Aufgabe 2

Sei τ eine relationale Signatur (d.h. τ enthält keine Funktionssymbole), und sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots$ eine *Kette* von τ-Strukturen. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$, so dass $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie folgt:

$$A_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,,$$
$$R^{\mathfrak{A}_\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n} \quad \text{für alle Relationssymbole } R \in \tau.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Sätze der Form $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta \in \mathrm{FO}(\tau)$ (mit quantorenfreiem η) *unter Vereinigung von Ketten abgeschlossen sind*, d.h. wenn $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie, dass (a) nicht für beliebige Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt.

(c) Sei $\mathcal{K}$ die Modellklasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element enthalten. Geben Sie ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ kein Axiomensystem aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots \exists y_s \eta$ (mit quantorenfreiem η) besitzt.

Lösung:

(a) Wir zeigen zunächst, dass für jede quantorenfreie Formel $\eta(x_1, \ldots, x_r)$ gilt: Ist $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in A_n^r$ ein Tupel mit $\mathfrak{A}_n \models \eta(\overline{a})$, so gilt auch $\mathfrak{A}_\omega \models \eta(\overline{a})$. Der Beweis verläuft per Induktion über den Formelaufbau. O.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass η in Negationsnormalform ist.

- Sei $\eta = R\overline{x}$ oder $\eta = \neg R\overline{x}$ für ein Relationssymbol $R \in \tau$, und sei $\mathfrak{A}_n \models \eta(\overline{a})$, d.h. es gilt $\overline{a} \in R^{\mathfrak{A}_n}$ bzw. $\overline{a} \notin R^{\mathfrak{A}_n}$. Da $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ gilt dann auch $\overline{a} \in R^{\mathfrak{A}_\omega}$ bzw. $\overline{a} \notin R^{\mathfrak{A}_\omega}$.
- Die Fälle $\eta = (x = y)$ und $\eta = (\neg x = y)$ sind trivial.
- Sei $\eta = \eta_1 \vee \eta_2$, und sei $\mathfrak{A}_n \models \eta(\overline{a})$, d.h. es gilt $\mathfrak{A}_n \models \eta_1(\overline{a})$ oder $\mathfrak{A}_n \models \eta_2(\overline{a})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \eta_1(\overline{a})$ oder $\mathfrak{A}_\omega \models \eta_2(\overline{a})$. Also gilt auch $\mathfrak{A}_\omega \models \eta(\overline{a})$.
- Der Beweis für den Fall $\eta = \eta_1 \wedge \eta_2$ verläuft analog zum Beweis für den Fall $\eta = \eta_1 \vee \eta_2$.

Sei nun $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta(\overline{x}, \overline{y})$ (mit η quantorenfrei), und sei $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$, reicht es zu zeigen, dass für jedes Tupel $\overline{a} \in A_\omega^r$ ein Tupel $\overline{b} \in A_\omega^s$ mit $\mathfrak{A}_\omega \models \eta(\overline{a}, \overline{b})$ existiert.

Sei also $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in A_\omega^r$. Da $A_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_i \in A_n$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Da $\mathfrak{A}_n \models \varphi$, gibt es also auch ein Tupel $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_s) \in A_n^s$ mit $\mathfrak{A}_n \models \eta(\overline{a}, \overline{b})$. Nach dem, was wir oben gezeigt haben, gilt dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \eta(\overline{a}, \overline{b})$.

(b) Sei $\tau := \{<\}$ (mit einem zweistelligen Relationssymbol $<$) und

$$\psi := \bigwedge_{\varphi\in\Phi_<} \varphi \wedge \exists x \forall y (x < y \vee x = y)$$

wobei $\Phi_<$ das Axiomensystem für lineare Ordnungen ist. Sei weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Struktur $\mathfrak{A}_n$ definiert durch $\mathfrak{A}_n := (\{0, \ldots, n\}, <)$, wobei $<$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ (bzw. deren Einschränkung auf $\{1, \ldots, n\}$) bezeichnet. Offensichtlich gilt $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots$ und $\mathfrak{A}_n \models \psi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Vereinigung der Kette ist die Struktur $\mathfrak{A}_\omega = (\mathbb{N}, <)$. Da es in $\mathbb{N}$ kein maximales Element gibt, gilt aber $\mathfrak{A}_\omega \not\models \psi$.

(c) Offensichtlich wird $\mathcal{K}$ durch den Satz ψ aus (b) axiomatisiert. Angenommen, $\mathcal{K}$ hätte ein Axiomensystem Φ aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_r \exists y_1 \dots y_s \eta$ (mit η quantorenfrei). Seien $\mathfrak{A}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{A}_\omega$ definiert wie in (b). Da jedes $\mathfrak{A}_n$ eine lineare Ordnung mit maximalen Element ist, gilt $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \Phi$. Nach (a) gilt dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$. Es ist jedoch $\mathfrak{A}_\omega \notin \mathcal{K}$, ein Widerspruch dazu, dass Φ ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ ist.