Aufgabe 1

Seien im folgenden R und S zweistellige Relationssymbole und σ eine relationale Signatur.

(a) Wandeln Sie die folgende Formel ψ in Skolem-Normalform um:

$$\psi := \exists x \exists y (\neg Rxy \rightarrow \forall y \exists z (Sxy \wedge (y = z \vee Ryz)))\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ der Gestalt

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta$$

über einer relationalen Signatur $\tau \supseteq \sigma$ mit quantorenfreiem η existiert, so dass ψ genau dann ein Modell mit Universum A hat, wenn φ ein Modell mit Universum A hat (*relationale Skolem-Normalform*).

(c) Wandeln Sie die Formel ψ aus (a) in relationale Skolem-Normalform um.

Lösung zu (b): Sei $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$. Nach dem Satz über die Skolem-Normalform existiert eine Formel $\psi_1 \in \mathrm{FO}(\tau)$ über einer Signatur $\tau = \sigma \cup \{f_1, \ldots, f_k\}$ (f_i Funktionssymbole) der Form $\psi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_r\, \eta$ mit quantorenfreiem η, so dass ψ und ψ_1 über den gleichen Universen erfüllbar sind. Aus dem Beweis zu Lemma 2.19 folgt, dass η zu einer termreduzierten Formel η' der Form $\eta' = \exists y_1 \ldots y_s\, \vartheta$ (mit ϑ quantorenfrei) äquivalent ist. Insgesamt gilt also, dass ψ_1 zu der Formel

$$\psi_2 := \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots y_s\, \vartheta$$

äquivalent ist.

Bezeichne n_i die Stelligkeit des Funktionssymbols f_i. Dann seien $R_1, \ldots, R_k$ neue (d.h. nicht in ϑ vorkommende) Relationssymbole der Stelligkeit $n_1{+}1, \ldots, n_k{+}1$ und $\widetilde{\tau} := \sigma \cup \{R_1, \ldots, R_k\}$. Offensichtlich ist $\widetilde{\tau}$ relational. Für eine beliebige termreduzierte Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ sei $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{FO}(\widetilde{\tau})$ die Formel, die aus φ durch Ersetzen jedes Atoms $f_i\overline{x} = y$ durch das Atom $R_i\overline{x}y$ entsteht. Sei schließlich für jedes $i = 1, \ldots, k$ die Formel α_i definiert durch

$$\alpha_i := \forall x_1 \ldots x_{n_i} \forall y_1 \forall y_2 \exists y \big(R_i x_1 \ldots x_{n_i} y \wedge (R_i x_1 \ldots x_{n_i} y_1 \wedge R_i x_1 \ldots x_{n_i} y_2 \rightarrow y_1 = y_2)\big)\,,$$

und sei $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$. Die Formel α drückt also aus, dass jedes R_i den Graph einer Funktion beschreibt.

Wir setzen nun

$$\psi' := \alpha \wedge \widetilde{\psi_2} = \alpha \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots y_s\, \widetilde{\vartheta}\,.$$

Offensichtlich ist ψ' relational und zu einer Formel der gewünschten Form äquivalent. Es bleibt zu zeigen dass ψ_2 (und damit ψ) und ψ' über den gleichen Universen erfüllbar sind. Dazu zeigen wir allgemeiner, dass für jede termreduzierte Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt, dass φ und $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ über den gleichen Universen erfüllbar sind.

Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_k^{\mathfrak{A}}), \beta)$ ein Modell von φ. Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass dann $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_k^{\mathfrak{A}}), \beta)$ mit

$$R_i^{\mathfrak{A}} = \{(a_1, \ldots, a_{n_i}, b) : f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) = b\}$$

ein Modell von $\widetilde{\varphi}$ ist. Dass die so definierte Struktur ein Modell von α ist, ist offensichtlich. O.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass φ in Negationsnormalform ist.

- Ist $\varphi \in \{R\overline{x}, \neg R\overline{x}\}$ für ein Relationssymbol $R \in \sigma$ oder $\varphi \in \{x = y, x \neq y\}$, so ist die Behauptung trivial.

- Ist $\varphi \in \{f_i\overline{x} = y, f_i\overline{x} \neq y\}$ für ein $i = 1,\ldots,k$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $R_i^{\mathfrak{A}}$.

- Sei $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ und $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi$, d.h. $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi_i$ für ein $i \in \{1,2\}$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass dann auch $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \widetilde{\varphi}_i$ für ein $i \in \{1,2\}$ gilt. Da $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi_1} \vee \widetilde{\varphi_2}$, folgt $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \widetilde{\varphi}$.

- Der Beweis für den Fall $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ verläuft analog zum Beweis für den Fall $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

- Sei $\varphi = \exists x\, \varphi_1$ und $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi$. Also gilt $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta[x/a]) \models \varphi_1$ für ein $a \in A$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass dann die Interpretation $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta[x/a])$ für ein $a \in A$ ein Modell von $\widetilde{\varphi}_1$ ist. Da $\widetilde{\varphi} = \exists x\, \widetilde{\varphi_1}$, ist damit $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ ein Modell von $\widetilde{\varphi}$.

