Aufgabe 2

Sei τ eine endliche Signatur und $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass die Strukturklasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ endlich axiomatisierbar ist.

(b) Folgern Sie aus (a): Ist $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, so gilt schon $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Lösung:

(a) Sei $\tau = \{R_1, \dots, R_k, f_1, \dots, f_l\}$ mit Relationssymbolen R_j der Stelligkeit r_j und Funktionssymbolen f_j der Stelligkeit s_j, und sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir definieren

$$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n (\psi \wedge \vartheta)\,,$$

wobei

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \forall y (\bigvee_{1 \le i \le n} y = x_i)$$

und

$$\vartheta(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{1 \le j \le k} \left(\bigwedge_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_{r_j} \le n \\ (a_{i_1}, \dots, a_{i_{r_j}}) \in R_j^{\mathfrak{A}}}} R x_{i_1} \dots x_{i_{r_j}} \wedge \bigwedge_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_{r_j} \le n \\ (a_{i_1}, \dots, a_{i_{r_j}}) \notin R_j^{\mathfrak{A}}}} \neg R x_{i_1} \dots x_{i_{r_j}} \right)$$
$$\wedge \bigwedge_{1 \le j \le l} \left(\bigwedge_{1 \le i_1, \dots, i_{s_j} \le n} \bigwedge_{\substack{1 \le i \le n \\ f_j^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \dots, a_{i_{s_j}}) = a_i}} f x_{i_1} \dots x_{i_{s_j}} = x_i \right).$$

Wir behaupten, dass φ die Klasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ axiomatisiert. Dazu ist zu zeigen, dass für jede Struktur $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

($\Rightarrow$): Sei $\mathfrak{B} \models \psi$. Also gibt es Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$ und $\mathfrak{B} \models \vartheta(b_1, \dots, b_n)$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : A \to B$ durch $\pi(a_i) = b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wegen $\mathfrak{B} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$, ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$, also ist π bijektiv. Wegen $\mathfrak{B} \models \vartheta(b_1, \dots, b_n)$ gilt außerdem

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_{r_j}}) \in R_j^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (b_{i_1}, \dots, b_{i_{r_j}}) \in R^{\mathfrak{B}}\,,$$
$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_{r_j}}) \notin R_j^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (b_{i_1}, \dots, b_{i_{r_j}}) \notin R_j^{\mathfrak{B}}$$

und

$$f_j^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \dots, a_{i_{s_j}}) = a_i \Leftrightarrow f_j^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s_j}}) = b_i$$

für jedes Relationssymbol R_i und alle $1 \le i_1, \dots, i_{r_j} \le n$ bzw. jedes Funktionssymbol f_i und alle $1 \le i_1, \dots, i_{s_j} \le n$. Also ist π ein Isomorphismus, und es gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

($\Leftarrow$): Sei $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Also gibt es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$. Da π bijektiv ist, gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$, und da π ein starker Homomorphismus ist, gilt $\mathfrak{B} \models \vartheta(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$. Also gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi$.

(b) Sei $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$, gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ für den Satz φ aus (a). Da $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, muss dann auch $\mathfrak{B} \models \varphi$ gelten. Da $\mathfrak{B} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt, muss also $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gelten.