Aufgabe 3

Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass zu jeder CTL-Formel ψ eine äquivalente MSO-Formel $\varphi(x) \in \mathrm{MSO}(E, (P_i)_{i\in I})$ existiert, d.h. für jedes Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i\in I})$ und jeden Zustand $v \in V$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K} \models \varphi(v)$.

Lösung: Wir nennen eine CTL-Formel *reduziert*, wenn sie nur die Pfadquantoren EX, EG und E(· U ·) enthält.

Lemma. *Jede CTL-Formel ist äquivalent zu einer reduzierten Formel.*

Beweis. Eine beliebige CTL-Formel kann durch wiederholte Anwendung der folgenden Äquivalenzen in eine äquivalente reduzierte Formel transformiert werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{AX}\varphi &= \neg\mathrm{EX}\neg\varphi\,; \\ \mathrm{AG}\varphi &= \neg\mathrm{E}(1\mathrm{U}\neg\varphi)\,; \\ \mathrm{A}(\varphi\mathrm{U}\psi) &= \neg\mathrm{EG}\neg\psi \wedge \neg\mathrm{E}(\neg\psi\mathrm{U}(\neg\varphi \wedge \neg\psi))\,. \end{aligned}$$

□

Um CTL nach MSO zu übersetzen, reicht es also aus, zu jeder reduzierten CTL-Formel ψ eine äquivalente MSO-Formel $\psi^*(x)$ anzugeben. Wir definieren ψ^* wie folgt:

- Ist $\psi = P_i$ für ein $i \in I$, so setzen wir $\psi^*(x) = P_i x$;
- Ist $\psi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, so setzen wir $\psi^* = (\psi_1^* \circ \psi_2^*)$;
- Ist $\psi = \neg\psi_1$, so setzen wir $\psi^* = \neg\psi_1^*$;
- Ist $\psi = \mathrm{EX}\psi_1$, so setzen wir $\psi^*(x) = \exists y(Exy \wedge \psi_1^*(y))$;
- Ist $\psi = \mathrm{EG}\psi_1$, so setzen wir
$$\psi^*(x) = \exists X\Big(Xx \wedge \forall y\big(Xy \rightarrow \exists y'(\psi_1^*(y) \wedge Eyy' \wedge Xy')\big)\Big)\,;$$
- Ist $\psi = \mathrm{E}(\psi_1\mathrm{U}\psi_2)$, so setzen wir
$$\psi^*(x) = \exists z\left(\psi_2^*(z) \wedge \forall X\left(\Big(Xx \wedge \forall y\forall y'\big(Xy \wedge \psi_1^*(y) \wedge Eyy' \rightarrow Xy'\big)\Big) \rightarrow Xz\right)\right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass ψ und $\psi^*(x)$ äquivalent sind, d.h. dass für jedes Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i\in I})$ und jeden Zustand $v \in V$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$. Der Beweis verläuft per Induktion über den Formelaufbau entlang der Definition von ψ^*.

- Ist $\psi = P_i$ für ein $i \in I$, so folgt die Behauptung sofort aus der Definition von ψ^*.
- Ist $\psi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\psi = \neg\psi_1$ oder $\psi = \mathrm{EX}\psi_1$, so lässt sich die Behauptung leicht aus der Induktionsvoraussetzung herleiten.
- Sei $\psi = \mathrm{EG}\psi_1$ und $\vartheta(X) := \forall y\big(Xy \rightarrow \exists y'(\psi_1^*(y) \wedge Eyy' \wedge Xy')\big)$, also $\psi^* = \exists X(Xx \wedge \vartheta)$.

  Gilt $\mathcal{K}, v \models \psi$, so gibt es einen unendlichen Pfad $\pi = v_0, v_1, v_2, \ldots$ mit $v_0 = v$ und $\mathcal{K}, v_n \models \psi_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich, dass dann auch $\mathcal{K} \models \psi_1^*(v_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $A := \{v_0, v_1, \ldots\}$. Dann gilt $\mathcal{K} \models \vartheta(A)$, denn ist $v = v_n \in A$, so ist $v_{n+1} \in A \cap v_n E$. Außerdem ist $v = v_0 \in A$. Also gilt $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$.

  Gilt umgekehrt $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$, so gibt es eine Menge $A \subseteq V$ mit $v \in A$ und $\mathcal{K} \models \vartheta(A)$. Wir definieren einen unendlichen Pfad $v_0, v_1, v_2, \ldots$ durch $\mathcal{K}$ mit $v_{n+1} \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$

wie folgt: Sei $v_0 := v$, und v_{n+1} ein beliebiger Nachfolger von v_n mit $v_n \in A$. Ein solcher Nachfolger existiert immer, da $\mathcal{K} \models \vartheta(A)$ gilt. Da $v_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $\mathcal{K} \models \psi_1^*(v_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich, dass dann auch $\mathcal{K}, v_n \models \psi_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also gilt $\mathcal{K}, v \models \mathrm{EG}\psi_1$.

- Sei $\psi = \mathrm{E}(\psi_1 \mathrm{U} \psi_2)$ und

  $$\vartheta(X, x) := Xx \land \forall y \forall y' \big(Xy \land \psi_1^*(y) \land Eyy' \to Xy'\big)\,,$$

  also $\psi^* = \exists z \Big(\psi_2^*(z) \land \forall X(\vartheta \to Xz)\Big)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt genau dann $\mathcal{K}, v \models \psi_i$, wenn $\mathcal{K} \models \psi_i^*(v)$ gilt. Für eine Menge $A \subseteq V$ gilt also genau dann $\mathcal{K} \models \vartheta(A, v)$, wenn A alle Zustände $u \in V$ enthält, für die es einen Pfad $v_0, v_1, \ldots, v_n, u$ mit $v_0 = v$ und $\mathcal{K}, v_i \models \psi_1$ für alle $i = 0, \ldots, n$ gibt. Also gilt $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$ genau dann, wenn es einen Pfad $v_0, v_1, \ldots, v_n, u$ mit $v_0 = v$ und $\mathcal{K}, v_i \models \psi_1$ für alle $i = 0, \ldots, n$ sowie $\mathcal{K}, u \models \psi_2$ gibt. Doch dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ gilt.