Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

Probeklausur
Mathematische Logik

Aufgabe 1: 7 Punkte

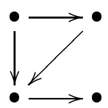
Welche der folgenden Klassen von Graphen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antworten und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 =$ die Klasse aller vollständigen Graphen. (Ein Graph heisst vollständig, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden ist.)

$K_2 =$ die Klasse aller Graphen mit Durchmesser 3. (Der Durchmesser eines Graphen ist der maximale Abstand zweier Punkte.)

$K_3 =$ die Klasse aller Graphen, welche einen Kreis der Länge 5 enthalten.

$K_4 =$ die Klasse aller endlichen Graphen in K_3.

$K_5 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu  isomorph sind.

$K_6 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu $(\mathbb{N}, E)$ ismomorph sind, wobei $E = \{(m, n) \ : \ m + 1 = n$ oder $m - 1 = n\}$ ist.

$K_7 =$ die Klasse aller Graphen, in denen jeder Knoten höchstens endlich viele Nachbarn hat.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Sei K_1 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass $|Bild(f)| = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass K_1 nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b) Sei K_2 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass es für alle Elemente a ein $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $f^n(a) = a$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass K_2 nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und P ein 2-stelliges Relationssymbol. Gegeben sei die $\{P, f\}$-Formel $\psi := \forall z[(fxz = y) \land (\forall x \forall y(Pxy \land Pyz) \to Pzz)]$.

(a) Bilden Sie $\psi[x/z, y/z, z/fxx]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{0,1\}, +, 1)$, wobei $+$ als die Addition (mod 2) interpretiert sei, sowie die Formel $\psi := \exists x \forall y (y + y = x + 1 \wedge \exists z (y + z = x))$.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)

Aufgabe 5: 6 Punkte

Gegeben sei ein Transitionssystem $T = (S, E_a, E_b, P, Q)$, wobei E_a, E_b zweistellige und P, Q einstellige Relationssymbole seien.

(a) Definieren Sie folgende Mengen mittels FO-Formeln.

(i) Die Menge aller Knoten von denen ein aba-Pfad ausgeht.

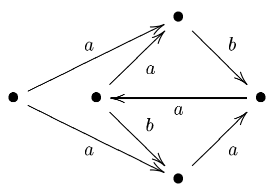
(ii) Die Menge aller Knoten an denen P gilt, Q aber nicht, mit mindestens zwei a-Nachfolgern an denen P gilt und genau einem b-Nachfolger an dem Q nicht gilt.

(b) Definieren Sie folgende Mengen mittels RA-Ausdrücken.

(i) Die Menge aller Knoten mit einem a-Vorgänger und einem b-Nachfolger.

(ii) Die Menge aller Knoten, von denen ein bba-Pfad ausgeht, auf dem die Knotenbeschriftung $(\{P, \neg Q\}, \{P, Q\}, \{Q, \neg P\}, \{\neg P, \neg Q\})$ auftritt. (Das bedeutet, der erste Knoten auf dem Pfad ist mit P, Q beschriftet, der nächste mit $Q, \neg P$ usw.)

(c) Gegeben sei folgendes Transitionssystem:



Geben Sie für jede der folgenden Formeln bzw. RA-Ausdrücke die definierte Menge von Knoten an und beschreiben Sie die Bedeutung der Formeln.

(i) $\psi(x) := \exists y \exists y' \exists z E_a xy \wedge E_b xy' \wedge y \neq y' \wedge E_b yz \wedge E_a y'z$.

(ii) $\pi_1 \sigma_{2=3} \sigma_{4=5} \sigma_{1=6} (E_a \times E_b \times E_a)$.

Aufgabe 6: 5 Punkte

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man AL-Resolution um nachzuweisen, dass $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \psi$, für AL-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass $\{Y \rightarrow X, U \wedge W \rightarrow Y, V \rightarrow U\} \models W \wedge V \rightarrow X$.

Aufgabe 7: 8 Punkte

(a) φ, ψ, ϑ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \psi$.

(ii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \vartheta \equiv \varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \vartheta)$.

(iii) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \vartheta \equiv (\varphi \rightarrow \vartheta) \vee (\psi \rightarrow \vartheta)$.

(b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_3, \ldots, X_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die Dualzahl $\mathfrak{I}(X_3)\mathfrak{I}(X_2)\mathfrak{I}(X_1)\mathfrak{I}(X_0)$ durch 3 teilbar ist.

(c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_n, \ldots, X_0, Y_{n+1}, \ldots, Y_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die durch $\mathfrak{I}(X_n) \ldots \mathfrak{I}(X_0)$ gegebene Dualzahl um 1 kleiner ist als die durch $\mathfrak{I}(Y_{n+1}) \ldots \mathfrak{I}(Y_0)$ gegebene.

