

## Einführung in die Technische Informatik

WS 2006/2007

### Blatt 1: Boolesche Algebra und Boolesche Funktionen

Ihre Lösung zu den mit (★) gekennzeichneten Übungen können Sie am **3.11.2006** in der Übung abgeben. Die Bearbeitung der Aufgaben in Lerngruppen ist sinnvoll. Bitte geben sie nur eine Lösung pro Lerngruppe ab.

#### Aufgabe 1: (★) Boolesche Algebra

Zeigen Sie:

1.  $NOR$  ist funktional vollständig.
2.  $\{\leftrightarrow, \cdot, 1\}$  ist funktional vollständig.

#### Aufgabe 2: (★) Definition *Disjunktive Normalform DNF* und *Konjunktive Normalform KNF*

1. Erklären Sie den Aufbau der DNF einer Booleschen Funktion mit eigenen Worten.
2. Erklären Sie den Aufbau der KNF einer Booleschen Funktion zunächst zurückgeführt auf ihre DNF und dann ohne diesen „Umweg“.

#### Aufgabe 3: Boolesche Funktion

Sei  $f$  die dreistellige Boolesche Funktion mit den einschlägigen Indizes 3, 5 und 7.

1. Geben Sie die DNF von  $f$  an.
2. Zeichnen Sie ein Schaltnetz für  $f$ , das ausschließlich NAND-Gatter enthält.
3. Zeichnen Sie ein Schaltnetz für  $f$ , das ausschließlich NOR-Gatter enthält.

Versuchen Sie in beiden Aufgabenteilen, so wenig Gatter wie möglich zu verwenden.

#### Aufgabe 4: (★) Boolesche Funktion

Sei  $f(x_1, x_2, x_3)$  die dreistellige Boolesche Funktion mit den einschlägigen Indizes 0, 3, 4, 5, 6 und 7.

1. Geben Sie die DNF von  $f$  an.
2. Geben Sie die KNF von  $f$  an.
3. Zeichnen Sie ein Schaltnetz für  $f$ .

4. Zeichnen Sie ein Schaltnetz für  $f$ , das ausschließlich NOR-Gatter enthält.

Versuchen Sie in beiden Aufgabenteilen, so wenig Gatter wie möglich zu verwenden.

### Aufgabe 5: Darstellungssatz für Boolesche Funktionen

Zeigen Sie, dass jede Boolesche Funktion  $f : B^n \rightarrow B$  eindeutig darstellbar ist, als Summe der Minterme ihrer einschlägigen Indizes, d. h. ist  $I \subseteq 0, \dots, 2^n - 1$  die Menge der einschlägigen Indizes von  $f$ , so gilt

$$f = \sum_{i \in I} m_i,$$

und keine andere Minterm-Summe stellt  $f$  dar.

### Aufgabe 6: (★) Konjunktive Normalform

Zeigen Sie, dass jede Boolesche Funktion  $f : B^n \rightarrow B$  eindeutig darstellbar ist, als Produkt der Maxterme ihrer nicht einschlägigen Indizes.

### Aufgabe 7: Anzahl an Boolesche Funktionen

Wieviele 13-stellige Boolesche Funktionen gibt es? Zur Beantwortung dieser Frage bestimmen Sie zwei Zahlen  $m$  und  $d$ , so dass  $m \cdot 10^d$  die Anzahl der 13-stelligen Boolesche Funktionen ist,  $d$  eine ganze Zahl ist, und  $\frac{1}{10} \leq m < 1$  gilt.<sup>1</sup> Geben Sie  $m$  auf vier Nachkommastellen genau an.

### Aufgabe 8: (★) Boolesche Funktionen

Sei  $f : B^{13} \rightarrow B$  die 13-stellige Boolesche Funktion mit  $f(x_{12}, x_{11}, \dots, x_1, x_0) = 0$  gdw.<sup>2</sup>  $(x_{12}x_{11} \dots x_1x_0)_2$  durch 4711 teilbar ist.<sup>3</sup> Geben Sie diese Funktion wahlweise in DNF oder KNF an.

### Aufgabe 9: Realisierung Boolescher Funktionen mittels Multiplexern

Zeigen Sie, dass man für  $d \geq 2$  jede  $d$ -stellige Boolesche Funktion mit Hilfe eines  $(d)$ -MUX realisieren kann.

### Aufgabe 10: (★) Realisierung Boolescher Funktionen mittels Multiplexern

Zeigen Sie, dass man für  $d \geq 2$  jede  $d$ -stellige Boolesche Funktion mit Hilfe eines  $(d-1)$ -MUX realisieren kann.

### Aufgabe 11: Multiplexer

- Konstruieren Sie einen 3-MUX aus UND- und ODER-Gattern.
- Konstruieren Sie einen 4-MUX aus drei 3-MUX. Welches ist die maximale Anzahl Eingangsleitungen die man mit drei 3-Mux konstruieren kann?
- Sei  $f : B^4 \rightarrow B$  die Boolesche Funktion mit  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$  gdw.  $(x_1x_2x_3x_4)_2$  durch 5 oder 7 teilbar ist. Skizzieren Sie die Realisierung von  $f$  mittels eines 3-MUX.

---

<sup>1</sup> $m \times 10^d$  ist dann eine normalisierte Gleitkomma-Darstellung der Anzahl der 13-stelligen Boolesche Funktionen.  $m$  heißt die *Mantisse* und  $d$  der *Exponent* dieser Darstellung zur Basis 10.

<sup>2</sup>„gdw.“ ist eine Abkürzung für „genau dann, wenn“.

<sup>3</sup>Da nichts anderes gesagt wird, meint 4711 natürlich  $(4711)_{10}$ .