- Der Beweis für den Fall $\varphi = \forall x\, \varphi_1$ verläuft analog zum Beweis für den Fall $\varphi = \exists x\, \varphi_1$.

Damit ist gezeigt, dass zu jedem Modell von φ ein Modell von $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ mit dem gleichen Universum existiert.

Sei nun $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ ein Modell von $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ und $a \in A$. Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass dann $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ mit

$$f_i^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_{n_i}) = b \text{ für ein (und damit für alle) } b \text{ mit } (a_1,\ldots,a_{n_i},b) \in R_i^{\mathfrak{A}}$$

ein Modell von φ ist. Wieder können wir dabei o.B.d.A. annehmen, dass φ in Negationsnormalform ist.

- Ist $\varphi \in \{R\overline{x}, \neg R\overline{x}\}$ für ein Relationssymbol $R \in \sigma$ oder $\varphi \in \{x = y, x \neq y\}$, so ist die Behauptung trivial.

- Sei $\varphi = (f_i\overline{x} = y)$ für ein $i = 1,\ldots,k$ und $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \alpha \wedge \widetilde{\varphi}$. Da $\widetilde{\varphi} = R_i\overline{x}y$, ist also $(\beta(x_1),\ldots,\beta(x_{n_i}),\beta(y)) \in R_i^{\mathfrak{A}}$. Da $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ ein Modell von α ist, ist $R_i^{\mathfrak{A}}$ der Graph einer Funktion. Damit folgt aus der Definition von $f_i^{\mathfrak{A}}$, dass $f_i^{\mathfrak{A}}(\beta(x_1),\ldots,\beta(x_{n_i})) = \beta(y)$. Also gilt $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi$.

- Der Beweis für den Fall $\varphi = (f_i\overline{x} \neq y)$ verläuft analog zum Beweis für $\varphi = (f_i\overline{x} = y)$.

- Sei $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ und $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \widetilde{\varphi}$. Da $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi_1} \vee \widetilde{\varphi_2}$, gilt also, dass die Interpretation $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ für ein $i \in \{1,2\}$ ein Modell von $\widetilde{\varphi}_i$ ist. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass dann auch $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi_i$ für ein $i \in \{1,2\}$ und damit $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \varphi$ gilt.

- Der Beweis für den Fall $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ verläuft analog zum Beweis für den Fall $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

- Sei $\varphi = \exists x\, \varphi_1$ und $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta) \models \widetilde{\varphi}$. Da $\widetilde{\varphi} = \exists x\, \widetilde{\varphi_1}$, ist also die Interpretation $((\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}},\ldots,R_k^{\mathfrak{A}}),\beta[x/a])$ für ein $a \in A$ ein Modell von $\widetilde{\varphi_1}$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass dann $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta[x/a])$ für ein $a \in A$ ein Modell von φ_1 ist. Also ist $((\mathfrak{A}, f_1^{\mathfrak{A}},\ldots,f_k^{\mathfrak{A}}),\beta)$ ein Modell von φ.

- Der Beweis für den Fall $\varphi = \forall x\, \varphi_1$ verläuft analog zum Beweis für den Fall $\varphi = \exists x\, \varphi_1$.

Damit ist auch gezeigt, dass zu jedem Modell von $\alpha \wedge \widetilde{\varphi}$ ein Modell von φ mit dem gleichen Universum existiert.

Aufgabe 2

(a) Sei $\varphi = \forall x Rxfx$ (mit einem zweistelligen Relationssymbol R und einem einstelligen Funktionssymbol f). Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von φ, so gibt es eine abzählbare Substruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{A}$, so dass die Menge $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ induziert.

(b) Zeigen Sie: Jeder erfüllbare FO-Satz φ hat ein abzählbares Modell.

Hinweis: Betrachten Sie die Skolem-Normalform von φ, und führen Sie eine ähnliche Konstruktion wie in (a) durch.

Lösung:

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$ ein Modell von φ, und sei a ein beliebiges Element von A. Wir definieren eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von Elementen in A durch $a_0 := a$ und $a_{n+1} = f^{\mathfrak{A}}(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $B := \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ ist abzählbar und induziert eine Substruktur von $\mathfrak{A}$: Ist $b = a_k \in B$, so ist auch $f^{\mathfrak{A}}(b) = a_{k+1} \in B$.

