Aufgabe 3

Sei τ eine Signatur und $\varphi(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine Formel über dieser Signatur.

(a) Definieren Sie die Konstrukte $\exists^{\geq n} x\, \varphi$ und $\exists^{=n} x\, \varphi$ (es existieren mindestens bzw. genau n Elemente x, die φ erfüllen), indem Sie jeweils eine äquivalente FO-Formel angeben.

(b) Sei nun $k = 1$. Schreiben Sie einen Satz $\vartheta \in \mathrm{FO}(\tau)$, der genau dann in einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, wenn genau ein Paar $(a, b) \in A^2$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass ϑ zu einem der folgenden Sätze äquivalent ist:

$$\exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y); \qquad \exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y).$$

Lösung:

(a) Die angegebenen Konstrukte werden durch die folgenden FO-Formeln definiert:

$$\exists^{\geq n} x\, \varphi := \exists x_1 \dots \exists x_n \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi(x_i, y_1, \dots, y_k) \Big);$$

$$\exists^{=n} x\, \varphi := \exists x_1 \dots \exists x_n \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi(x_i, y_1, \dots, y_k) \wedge \forall x \Big(\varphi(x, y_1, \dots, y_k) \rightarrow \Big(\bigvee_{1 \leq i \leq n} x = x_i \Big) \Big) \Big).$$

(b) Folgender Satz gilt offensichtlich genau dann in einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn genau ein Paar $(a, b) \in A^2$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ existiert:

$$\vartheta := \exists x \exists y\, \varphi(x, y) \wedge \forall u \forall v\, \big(\varphi(u, v) \rightarrow (u = x \wedge v = y)\big)$$

(c) ϑ ist im Allgemeinen weder zu $\exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$ noch zu $\exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y)$ äquivalent. Sei zum Beispiel $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol R und $\varphi = Rxy$. Sei weiter $\mathfrak{A}$ die τ-Struktur mit Universum $\{1, 2\}$ und $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{A} \not\models \vartheta$, denn es gibt drei Paare (a, b) mit $(a, b) \in R^{\mathfrak{A}}$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$ und $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y)$. Also ist $\mathfrak{A}$ ein Zeuge für die Nicht-Äquivalenz von ϑ zu $\exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$ und $\exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$ und $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y)$: Es gibt genau ein Element $b \in A$ mit $(2, b) \in R^{\mathfrak{A}}$, nämlich $b = 2$, d.h. es gilt $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} y\, \varphi(2, y)$. Außerdem gibt es zwei Elemente $b \in A$ mit $(1, b) \in R^{\mathfrak{A}}$, nämlich $b = 1$ und $b = 2$, d.h. es gilt $\mathfrak{A} \not\models \exists^{=1} y\, \varphi(1, y)$. Also gibt es genau ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} y\, \varphi(a, y)$, nämlich $a = 2$, was zeigt, dass $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\exists^{=1} x\, \exists^{=1} y\, \varphi(x, y)$ ist. Die Argumentation, dass $\mathfrak{A} \models \exists^{=1} y\, \exists^{=1} x\, \varphi(x, y)$, verläuft analog.