Aufgabe 2

Seien $\mathcal{K}_j = (V^j, (E_a^j)_{a\in A}, (P_i^j)_{i\in I})$ für $j = 1,2$ zwei Transitionssysteme, und seien $Z, Z' \subseteq V^1 \times V^2$ zwei Bisimulationen zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen ebenfalls Bisimulationen sind:

(a) $Z \cup Z'$;

(b) $Z \cap Z'$;

(c) $(V^1 \times V^2) \setminus Z$;

(d) $\{(v_1, v_2) \in V^1 \times V^2 :$ es gibt $u_1 \in V^1$ und $u_2 \in V^2$ mit $(v_1, u_2), (u_1, u_2), (u_1, v_2) \in Z\}$.

Lösung:

(a) Sei $X = Z \cup Z'$. Wir behaupten, dass X eine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ ist. Dafür ist zu zeigen, dass für alle $(v_1, v_2) \in X$ gilt:

(1) $v_1 \in P_i^1$ gdw. $v_2 \in P_i^2$ für alle $i \in I$.

(2) Für alle $a \in A$, $w_1 \in V^1$ mit $(v_1, w_1) \in E_a^1$ gibt es ein $w_2 \in V^2$ mit $(v_2, w_2) \in E_a^2$ und $(w_1, w_2) \in X$ (Hin).

(3) Für alle $a \in A$, $w_2 \in V^2$ mit $(v_2, w_2) \in E_a^2$ gibt es ein $w_1 \in V^1$ mit $(v_1, w_1) \in E_a^1$ und $(w_1, w_2) \in X$ (Her).

Beweis: Sei $(v_1, v_2) \in X$, also ist $(v_1, v_2) \in Z$ oder $(v_1, v_2) \in Z'$.

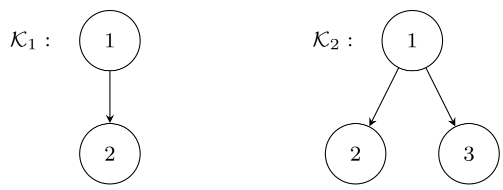
(1) Ist $(v_1, v_2) \in Z$ gilt die Behauptung, da Z eine Bisimulation ist. Sonst gilt die Behauptung, da Z' eine Bisimulation ist.

(2) Sei $a \in A$ und $w_1 \in V^1$ mit $(v_1, w_1) \in E_a^1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $(v_1, v_2) \in Z$. Da Z eine Bisimulation ist, gibt es dann ein $w_2 \in V^2$ mit $(v_2, w_2) \in E_a^2$ und $(w_1, w_2) \in Z$, also auch $(w_1, w_2) \in X$.
- $(v_1, v_2) \in Z'$. Da Z' eine Bisimulation ist, gibt es dann ein $w_2 \in V^2$ mit $(v_2, w_2) \in E_a^2$ und $(w_1, w_2) \in Z'$, also auch $(w_1, w_2) \in X$.

(3) Der Beweis, dass die Her-Eigenschaft gilt, verläuft analog zum Beweis, dass die Hin-Eigenschaft erfüllt ist. $\square$

(b) Wir behaupten, dass $Z \cap Z'$ i.A. keine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ ist. Betrachte dazu die folgenden zwei Transitionssysteme:



Offensichtlich sind $Z := \{(1,1), (2,2)\}$ und $Z' := \{(1,1), (2,3)\}$ Bisimulationen zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$; die Relation $Z \cap Z' = \{(1,1)\}$ ist jedoch keine Bisimulation zwischen den beiden Transitionssystemen.

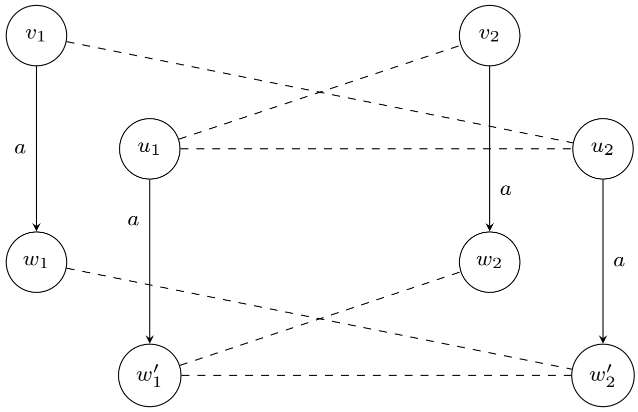
(c) Wir behaupten, dass $(V^1 \times V^2) \setminus Z$ i.A. keine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ ist. Sei dazu $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1$ wie in (b) definiert. Offensichtlich ist $Z := \{(1,1), (2,2)\}$ eine Bisimulation auf $\mathcal{K}$; die Relation $(V^1 \times V^2) \setminus Z = \{(1,2), (2,1)\}$ ist jedoch keine Bisimulation auf $\mathcal{K}$.

(d) Sei X die angegebene Relation. Wir behaupten, dass X eine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ ist, d.h. X erfüllt die Bedingungen (1)–(3) wie in (a).

Beweis: Sei $(v_1, v_2) \in X$. Also gibt es $(u_1, u_2) \in V^1 \times V^2$ mit $(v_1, u_2), (u_1, u_2), (u_1, v_2) \in Z$.

(1) Da Z eine Bisimulation ist, gilt $v_1 \in P_i^1$ gdw. $u_2 \in P_i^2$ gdw. $u_1 \in P_i^1$ gdw. $v_2 \in P_i^2$.

(2) Sei $a \in A$ und $w_1 \in V^1$ mit $(v_1, w_1) \in E_a^1$. Da Z eine Bisimulation mit $(v_1, u_2) \in Z$ ist, gibt es ein $w_2' \in V^2$ mit $(u_2, w_2') \in E_a^2$ und $(w_1, w_2') \in Z$ (Hin). Da $(u_1, u_2) \in Z$ und $(u_2, w_2') \in E_a^2$, gibt es ein $w_1' \in V^1$ mit $(u_1, w_1') \in E_a^1$ und $(w_1', w_2') \in Z$ (Her). Da $(u_1, v_2) \in Z$ und $(u_1, w_1') \in E_a^1$, gibt es schließlich ein $w_2 \in V^2$ mit $(v_2, w_2) \in E_a^2$ und $(w_1', w_2) \in Z$ (Hin). Da $(w_1, w_2'), (w_1', w_2'), (w_1', w_2) \in Z$, gilt $(w_1, w_2) \in X$.



(3) Der Beweis, dass die Her-Eigenschaft gilt, verläuft analog zum Beweis, dass die Hin-Eigenschaft erfüllt ist. $\square$