(d) Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Junktoren funktional vollständig sind.

(i) $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$

(ii) $\{sel, 0, 1\}$.

Dabei sei $sel(u, v, w) = v$, falls $u = 0$, und $sel(u, v, w) = w$, falls $u = 1$.

Aufgabe 8: 5 Punkte

(a) Beschreiben Sie, was eine korrekte Sequenz ist. Was ist eine korrekte Ableitungsregel für Sequenzen?

(b) Beweisen Sie (semantisch) die Korrektheit folgender Regeln:

(i)

$$(S \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(t) \rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}.$$

(ii)

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg\exists x \psi(x) \rightarrow \forall x \neg\psi(x)$.

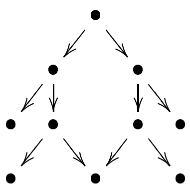
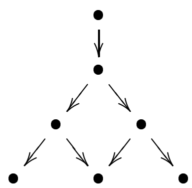
Aufgabe 9: 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ keine echten Substrukturen enthält.

(b) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass es keine τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, so dass $(\mathbb{N}, +, 0, 1) \subset \mathfrak{A} \subset (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

Aufgabe 10: 4 Punkte

$\mathfrak{A}$:  $\mathfrak{B}$: 

(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spieler I das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt?

(b) Finden Sie einen Satz ψ mit Quantorenrang m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 11: 3 Punkte

Untersuchen Sie für die unten angegebenen Tripel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, ob

(a) f ein Homomorphismus

(b) f ein Isomorphismus

(c) f eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ ist.

Dabei sei:

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, max, min)$
$\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$
$f(n) := \{0, \dots, n\}$

(ii) $\mathfrak{A} := (A, \cup, \cap)$ mit $A :=$ Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, max, min)$
$f(X) := |X|$

(iii) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, Q)$ mit $Q := \{(n, m) \ : \ n \text{ und } m \text{ sind teilerfremd } \}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, P)$, mit $P := \{p \ : \ p \text{ ist Primzahl } \}$.
$f(n, m) := (n \cdot m)! + 1$

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 00/01

Probeklausur
Mathematische Logik

Aufgabe 1: 8 Punkte

ψ, φ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) *(i)* $\psi \to (\varphi \to \psi)$ ist eine Tautologie.

(ii) $\psi \to (\varphi \to \theta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \to \theta$.

(iii) $((\psi \to \varphi) \to \psi) \to \varphi$ ist eine Tautologie.

(iv) $(\psi \vee \varphi) \to \theta \equiv (\psi \to \theta) \vee (\varphi \to \theta)$.

(b) Sei $maj_n(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} 1 & |\{i \ : \ X_i = 1\}| \geq \frac{n}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_1, \dots, X_n)$ an, welche maj_n definiert.

(c) Welche der folgenden Systeme sind funktional vollständig: $(maj_2, \neg)$, $(\neg maj_3, 1)$, $(maj_3, 0, 1)$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

(a) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man diesen Satz, um nachzuweisen, dass eine Modellklasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist?

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K} := \{(A, E) \ : \ E$ ist Äquivalenzrelation auf A, so dass jede Äquivalenzklasse entweder höchstens 13 oder aber unendlich viele Elemente hat $\}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3: 8 Punkte

(a) Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass

(i) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.

(ii) eine Regel

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$$

korrekt ist.

(b) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig, welche Regeln korrekt. Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$, wenn c nicht in φ vorkommt.

(ii) $\varphi(c), \varphi(d), \forall z \forall z' (\neg\varphi(z) \vee z = z' \vee \neg\varphi(z')) \Rightarrow c = d$.

(iii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei
$\Gamma := \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y(x = y \vee Exy \vee Eyx), \forall x \forall y \forall z(Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)\}$ und
$\Delta := \{\forall x \forall y\ (Exy \vee Eyx), \neg \exists x \exists y(Exy \wedge Eyx)\}$.

(iv)

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}.$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg \exists x \psi(x) \rightarrow \forall x \neg \psi(x)$.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Sei f ein zweistelliges, g ein einstelliges Funktionssymbol und P, E seien zweistellige Relationssymbole. Weiterhin sei $\psi := Pxx \wedge \forall x\ ((\exists y\ Pyx \wedge \exists y\ Pxy) \wedge \forall z\ Ezy)$

(a) Bilden Sie $\psi[x/fyy, y/gx]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 5: 6 Punkte

(a) Seien ψ in KNF und φ in DNF aussagenlogische Formeln. Erläutern Sie wie man mittels Resolution zeigt, dass

(i) ψ unerfüllbar ist.

(ii) φ allgemeingültig ist.

