gehört der dritte Frequenzgang zu dieser Schaltung (Tiefpass).

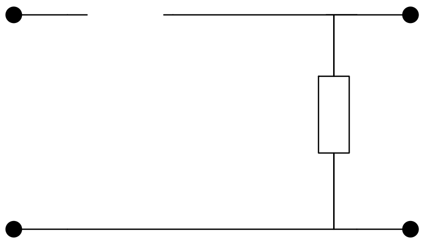
(d) Die Grenzfrequenz dieses Tiefpasses errechnet sich zu:
$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{mF}} = \frac{1}{\pi \cdot 0.2\,\mathrm{s}} \approx 1.59\,\mathrm{Hz}$

3. Schaltung:

(a) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr kleine Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to 0$; Gleichstromfall) wirkt der Kondensator wie eine offene Klemme und die Spule wie ein Kurzschluss. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 0.



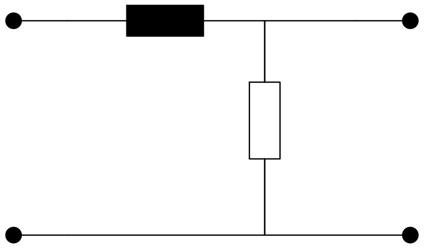
(b) Das Verhalten des Widerstands ändert sich bei einer Veränderung der Frequenz des Eingangssignals nicht. Für sehr große Frequenzen des Eingangssignals ($f_{ein} \to \infty$) wirkt der Kondensator wie ein Kurzschluss und die Spule wie eine offene Klemme. Das Ausgangssignal hat dann also eine Amplitude von 0.



(c) Demnach gehört der erste Frequenzgang zu dieser Schaltung (Bandpass).

(d) Die Grenzfrequenz dieses Bandpasses errechnet sich zu:
$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{10\,\mathrm{mH} \cdot 1\,\mathrm{mF}}} \approx 50.33\,\mathrm{Hz}$

e) Statt mit einem Kondensator kann ein Tiefpass auch mit einer Spule erzeugt werden. Die Schaltung ist dann wie folgt aufgebaut:



Die Grenzfrequenz dieser Schaltung errechnet sich zu:

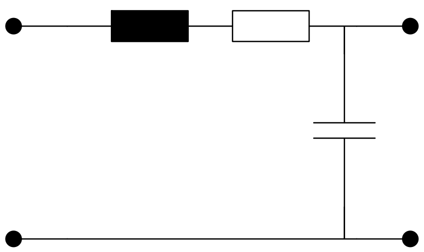
$$f_g = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$

Da diese Frequenz gleich der ursprünglichen sein soll, ergibt sich daraus:

$$\frac{R}{2\pi \cdot L} = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} \Leftrightarrow \frac{R}{L} = \frac{1}{R \cdot C} \Leftrightarrow L = R^2 \cdot C = (100\,\Omega)^2 \cdot 1\,\mathrm{mF} = 10\,\mathrm{H}$$

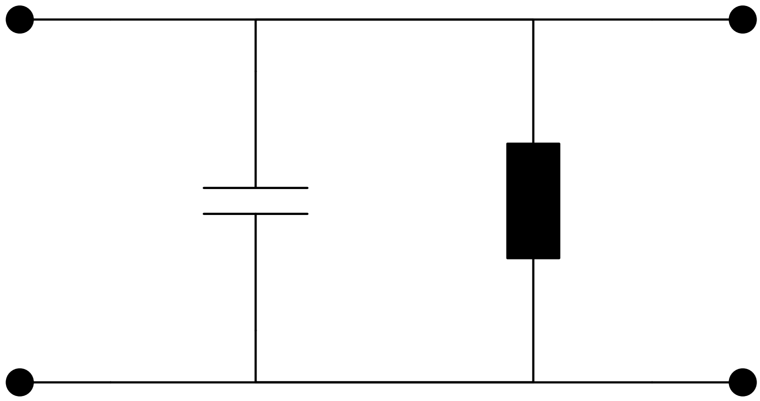
Die entsprechende Ersatzinduktivität müsste also eine Größe von 10 H haben. Das ist ein unrealistisch großer Wert. Spulen haben für gewöhnlich Induktivitäten von $L < 500\,\mathrm{mH}$. Daher werden frequenzselektive Schaltungen meist mit Kondensatoren aufgebaut.

f) Durch die Nutzung mehrerer frequenzabhängiger Bauteile (Spule bzw. Kondensator) innerhalb von einer Schaltung kann die Dämpfung zu näheren Frequenzen hin entsprechend verstärkt werden. Der resultierende Tiefpass 2. Ordnung (zwei frequenzabhängige Bauteile) wäre wie folgt aufgebaut:



Aufgabe 6: ($\star$) **Schwingkreis**

Im Folgenden wird der untenstehende Schwingkreis betrachtet. Die folgenden Werte sind über den Schwingkreis bekannt:
Spule: 7 mH, Kondensator: 50 mF, maximaler Strom in der Schaltung: 0.2 A.



a) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz[1] dieses Schwingkreises.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist das Magnetfeld maximal? Wie groß ist dann die magnetische Energie?

c) Zu welchem Zeitpunkt ist das elektrische Feld maximal? Wie groß ist dann die elektrische Energie? Wie groß ist dann die Spannung über dem Kondensator?

d) Wie müsste der Kondensator angepasst werden, damit sich die Resonanzfrequenz auf $f_r = 150\,\mathrm{Hz}$ ändert?

Lösungsvorschlag

a) Die Resonanzfrequenz dieses Schwingkreises errechnet sich zu:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{7\,\mathrm{mH} \cdot 50\,\mathrm{mF}}} \approx 8.5\,\mathrm{Hz}$$

b) Das Magnetfeld in einem Schwingkreis wird maximal, wenn der Kondensator vollständig entladen und die Spule vollständig geladen ist. Die magnetische Energie errechnet sich dann zu:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 7\,\mathrm{mH} \cdot (0.2\,\mathrm{A})^2 = 1.4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = 140\,\mathrm{\mu J}$$

[1] Die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises ist die Frequenz, mit der der Schwingkreis schwingt; sie gibt an, wie oft sich der Kondensator in einer Zeiteinheit auf- und entlädt

c) Das elektrische Feld wird maximal, wenn der Kondensator vollständig geladen und die Spule vollständig entladen ist. Die Energie, die in diesem Feld gespeichert ist, entspricht der maximal im magnetischen Feld gespeicherten Energie (für den idealen Schwingkreis). Die elektrische Energie errechnet sich dann zu:

$$E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = 140\,\mu\text{J}$$
$$\Leftrightarrow U = \sqrt{\frac{2W_e}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 140\,\mu\text{J}}{50\,\text{mF}}} = 74.8\,\text{mV}$$

d)

$$f_{r,neu} = 150\,\text{Hz} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C_{neu}}}$$
$$\Leftrightarrow f_{r,neu}^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C_{neu}}$$
$$\Leftrightarrow C_{neu} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot f_{r,neu}^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 7\,\text{mH} \cdot (150\,\text{Hz})^2} \approx 160.83\,\mu\text{F}$$

Um die Resonanzfrequenz des Schwingkreises auf 150 Hz zu erhöhen, müsste eine Kapazität von ca. 161 µF eingesetzt werden.