Aufgabe 3

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *P-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Dabei heißt eine Klausel *positiv*, falls sie kein negatives Literal enthält.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne positive Klauseln erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

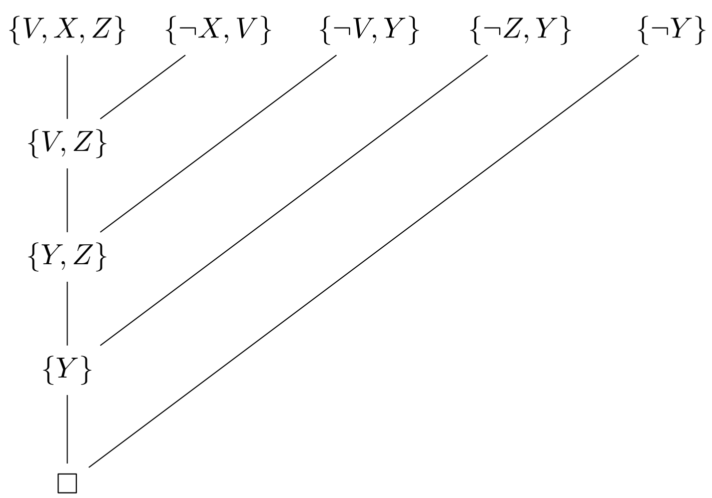
(c) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich $\Box$ aus K durch P-Resolution ableiten.

Lösung:

(a) Sei K eine Klauselmenge ohne positiven Klauseln. Also enthält jedes $C \in K$ ein negatives Literal L_C. Betrachte die Interpretation $\mathfrak{I} : \tau \to \{0, 1\}$ definiert durch $\mathfrak{I}(X) = 0$ für alle $X \in \tau$. Damit gilt $\mathfrak{I} \models L_C$ und damit $\mathfrak{I} \models C$ für alle $C \in K$. Somit erfüllt $\mathfrak{I}$ die Klauselmenge K.

(b) Hier ist ein P-Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von K:



(c) Sei K eine Klauselmenge, aus der $\Box$ mit P-Resolution abgeleitet werden kann. Da P-Resolution ein Spezialfall der *gewöhnlichen* Resolution ist, gilt damit $\Box \in \text{Res}^*(K)$. Da der gewöhnliche Resolutionskalkül korrekt ist, ist K somit unerfüllbar.

(d) Der Beweis verläuft im Wesentlichen analog zum Beweis der Vollständigkeit für den gewöhnlichen Resolutionskalkül.

Für eine Klauselmenge K seien $\text{PRes}(K)$ und $\text{PRes}^*(K)$ analog zu $\text{Res}(K)$ und $\text{Res}^*(K)$ definiert mit der Einschränkung, dass Resolventen nur durch P-Resolution gebildet werden dürfen.

Sei nun K unerfüllbar. Dann existiert nach dem Kompaktheitssatz eine endliche Teilmenge $K_0 \subseteq K$, die unerfüllbar ist. Sei n so gewählt, dass $\tau(K_0) \subseteq \{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$. Wir zeigen per Induktion nach n, dass $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K_0)$ und damit $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K)$.

Für $n = 0$ ist entweder $K_0 = \emptyset$ (erfüllbar, also Widerspruch zur Voraussetzung) oder $K_0 = \{\Box\}$ und damit $\Box \in K_0 \subseteq \mathrm{PRes}^*(K_0)$.

Für den Induktionsschluss sei nun $\tau(K_0) \subseteq \{X_0, \ldots, X_n\}$. Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned}
A &:= \{C \in K_0 : \ C \text{ enthält } X_n\}; \\
B &:= \{C \in K_0 : \ C \text{ enthält } \neg X_n\}; \\
D &:= \{C \in K_0 : \ C \text{ enthält weder } X_n \text{ noch } \neg X_n\}\,.
\end{aligned}$$

und konstruieren die Klauselmengen

$$\begin{aligned}
K_0^+ &:= \{C \setminus \{\neg X_n\} : C \in B\} \cup D \text{ und} \\
K_0^- &:= \{C \setminus \{X_n\} : C \in A\} \cup D,
\end{aligned}$$

d. h. K_0^+ entsteht aus K_0, indem man alle Klauseln streicht, die X_n enthalten, und aus den verbliebenen Klauseln $\neg X_n$ streicht (analog für K_0^-). Sowohl K_0^+ als auch K_0^- sind unerfüllbar, denn wäre K_0^+ durch eine Interpretation $\mathfrak{I} : \{X_0, \ldots, X_{n-1}\} \to \{0, 1\}$ erfüllbar, so wäre die durch $\mathfrak{I}(X_n) = 1$ erweiterte Interpretation Modell von K_0 (analog für K_0^- und $\mathfrak{I}(X_n) = 0$). K_0 ist aber nach Voraussetzung unerfüllbar!

Da K_0^- unerfüllbar ist und $\tau(K_0^-) \subseteq \{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$, ist nach Induktionsvoraussetzung $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K_0^-)$. Also existiert ein P-Resolutionsbeweis von $\Box$ in K_0^-, d. h. es existieren Klauseln $C_1, \ldots, C_m = \Box$, so dass für alle $i \leq m$ entweder $C_i \in K_0^-$ oder C_i P-Resolvente von C_j, C_k mit $j, k < i$ ist. Falls alle im Beweis verwendeten C_i aus K_0^- in D liegen (d. h. sie kommen insbesondere auch in K_0 vor), ist bereits $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K_0)$ (da im Beweis nur mit Klauseln resolviert wird, die auch in K_0 vorhanden sind).

Sonst (einige der verwendeten C_i aus K_0^- sind durch Streichen von X_n entstanden) betrachte eine Klausel C_i, die durch P-Resolution aus C_j und C_k entstanden ist. O. B. d. A. sei C_j positiv. Dann ist aber auch die Bildung der Resolvente $C_i \cup \{X_n\}$ aus den Klauseln $C_j \cup \{X_n\}$ und C_k ein korrekter P-Resolutionsschritt in der Klauselmenge K_0, da $C_i \cup \{X_n\}$ ebenfalls eine positive Klausel ist, d. h. wir können aus der Ableitung von $\Box$ in K_0^- eine Ableitung von $\{X_n\}$ in K_0 konstruieren (indem wir jeweils die entsprechenden Klauseln aus K_0, die zusätzlich X_n enthalten können, verwenden). Also ist $\{X_n\} \in \mathrm{PRes}^*(K_0)$.

Mit Hilfe von $\{X_n\}$ (positive Klausel!) sind dann alle Klauseln aus K_0^+ (aus diesen wurde $\neg X_n$ gestrichen) durch P-Resolution in K_0 ableitbar.

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber auch $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K_0^+)$ und damit schließlich die leere Klausel $\Box$ in K_0 durch P-Resolution ableitbar, d. h. $\Box \in \mathrm{PRes}^*(K_0)$.