Aufgabe 3

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

(i) $\varphi(c) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$, wobei c nicht in φ vorkommt;

(ii) $\forall x\exists y(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x\exists y\varphi \wedge \forall x\exists y\psi$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(i) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x\varphi(x) \Rightarrow \Delta}$;

(ii) $\dfrac{\Gamma,\ \exists x\psi \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi}{\Gamma,\ \forall x\psi \Rightarrow \Delta,\ \exists x\varphi}$.

Lösung:

(a) (i) Die Sequenz ist nicht gültig. Sei $\varphi = Px$ für ein einstelliges Relationssymbol P, und betrachte die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$ mit $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$ und $c^{\mathfrak{A}} = 0$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$, aber $\mathfrak{A} \not\models \forall x\varphi(x)$.

(ii) Die Sequenz ist gültig. Sei $\mathfrak{A} \models \forall x\exists y(\varphi \wedge \psi)$, und sei $a \in A$ beliebig. Also gibt es ein $b \in B$ mit $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a, y \mapsto b]) \models \varphi$ und $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a, y \mapsto b]) \models \psi$. Es folgt, dass sowohl $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a]) \models \exists y\varphi$ als auch $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a]) \models \exists y\psi$ gilt. Da a beliebig war, gilt also $\mathfrak{A} \models \forall x\exists y\varphi$ und $\mathfrak{A} \models \forall x\exists y\psi$ und damit $\mathfrak{A} \models \forall x\exists y\varphi \wedge \forall x\exists y\psi$.

(b) (i) Die Schlussregel ist im Allgemeinen nicht korrekt. Sei $\Gamma := \emptyset$, $\varphi(x) := x \neq c$ und $\Delta := \emptyset$. Dann ist $\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta$ gültig (denn $c \neq c$ ist unerfüllbar), aber $\Gamma, \exists x\varphi(x) \Rightarrow \Delta$ ist nicht gültig, denn $\exists x\, x \neq c$ ist erfüllbar.

(ii) Die Schlussregel ist korrekt. Sei die Sequenz $\Gamma,\ \exists x\psi \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi$ gültig, und sei $\mathfrak{A} \models \Gamma$ und $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$. Es ist zu zeigen, dass dann $\mathfrak{A} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ oder $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi$ gilt.

Sei dazu a ein beliebiges Element aus dem Universum von $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$, gilt $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a]) \models \psi$ und damit $\mathfrak{A} \models \exists x\psi$. Da die Sequenz $\Gamma,\ \exists x\psi \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi$ gültig ist und außerdem $\mathfrak{A} \models \Gamma$ gilt, können wir also schließen, dass $\mathfrak{A} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ oder $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$. Im ersten Fall sind wir fertig. Sonst gilt insbesondere $(\mathfrak{A}, [x \mapsto a]) \models \varphi$ und damit $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi$.