Professor Dr.-Ing. Stefan Kowalewski
Hilal Diab, M.Sc.
Kamal Barakat, M.Sc
Dipl.-Inform. Dominik Franke

Aachen, 20. November 2009
SWS: V4/Ü2, ECTS: 7

Einführung in die Technische Informatik

WS 2009/2010

Blatt 5: Lösungsvorschlag

Aufgabe 1: ($\star$)Gray-Code

In der Vorlesung haben Sie den Gray-Code kennengelernt.

a) Stellen Sie eine Funktionstabelle für einen vierstelligen Gray-Code auf.

b) Minimieren Sie die Funktionen f_3 und f_2 mit Karnaugh-Diagrammen.

c) Minimieren Sie die Funktionen f_1 und f_0 mit dem Verfahren von Quine und McCluskey.

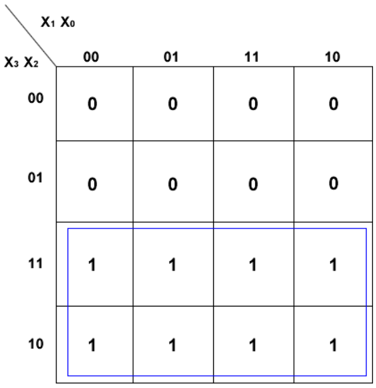
d) Der Gray-Code ist ein Kodierungsverfahren zur robusten Datenübetragung. Bei welcher Art von Datenübertragung wird der Gray-Code verwendet und was heißt in diesem Zusammenhang robust? Was kann bei der Datenübertragung passieren?

Lösungsvorschlag

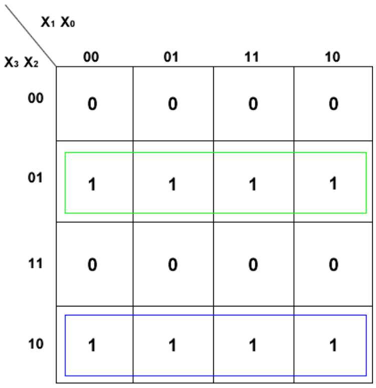
a) Die Funktionstabelle für den Gray-Code lautet:

x_3	x_2	x_1	x_0	f_3	f_2	f_1	f_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

b) f_3:



$f_3(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3\ f_2$:



$f_2(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_3 x_2 + x_3 \bar{x}_2$ (!die beiden Implikanten dürfen nicht weiter resolviert werden, da Doppelresolution nicht korrekt ist!).
f_1:
Initialisierung:

Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0$	1101	13
	$x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0$	1011	11
2	$x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$	1100	12
	$x_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	1010	10
	$\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0$	0101	5
	$\bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 x_0$	0011	3
3	$\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$	0100	4
	$\bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	0010	2

Erste Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_3x_2\bar{x}_1$	110*	13,12
	$x_2\bar{x}_1x_0$	*101	13,5
	$x_3\bar{x}_2x_1$	101*	11,10
	$\bar{x}_2x_1x_0$	*011	11,3
2	$x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$	*100	12,4
	$\bar{x}_2x_1\bar{x}_0$	*010	10,2
	$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$	010*	5,4
	$\bar{x}_3\bar{x}_2x_1$	001*	3,2

Zweite Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_2\bar{x}_1$	*10*	13,12,5,4
	$x_2\bar{x}_1$	*10*	13,5,12,4
	$\bar{x}_2x_1$	*01*	11,3,10,2
	$\bar{x}_2x_1$	*01*	11,10,3,2

Keine weitere Anwendung der Resolutionsregel mehr möglich. Aufstellen der Implikationsmatrix:

Minterm / Primimplikant	2	3	4	5	10	11	12	13
$x_2\bar{x}_1$			1	1			1	1
$\bar{x}_2x_1$	1	1			1	1		

$f_1(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2x_1$

f_0:
Initialisierung:

Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_3x_2x_1\bar{x}_0$	1110	14
	$x_3x_2\bar{x}_1x_0$	1101	13
2	$x_3\bar{x}_2x_1\bar{x}_0$	1010	10
	$x_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0$	1001	9
	$\bar{x}_3x_2x_1\bar{x}_0$	0110	6
	$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1x_0$	0101	5
3	$\bar{x}_3\bar{x}_2x_1\bar{x}_0$	0010	2
	$\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0$	0001	1

