Aufgabe 2

Eine Formelmenge Φ heißt *abhängig*, wenn es ein $\varphi \in \Phi$ mit $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. gibt.

(a) Wann ist eine Menge der Form $\{\varphi\}$ für $\varphi \in \mathrm{AL}$ abhängig?

(b) Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmenge Φ eine äquivalente unabhängige Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ enthält, d.h. Φ_0 ist nicht abhängig, und es gilt $\Phi_0 \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$.

(c) Gilt diese Eigenschaft auch für unendliche Mengen? Betrachten Sie dazu die Menge

$$\Psi = \Big\{ \bigwedge_{0 \leq i \leq n} X_i : n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass jede zu Ψ äquivalente Teilmenge von Ψ abhängig ist. Geben Sie auch eine zu Ψ äquivalente, unabhängige Formelmenge an.

(d) Beweisen Sie, dass eine Formelmenge Φ genau dann abhängig ist, wenn eine endliche Teilmenge von Φ abhängig ist.

Lösung:

(a) Eine Menge der Form $\{\varphi\}$ ist genau dann abhängig, wenn φ eine Tautologie ist:

$$\begin{aligned} & \{\varphi\} \text{ ist abhängig} \\ \Leftrightarrow\ & \emptyset \models \varphi \\ \Leftrightarrow\ & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ für jede zu } \varphi \text{ passende Interpretation } \mathfrak{I} \\ \Leftrightarrow\ & \varphi \text{ ist eine Tautologie.} \end{aligned}$$

(b) Sei $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \mathrm{AL}$. Wir definieren eine Folge $\Phi =: \Phi_n \supseteq \Phi_{n-1} \supseteq \dots \supseteq \Phi_0$ durch

$$\Phi_k := \begin{cases} \Phi_{k+1} \setminus \{\varphi_{k+1}\} & \text{falls } \Phi_{k+1} \setminus \{\varphi_{k+1}\} \models \varphi_{k+1}, \\ \Phi_{k+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

für $0 \leq k < n$. Wir behaupten, dass Φ_0 unabhängig und äquivalent zu Φ ist.

Angenommen, Φ_0 ist abhängig. Dann wäre $\Phi_0 \setminus \{\varphi_k\} \models \varphi_k$ für ein $1 \leq k \leq n$ mit $\varphi_k \in \Phi_0$. Da $\Phi_0 \subseteq \Phi_k$, würde dann auch $\Phi_k \setminus \{\varphi_k\} \models \varphi_k$ gelten und damit wäre $\varphi_k \notin \Phi_{k-1} \supseteq \Phi_0$, also auch $\varphi_k \notin \Phi_0$, ein Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen, dass Φ_0 äquivalent zu Φ ist. Wir zeigen allgemeiner per Induktion über $k = n, \dots, 0$, dass jedes Φ_k äquivalent zu Φ ist. Dies gilt offensichtlich für $\Phi_n = \Phi$. Sei also $0 \leq k < n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist Φ_{k+1} äquivalent zu Φ. Es ist zu zeigen, dass $\Phi_k \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt. Sei also $\varphi \in \Phi$. Da Φ_{k+1} äquivalent zu Φ ist, gilt $\Phi_{k+1} \models \varphi$. Nach Definition von Φ_k ist $\Phi_{k+1} = \Phi_k \cup \{\varphi_k\}$, und es gilt $\Phi_k \models \varphi_k$. Also erfüllt jede Interpretation, die Φ_k erfüllt auch Φ_{k+1} und damit φ, d.h. es gilt $\Phi_k \models \varphi$.

(c) Die Eigenschaft, dass jede Formelmenge eine äquivalente unabhängige Teilmenge enthält, gilt im Allgemeinen *nicht* für unendliche Formelmengen. Sei

$$\psi_n = \bigwedge_{0 \leq k \leq n} X_k \,,$$

d.h. $\Psi = \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir behaupten, dass jede zu Ψ äquivalente Teilmenge von Ψ abhängig ist.

Sei $\Psi_0 \subseteq \Psi$ eine zu Ψ äquivalente Teilmenge. Wir zeigen zunächst, dass Ψ_0 mindestens zwei (sogar unendlich viele) Elemente enthalten muss. Sonst existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\psi_j \notin \Psi_0$ für alle $j \geq k$. Doch dann ist $\Psi_0 \not\models \psi_k$, denn jede Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(X_j) = 1$ für alle $j < k$ und $\mathfrak{I}(X_k) = 0$ erfüllt Ψ_0, aber nicht ψ_k. Also ist Ψ_0 nicht äquivalent zu Ψ, im Widerspruch zur Annahme.

Es bleibt zu zeigen, dass Ψ_0 abhängig ist. Da $|\Psi_0| \geq 2$ gilt, gibt es $i < j$ mit $\psi_i, \psi_j \in \Psi_0$. Es gilt aber $\psi_j \models \psi_i$, also auch $\Psi_0 \setminus \{\psi_i\} \models \psi_i$, d.h. Ψ_0 ist abhängig.

Eine zu Ψ äquivalente unabhängige Formelmenge ist die Menge $\Psi' := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(d) ($\Rightarrow$) Sei Φ abhängig. Also gibt es ein $\varphi \in \Phi$ mit $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Nach dem Kompaktheitssatz existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_1 \subseteq \Phi \setminus \{\varphi\}$ mit $\Phi_1 \models \varphi$. Setze $\Phi_0 := \Phi_1 \cup \{\varphi\}$. Da Φ_1 eine endliche Teilmenge von Φ ist und $\varphi \in \Phi$ gilt, ist auch Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ. Außerdem gilt: $\Phi_0 \setminus \{\varphi\} = \Phi_1 \models \varphi$. Da $\varphi \in \Phi_0$, ist Φ_0 somit abhängig.

($\Leftarrow$) Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$ eine abhängige Teilmenge von Φ. Also gibt es ein $\varphi \in \Phi_0$ mit $\Phi_0 \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Doch dann gilt auch $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Also ist auch Φ abhängig.