Aufgabe 4

Sei $\psi \to \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen ϑ einen *Interpolanten* für $\psi \to \varphi$, wenn $\psi \to \vartheta$ und $\vartheta \to \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(\psi(1, Y), Y)$ ein Interpolant für $\psi(X, Y) \to \varphi(Y, Z)$ ist. Hierbei bezeichnet $\psi(\vartheta, Y)$ die Formel, die aus $\psi(X, Y)$ durch Ersetzen jedes Vorkommens von X durch die Formel ϑ entsteht.

(b) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in ψ aber nicht in φ vorkommen, dass zu jeder Tautologie $\psi \to \varphi$ ein Interpolant existiert (*aussagenlogisches Interpolationstheorem*).

Lösung:

(a) Sei $\psi(X, Y) \to \varphi(Y, Z)$ eine Tautologie, und sei $\vartheta := \psi(\psi(1, Y), Y)$. Offensichtlich ist $\tau(\vartheta) = \{Y\} = \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$. Um zu zeigen, dass ϑ ein Interpolant von $\psi \to \varphi$ ist, reicht es also zu zeigen, dass $\psi \to \vartheta$ und $\vartheta \to \varphi$ Tautologien sind.

Wir zeigen zunächst, dass $\psi \to \vartheta$ eine Tautologie ist. Sei also $\mathfrak{I} : \{X, Y\} \to \{0, 1\}$ eine beliebige Interpretation mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Es ist zu zeigen, dass dann auch $[\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\mathfrak{I}(X) = 1$: In diesem Fall gilt $[\![\psi(1, Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$, also auch $[\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi(\psi(1, Y), Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi(1, Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

$\mathfrak{I}(X) = 0$: In diesem Fall unterscheiden wir zwei weitere Fälle. Im ersten Fall ist $[\![\psi(1, Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ und damit $[\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Sonst ist $[\![\psi(1, Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$ und damit $[\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi(0, Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\vartheta \to \varphi$ eine Tautologie ist. Sei also $\mathfrak{I} : \{Y, Z\} \to \{0, 1\}$ eine beliebige Interpretation mit $[\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Es ist zu zeigen, dass dann auch $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ gilt. Wir definieren eine Interpretation $\mathfrak{I}' : \{X, Y, Z\} \to \{0, 1\}$ durch $\mathfrak{I}'(X) = [\![\psi(1, Y)]\!]^{\mathfrak{I}}$, $\mathfrak{I}'(Y) = \mathfrak{I}(Y)$ und $\mathfrak{I}'(Z) = \mathfrak{I}(Z)$. Damit gilt $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'} = [\![\psi(\psi(1, Y), Y)]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Nach Voraussetzung ist $\psi \to \varphi$ eine Tautologie. Also ist auch $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} = 1$. Da $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}'(Y)$, $\mathfrak{I}(Z) = \mathfrak{I}'(Z)$ und $\tau(\varphi) = \{Y, Z\}$, gilt somit auch $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

(b) Wir zeigen per Induktion über die Zahl $n = |\tau(\psi) \setminus \tau(\varphi)|$, dass jede Tautologie $\psi \to \varphi$ einen Interpolanten hat. Ist $n = 0$, so ist $\tau(\psi) \subseteq \tau(\varphi)$, also ist ψ ein Interpolant für $\psi \to \varphi$.

Sei nun $n > 0$. Also hat ψ die Form $\psi(X_1, \dots, X_n, \overline{Y})$, wobei $X_1, \dots, X_n$ die Aussagenvariablen sind, die in ψ, aber nicht in φ vorkommen, und $\overline{Y}$ das Tupel von Aussagenvariablen ist, die sowohl in ψ als auch in φ vorkommen. Sei

$$\psi' := \psi(\psi(1, X_2, \dots, X_n, \overline{Y}), X_2, \dots, X_n, \overline{Y})\,.$$

Analog zu (a) zeigt man, dass $\psi \to \psi'$ und $\psi' \to \varphi$ Tautologien sind. Aus der Formel ψ' kommen nur die Aussagenvariablen $X_2, \dots, X_n$ nicht in φ vor, also existiert nach Induktionsvoraussetzung ein Interpolant ϑ für $\psi' \to \varphi$, d.h. $\tau(\vartheta) \subseteq \overline{Y}$ und $\psi' \to \vartheta$ sowie $\vartheta \to \psi$ sind Tautologien. Mit $\psi \to \psi'$ und $\psi' \to \vartheta$ ist auch $\psi \to \vartheta$ eine Tautologie. Also ist ϑ auch ein Interpolant für $\psi \to \varphi$.