Sei also $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$ die von B induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt. Dafür reicht es zu zeigen, dass für jedes $b \in B$ gilt: $(b, f^{\mathfrak{B}}(b)) \in R^{\mathfrak{B}}$. Sei also $b \in B$. Da $\mathfrak{A} \models \varphi$ ist $(b, f^{\mathfrak{A}}(b)) \in R^{\mathfrak{A}}$. Da $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, gilt aber dass $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}}|_B$ und $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap (B \times B)$, also ist $(b, f^{\mathfrak{B}}(b)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

(b) Um die Aufgabe zu lösen, benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Lemma 1. *Seien $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ τ-Strukturen. Dann gilt $[\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)}$ für jeden τ-Term t und jede Belegung $\beta : \mathrm{var}(t) \to B$.*

Beweis. Per Induktion über den Aufbau von Termen. □

Lemma 2. *Seien $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ τ-Strukturen, $\eta(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel und $\bar{b} \in B^r$ ein Tupel mit $\mathfrak{A} \models \eta(\bar{b})$. Dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$.*

Beweis. Der Beweis verläuft wieder per Induktion über den Formelaufbau. O.B.d.A. können wir annehmen, dass η in Negationsnormalform ist.

- Sei $\eta = Rt_1 \ldots t_k$ für ein k-stelliges Relationssymbol $R \in \tau$, und gelte $\mathfrak{A} \models \eta(\bar{b})$. Also gilt:

  $$([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})}, \ldots, [\![t_k]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})}) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

  Nach Lemma 1 gilt $[\![t_i]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})} = [\![t_i]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})} \in B$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Also gilt:

  $$([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})}, \ldots, [\![t_k]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})}) \in R^{\mathfrak{A}} \cap B^k = R^{\mathfrak{B}}.$$

  Somit ist gezeigt, dass auch $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$.
- Der Fall $\eta = \neg Rt_1 \ldots t_k$ ist analog zum Fall $\eta = Rt_1 \ldots t_k$.
- Sei $\eta = (t_1 = t_2)$, und gelte $\mathfrak{A} \models \eta(\bar{b})$. Also gilt $[\![t_1]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})} = [\![t_2]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})}$. Nach Lemma 1 gilt $[\![t_i]\!]^{(\mathfrak{A},\bar{x}\mapsto\bar{b})} = [\![t_i]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})} \in B$ für alle $i = 1, 2$. Also gilt auch $[\![t_1]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})} = [\![t_2]\!]^{(\mathfrak{B},\bar{x}\mapsto\bar{b})}$ und somit $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$.
- Der Fall $\eta = (t_1 \neq t_2)$ ist analog zum Fall $\eta = (t_1 = t_2)$.

- Sei $\eta = \eta_1 \vee \eta_2$, und gelte $\mathfrak{A} \models \eta(\bar{b})$. Also gilt $\mathfrak{A} \models \eta_1(\bar{b})$ oder $\mathfrak{A} \models \eta_2(\bar{b})$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass dann auch $\mathfrak{B} \models \eta_1(\bar{b})$ oder $\mathfrak{B} \models \eta_2(\bar{b})$ gilt. Also gilt $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$.
- Der Fall $\eta = \eta_1 \wedge \eta_2$ ist analog zum Fall $\eta = \eta_1 \vee \eta_2$. $\square$

Kommen wir nun zur eigentlichen Aufgabe. Sei φ ein erfüllbarer FO-Satz. Nach dem Satz über die Skolem-Normalform existiert eine Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ in Skolem-Normalform, die über den gleichen Universen wie φ erfüllbar ist. Sei $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_r \eta$ mit $\eta = \eta(x_1, \ldots, x_r)$ quantorenfrei. Da φ und ψ über den gleichen Universen erfüllbar sind, reicht es zu zeigen, dass ψ ein abzählbares Modell besitzt.

Da φ und damit ψ erfüllbar ist, gibt es eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$, die ein Modell von ψ ist. Seien $f_1, \ldots, f_k$ die in τ vorkommenden Funktionssymbole, wobei f_i die Stelligkeit n_i habe. Sei weiter $a \in A$ beliebig. Wir definieren eine Folge $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ von Teilmengen von A durch $A_0 := \{a\}$ und

$$A_{n+1} = A_n \cup \{f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{n_i}) : b_i, \ldots, b_{n_i} \in A_n,\ i = 1, \ldots, k\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Jede der Mengen A_n ist endlich, also ist B eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und damit abzählbar. Auch induziert B eine Substruktur von $\mathfrak{A}$: Ist $b_1, \ldots, b_{n_i} \in B$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_j \in A_n$ für alle $j = 1, \ldots, n_i$ und damit $f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in A_{n+1}$ ist. Also ist auch $f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in B$.

Sei $\mathfrak{B}$ die von B induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{B} \models \psi$ gilt. Dafür reicht es zu zeigen, dass für jedes Tupel $\bar{b} \in B^r$ gilt: $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$. Sei also $\bar{b} \in B^r$. Da $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt, gilt auch: $\mathfrak{A} \models \eta(\bar{b})$. Mit Lemma 2 folgt dann, dass auch $\mathfrak{B} \models \eta(\bar{b})$ gilt. Somit ist $\mathfrak{B}$ ein abzählbares Modell von ψ.