Erste Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_3x_1\bar{x}_0$	1*10	14,10
	$x_2x_1\bar{x}_0$	*110	14,6
	$x_3\bar{x}_1x_0$	1*01	13,9
	$x_2\bar{x}_1x_0$	*101	13,5
2	$\bar{x}_2x_1\bar{x}_0$	*010	10,2
	$\bar{x}_2\bar{x}_1x_0$	*001	9,1
	$\bar{x}_3x_1\bar{x}_0$	0*10	6,2
	$\bar{x}_3\bar{x}_1x_0$	0*01	5,1

Zweite Anwendung der Resolutionsregel:

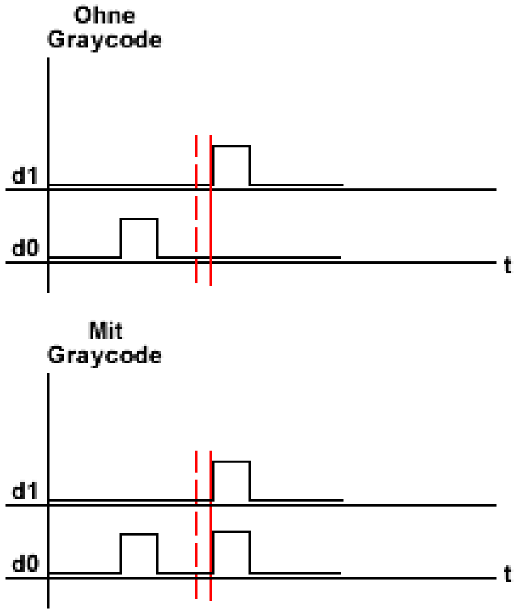
Gruppe	Implikant	Index	Minterm-Nummern
1	$x_1\bar{x}_0$	**10	14,10,6,2
	$x_1\bar{x}_0$	**10	14,6,10,2
	$\bar{x}_1x_0$	**01	13,9,5,1
	$\bar{x}_1x_0$	**01	13,5,9,1

Keine weitere Anwendung der Resolutionsregel mehr möglich. Aufstellen der Implikationsmatrix:

Minterm / Primimplikant	1	2	5	6	9	10	13	14
$x_1\bar{x}_0$		1		1		1		1
$\bar{x}_1x_0$	1		1		1		1	

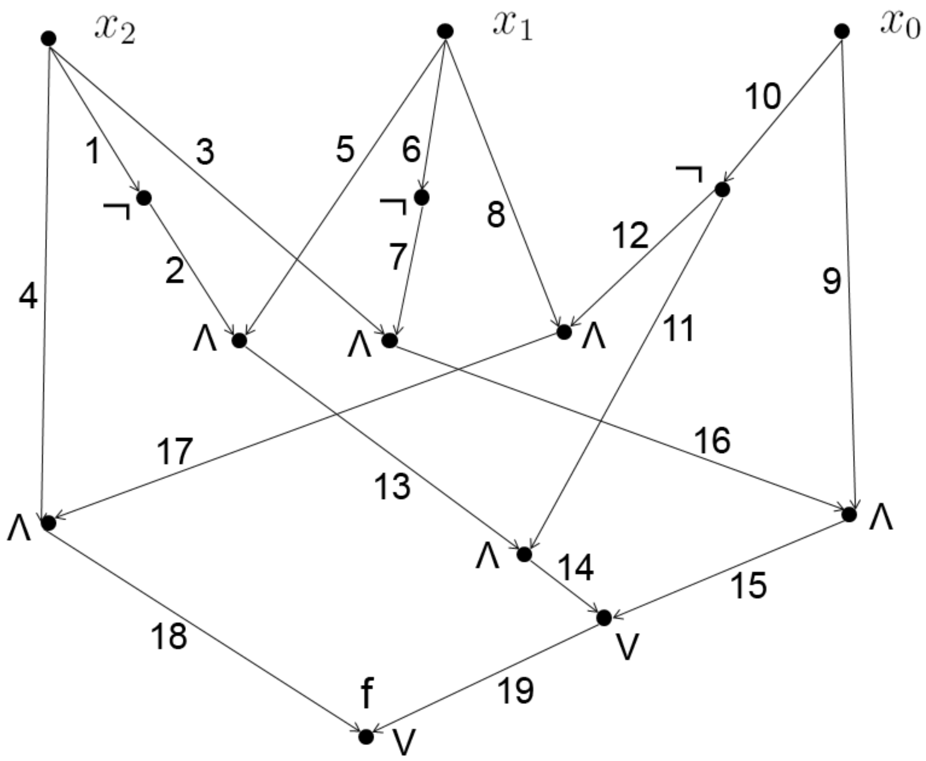
$f_0(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_1x_0$

