

### 3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Freitag, den 2.5. um 8:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

#### Aufgabe 1

10 Punkte

- (a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg X).$$

- (b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg X \wedge Z) \vee Y \vee (X \wedge \neg V \wedge \neg Y) \vee (\neg Z \wedge \neg Y) \vee (X \wedge V).$$

- (c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung anhand der Resolutionsmethode:

$$\{\neg Y \vee X, Z \vee Y \vee X \vee \neg U, \neg Z \vee Y, \neg X \vee V, Z \vee X \vee U\} \models X \wedge V.$$

#### Aufgabe 2

10 Punkte

Wir sagen, dass eine Formelmenge  $\Phi$  zu einer anderen Formelmenge  $\Psi$  *äquivalent* ist, wenn für alle zu  $\Phi \cup \Psi$  passenden Interpretationen  $\mathcal{I}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi.$$

- (a) Sei  $\Phi$  äquivalent zu einer endlichen Formelmenge  $\Psi$ . Zeigen Sie, dass es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  gibt, welche zu  $\Phi$  äquivalent ist.
- (b) Sei  $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ , aber  $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$ . Zeigen Sie, dass  $\Phi$  zu *keiner* endlichen Formelmenge äquivalent ist.

#### Aufgabe 3

10 Punkte

Ein *Dominosystem*  $\mathcal{D}$  besteht aus einer endlichen Menge  $D$  von quadratischen Dominosteinen gleicher Größe, deren vier Kanten (oben, unten, links, rechts) gefärbt sind. Eine *Parkettierung* eines Teils  $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  der Ebene ist eine vollständige Überdeckung mit Dominosteinen, d.h. eine Abbildung  $\rho : X \rightarrow D$ , so dass aneinandergrenzende Kanten die selbe Farbe tragen. (Rotationen der Steine sind nicht erlaubt, aber jeder Stein kann beliebig oft verwendet werden.) Sei im Folgenden  $\mathcal{D}$  ein beliebiges Dominosystem.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von König, dass  $\mathcal{D}$  genau dann eine Parkettierung der Ebene  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  erlaubt, wenn  $\mathcal{D}$  eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate erlaubt.
- (b) Folgern Sie aus (a), dass  $\mathcal{D}$  genau dann eine Parkettierung von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  erlaubt, wenn  $\mathcal{D}$  eine Parkettierung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  erlaubt.