**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Ummels

SS 2008

# 1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.4. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

## Aufgabe 1 — 6 + 4* Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(a) $(X \to 1) \to (0 \to Y)$

(b) $(X \land (Y \to \neg X)) \to (1 \to Y)$

(c) $\neg(\neg X \to (Y \to \neg X))$

(d)* $(1 \to (X \lor Y)) \land (0 \to (\neg X \land \neg Y))$

(e)* $(X \land \neg Y) \to ((X \to Y) \to Z)$

## Aufgabe 2 — 10 Punkte

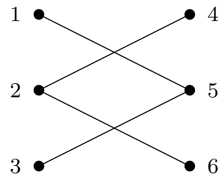
(a) Finden Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für jede Interpretation $\mathfrak{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \to \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern eines beliebigen Wahrheitswerts $\mathfrak{I}(X_i)$ auch der Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$ ändert.

(b) Schreiben Sie eine Formel $\varphi(X_0, \dots, X_4)$, die genau dann gilt, wenn eine gerade Anzahl der Variablen $X_i$ mit 1 belegt sind.

## Aufgabe 3 — 10 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable $X_{ik}$ zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen $i$ und $k$ gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi$ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:




(b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 4$ und dann für beliebige $n$ Formeln $\varphi_n$, die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebige $n$ Formeln $\varphi_n$, die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.

**Aufgabe 4*** 10* Punkte

Sei $\psi \to \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen $\vartheta$ einen *Interpolanten* für $\psi \to \varphi$, wenn $\psi \to \vartheta$ und $\vartheta \to \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(\psi(1, Y), Y)$ ein Interpolant für $\psi(X, Y) \to \varphi(Y, Z)$ ist. Hierbei bezeichnet $\psi(\vartheta, Y)$ die Formel, die aus $\psi(X, Y)$ durch Ersetzen jedes Vorkommens von $X$ durch die Formel $\vartheta$ entsteht.

(b) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in $\psi$ aber nicht in $\varphi$ vorkommen, dass zu jeder Tautologie $\psi \to \varphi$ ein Interpolant existiert (*aussagenlogisches Interpolationstheorem*).