c) Der Gray-Code wird bei paralleler Datenübertragung genutzt. Bei paralleler Übertragung der Daten kann es passieren, dass ein Datum verzögert auf einer Datenleitung ankommt. Am Ausgang liegt somit kurzzeitig ein anderes Signal an als am Eingang - die Signalreihenolge ist nicht dieselbe (siehe Zeichnung: beim gestrichelten Balken, sollte beim Zeitpunkt der gstrichelten roten Linie d1 auf 1 liegen. Jedoch kommt das Signal verzögert an und es liegen für einen kurzen Zeitraum die Daten $d_0 = 0$ und $d_1 = 0$ an). Mit dem Gray-Code kann dies nicht passieren, weil pro Zeitschritt immer nur höchstens 1 Bit geändert werden kann. Die Datenübertragung ist insofern robust, als dass es keinen Zeitpunkt gibt, an dem am Ausgang die Signalreihenfolge anders aussieht als am Eingang.


Ohne
Graycode
d1
d0
t
Mit
Graycode
d1
d0
t

Aufgabe 2: ($\star$)Fehlerdiagnose

Gegeben sei der folgende DAG der Funktion $f(x_2, x_1, x_0)$ mit den Drahtnummern $i = 1, ..., 20$.



a) Lesen Sie aus dem DAG die Wertetabelle der Funktion $f(x_2, x_1, x_0)$ ab.

b) Sei $f_i(x_2, x_1, x_0)$ die Funktion, die durch den DAG beschrieben wird, wenn der Draht mit der Nummer i gerissen ist (0-Verklemmung, Stuck-at-Zero-Fault). Bestimmen Sie die Fehlerfunktionen $f_i(x_2, x_1, x_0)$ und stellen Sie diese möglichst kompakt dar.

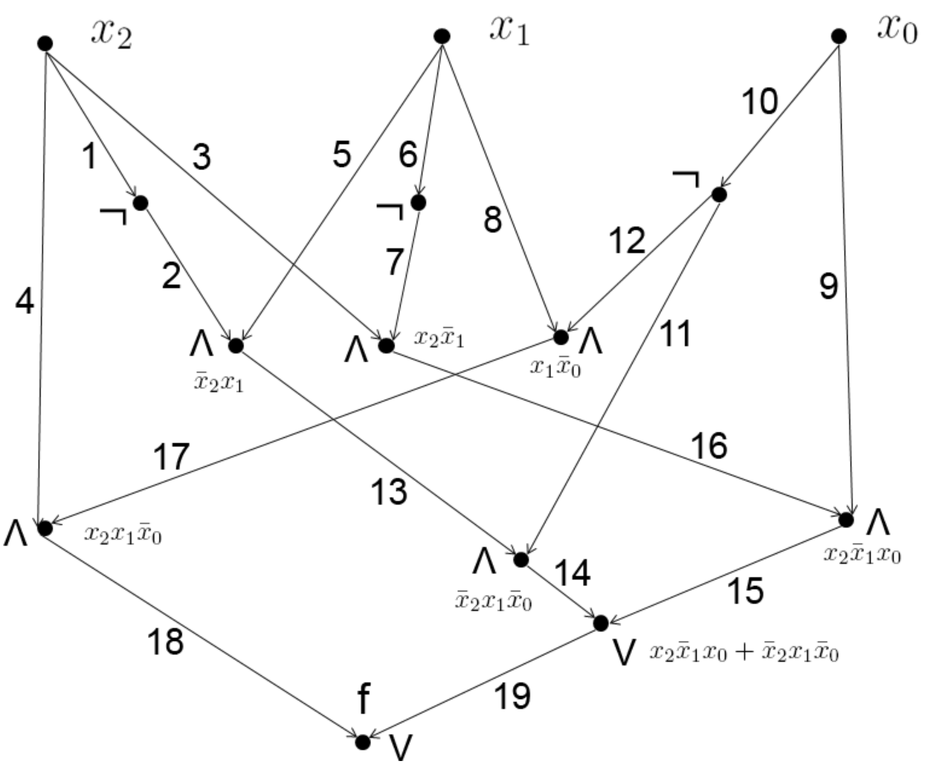
c) Identifizieren Sie identische Fehlerfunktionen $f_i(x_2, x_1, x_0)$.

