Aufgabe 3

Ein *Dominosystem* $\mathcal{D}$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen gleicher Größe, deren vier Kanten (oben, unten, links, rechts) gefärbt sind. Eine *Parkettierung* eines Teils $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Ebene ist eine vollständige Überdeckung mit Dominosteinen, d.h. eine Abbildung $\rho : X \to D$, so dass aneinandergrenzende Kanten die selbe Farbe tragen. (Rotationen der Steine sind nicht erlaubt, aber jeder Stein kann beliebig oft verwendet werden.) Sei im Folgenden $\mathcal{D}$ ein beliebiges Dominosystem.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von König, dass $\mathcal{D}$ genau dann eine Parkettierung der Ebene $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ erlaubt, wenn $\mathcal{D}$ eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate erlaubt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\mathcal{D}$ genau dann eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erlaubt, wenn $\mathcal{D}$ eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erlaubt.

Lösung: Im Folgenden sei für eine Funktion $f : A \to B$ und $X \subseteq A$ die *Restriktion* $f|_X$ *von* f *auf* X definiert durch $f|_X : X \to B : x \mapsto f(x)$.

(a) ($\Rightarrow$) Sei $\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to D$ eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann ist $\rho|_{\{0,\ldots,n-1\}\times\{0,\ldots,n-1\}}$ eine Parkettierung eines endlichen Quadrats der Größe $n \times n$. Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, erlaubt $\mathcal{D}$ eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate.

($\Leftarrow$) Erlaube $\mathcal{D}$ eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate. Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{D}$ damit eine Parkettierung *jedes* endlichen Quadrats erlaubt. Sei Q also ein endliches Quadrat der Größe $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, o.B.d.A. $Q = \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$. Nach Voraussetzung existiert ein $m > n$, so dass $\mathcal{D}$ eine Parkettierung ρ eines endlichen Quadrats R der Größe $m \times m$ erlaubt, o.B.d.A. $R = \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, m-1\}$. Dann ist $\rho|_Q$ eine Parkettierung von Q.

Sei nun $Q_0 = \emptyset$, und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Quadrat Q_{n+1} definiert durch $Q_{n+1} = \{-n, \ldots, n\} \times \{-n, \ldots, n\}$. Sei für $n \in \mathbb{N}$ weiter Δ_n die Menge aller Parkettierungen von $\mathcal{D}$ auf Q_n. Nach Voraussetzung gilt $\Delta_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei schließlich $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$.

Sei $\rho, \rho' \in \Delta$. Wir sagen, dass ρ' eine *direkte Erweiterung* von ρ ist, falls $\rho \in \Delta_n$, $\rho' \in \Delta_{n+1}$ und $\rho'|_{Q_n} = \rho$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir definieren einen Graphen $T = (\Delta, E)$ durch die Vorschrift $(\rho, \rho') \in E$, falls ρ' eine direkte Erweiterung von ρ ist. Es gilt:

1. T ist zusammenhängend, denn ist $\rho \in \Delta_n$, so definiert die Folge $\varepsilon, \rho|_{Q_1}, \ldots, \rho|_{Q_{n-1}}, \rho$ einen Pfad von ε zu ρ. Insbesondere ist jeder Knoten in T also mit ε verbunden.
2. T enthält keine Zykel, denn gibt es einen Pfad der Länge > 1 von $\rho \in \Delta_n$ nach $\rho' \in \Delta_m$ in T, so muss $m > n$ und $\rho = \rho'|_{Q_n}$, also insbesondere $\rho \neq \rho'$, gelten.
3. Jeder Knoten in T außer ε hat genau einen Vorgänger, denn zu jedem $\rho' \in \Delta_n$, $n > 0$, gibt es genau ein $\rho \in \Delta_{n-1}$, so dass ρ' eine direkte Erweiterung von ρ ist.
4. ε hat keinen Vorgänger, denn es gilt $\varepsilon \in \Delta_0$.

Also ist T ein Baum mit Wurzel ε. Außerdem ist T endlich verzweigt, denn für eine gegebene Parkettierung $\rho \in \Delta_n$ gibt es höchstens $|D|^{|Q_{n+1}\setminus Q_n|} = |D|^{\max\{8n,1\}}$ direkte Erweiterungen von ρ. Schließlich gibt es in T Wege beliebiger Länge, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Voraussetzung eine Parkettierung $\rho \in \Delta_n$ und damit einen Weg der Länge n von ε zu ρ in T. Nach dem Lemma von König existiert also ein unendlicher Weg $\varepsilon = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ in T. Wir definieren eine Abbildung $\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to D$ durch $\rho(i, j) = \rho_n(i, j)$ für ein (und damit für alle) $n \geq \max\{|i|, |j|\}$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\rho|_{Q_n} = \rho_n$. Da jedes ρ_n eine Parkettierung von Q_n ist, ist ρ eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) ($\Rightarrow$) Angenommen, $\mathcal{D}$ erlaubt eine Parkettierung $\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to D$. Dann ist $\rho|_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Also erlaubt $\mathcal{D}$ auch eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Sei $\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Damit erlaubt $\mathcal{D}$ eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\rho|_{\{0,\ldots,n-1\}\times\{0,\ldots,n-1\}}$ eine Parkettierung eines Quadrats der Größe $n \times n$. Also erlaubt $\mathcal{D}$ nach (a) auch eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.