Aufgabe 3

Sei $\mid$ der logische Junktor für NAND, definiert durch $\mathfrak{I} \models (\varphi \mid \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \not\models (\varphi \wedge \psi)$.

(a) Geben Sie die Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $\mid$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\wedge \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \wedge)$ für $\wedge$) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

(b) Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$(X \mid Y) \mid Z \;\Rightarrow\; (Z \to X) \wedge (Z \to Y)$$

in dem um die Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ erweiterten Sequenzenkalkül.

Lösung:

(a) Die Schlussregeln lauten:

$$(\mid\Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma,\, \varphi \mid \psi \;\Rightarrow\; \Delta}\,,$$

$$(\Rightarrow\mid) \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \mid \psi,\, \Delta}\,.$$

Zur Korrektheit von $(\mid\Rightarrow)$: Seien $\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi$ und $\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi$ gültig, und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \varphi \mid \psi$. Es ist zu zeigen, dass dann auch $\mathfrak{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ gilt. Angenommen, $\mathfrak{I} \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$. Dann müsste wegen $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und den Prämissen $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$ gelten. Also auch $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi$, d.h. $\mathfrak{I} \not\models \varphi \mid \psi$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zur Korrektheit von $(\Rightarrow\mid)$: Sei $\Gamma, \varphi, \psi \;\Rightarrow\; \Delta$ gültig, und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Es ist zu zeigen, dass dann $\mathfrak{I} \models \varphi \mid \psi$ oder $\mathfrak{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ gilt. Anders ausgedrückt: Gilt $\mathfrak{I} \not\models \varphi \mid \psi$, dann muss $\mathfrak{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ gelten. Nehmen wir also an, dass $\mathfrak{I} \not\models \varphi \mid \psi$. Dann gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$. Da nach Voraussetzung auch $\mathfrak{I} \models \Gamma$ gilt, folgt mit der Prämisse, dass dann auch $\mathfrak{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ gilt.

(b) Hier ist ein Beweis für die Sequenz $(X \mid Y) \mid Z \;\Rightarrow\; (Z \to X) \wedge (Z \to Y)$ im um $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ erweiterten Sequenzenkalkül:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, Y, Z \;\Rightarrow\; X}{Z \;\Rightarrow\; X \mid Y, X} \qquad Z \;\Rightarrow\; X, Z}{(X \mid Y) \mid Z, Z \;\Rightarrow\; X}}{(X \mid Y) \mid Z \;\Rightarrow\; Z \to X} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{X, Y, Z \;\Rightarrow\; Y}{Z \;\Rightarrow\; X \mid Y, Y} \qquad Z \;\Rightarrow\; Y, Z}{(X \mid Y) \mid Z, Z \;\Rightarrow\; Y}}{(X \mid Y) \mid Z \;\Rightarrow\; Z \to Y}}{(X \mid Y) \mid Z \;\Rightarrow\; (Z \to X) \wedge (Z \to Y)}$$