d) Stellen Sie die Ausfallmatrix auf, indem Sie eine Wertetabelle für die Funktionen $f_i(x_2, x_1, x_0)$ erstellen. Für identische Funktionen reicht es einen Stellvertreter zu wählen und in der Ausfallmatrix zu notieren.

e) Berechnen Sie die Fehlermatrix, indem Sie eine Wertetabelle für die Funktionen $f_i \nleftrightarrow f$ notieren. Es genügt auch hier bei identischen Fehlerfunktionen einen Vertreter zu wählen.

f) Lesen Sie aus der Fehlermatrix eine minimale Testmenge ab.

Lösungsvorschlag
Vorbereitende Markierung der Knoten des DAG durch die dargestellten Terme:



a) Wertetabelle der Funktion $f(x_2, x_1, x_0)$:

$x_2x_1x_0$	$f(x_2, x_1, x_0)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

b) Fehlerfunktionen:

$f_1(x_2, x_1, x_0) = \bar{0}x_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1x_0$

$f_2(x_2, x_1, x_0) = 0x_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0$

$f_3(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + 0\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_1 = x_1\bar{x}_0$

$f_4(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + 0x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0$

$f_5(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2 0\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0$

$f_6(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{0}x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2x_0 + x_1\bar{x}_0$

$f_7(x_2, x_1, x_0) = x_2 0x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0$

$f_8(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2 0\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0$

$f_9(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1 0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0$

$f_{10}(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{0} + x_2x_1\bar{0} = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1 + x_2x_1 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_1$

$f_{11}(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1 0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0$

$f_{12}(x_2, x_1, x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1 0 = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0$

$f_{13}(x_2,x_1,x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + 0\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0$
$f_{14}(x_2,x_1,x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + 0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0$
$f_{15}(x_2,x_1,x_0) = 0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0$
$f_{16}(x_2,x_1,x_0) = 0x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_1\bar{x}_0$
$f_{17}(x_2,x_1,x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_20 = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0$
$f_{18}(x_2,x_1,x_0) = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + 0 = x_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0$
$f_{19}(x_2,x_1,x_0) = 0 + x_2x_1\bar{x}_0 = x_2x_1\bar{x}_0$

c) Identische Funktionen:
$f_2 = f_5 = f_{11} = f_{13} = f_{14}$
$f_4 = f_8 = f_{12} = f_{17} = f_{18}$
$f_3 = f_7 = f_9 = f_{15} = f_{16}$
Verbleibende Funktionen: f_1, f_6, f_{10}, f_{19}

d) Ausfallmatrix:

$x_2x_1x_0$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_6	f_{10}	f_{19}	f
0 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	1	1	1	1	0	1
0 1 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	0	1	1	1	0	1
1 1 0	1	1	1	0	1	1	1	1
1 1 1	0	0	0	0	1	1	0	0

e) Fehlermatrix:

$x_2x_1x_0$	$f_1 \nleftrightarrow f$	$f_2 \nleftrightarrow f$	$f_3 \nleftrightarrow f$	$f_4 \nleftrightarrow f$	$f_6 \nleftrightarrow f$	$f_{10} \nleftrightarrow f$	$f_{19} \nleftrightarrow f$
0 0 0	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	1	0	0	0	0	1
0 1 1	0	0	0	0	0	1	0
1 0 0	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	0	1	0	0	0
1 1 1	0	0	0	0	1	1	0

f) minimale Testmenge:
0 1 0, 1 0 1, 1 1 0 und 1 1 1 müssen gewählt werden, um die Fehler der Drähte 2, 3, 4 und 6 zu erkennen. Es ist keine andere Wahl möglich. Die weiteren Drähte 10 und 19 sind durch die obige Wahl der Testmenge ebenfalls abgedeckt.