(iii) $\psi \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

$$\psi \equiv \neg((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow X_3) \vee \neg(X_1 \vee X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee \neg(X_1 \rightarrow X_2)$$

allgemeingültig ist.

(c) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

$$(\neg X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_3 \rightarrow X_2) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_1 \wedge X_3 \rightarrow X_5) \models X_2 \vee \neg X_4 \vee X_5.$$

Aufgabe 6: 6 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 =$ Die Klasse aller diskreten linearen Ordnungen $(A, <)$ ohne kleinstes und grösstes Element, z.B. $(\mathbb{Z}, <)$.

$K_2 =$ Die Klasse aller abzählbaren Strukturen in $\mathcal{K}_1$.

$K_3 =$ Die Klasse aller Strukturen, die zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorph sind.

$K_4 =$ Die Klasse aller partiellen Ordnungen $(A,<)$, so dass es zu jedem $a \in A$ höchstens 4 Elemente $b \in A$ gibt mit $a < b$.

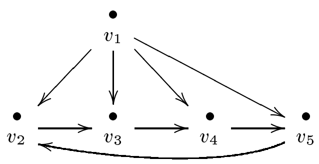
$K_5 =$ Die Klasse aller partiellen Ordnungen, welche zu $(\text{Pot}\{1,,2,3\},\subseteq)$ isomorph sind.

$K_6 =$ Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.

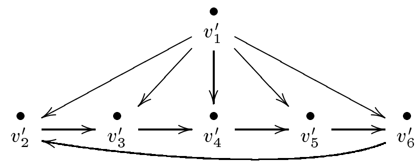
Aufgabe 7: Punkte

Gegeben seien folgende Transitionssysteme:

$\mathcal{K} :=$



$\mathcal{K}' :=$



(a) Sind $\mathcal{K}, v_1$ und $\mathcal{K}', v_1'$ bisimilar? Wenn ja, geben Sie eine Bisimulation an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

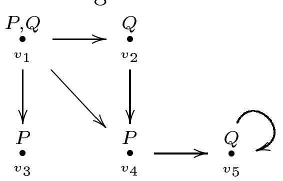
(b) Welches ist das kleinste m, so daß Spieler I das Spiel $G_m(\mathcal{K},\mathcal{K}')$ gewinnt?

(c) Geben Sie Formeln $\varphi \in$ ML und $\psi \in$ FO mit $\text{qr}(\psi) = 3$ an, so daß $\mathcal{K}, v_1 \models \varphi$ und $\mathcal{K}', v_1' \not\models \varphi$, bzw. $\mathcal{K} \models \psi[v_1]$ und $\mathcal{K}' \not\models \psi[v_1']$ oder begründen Sie, warum solche Formeln nicht existieren.

Aufgabe 8: Punkte

(a) Sei $A := \{a,b\}$ eine Menge von Aktionen und $I := \{P,Q\}$ eine Menge atomarer Eigenschaften. Geben Sie jeweils in FO, RA und ML eine Formel an, die in Kripke-Strukturen mit Aktionen aus A und atomaren Eigenschaften aus I die Menge aller Knoten definiert, die keine Nachfolger haben oder aber durch einen ab-Pfad mit solchen verbunden sind.

(b) Sei $\mathcal{K}$ folgendes Transitionssystem:



Geben Sie für jede der folgenden Formeln die Knoten an, an denen die Formel gilt:

(i) $\varphi(x) := \forall y(Exy \rightarrow ((Px \leftrightarrow Py) \wedge (Qx \leftrightarrow Qy)))$.

(ii) $\pi_1[(\pi_{1,4}\sigma_{2=3}(E \times E)) - P \times P]$

(iii) $\Box(\neg P \wedge \neg Q) \vee \Diamond\Box Q$

Aufgabe 9: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{a,b\}, P^{\mathfrak{A}})$, wobei P zweistellig mit $P^{\mathfrak{A}} := \{(a,b),(b,b),(a,a)\}$, sowie $\psi := \exists x(\forall y Pyx \wedge \exists y \neg Pxy)$ gegeben.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, A. Blumensath

WS 2001/02

Probeklausur Mathematische Logik

Dies ist eine Auswahlklausur. Es wird nicht erwartet, daß sämtliche Aufgaben in zwei Stunden gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz und erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, daß die Formel

$$\big((X \land Y) \to (U \lor V)\big) \land (Y \to X) \land (U \land Y \to 0) \land (V \land Y \to 0) \land Y$$

unerfüllbar ist.

(c) Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob für zwei AL-Formeln φ und ψ gilt $\varphi \models \psi$?

(d) Verwenden Sie die Methode aus (c), um zu zeigen, daß

$$((Z \land V) \to X) \land (V \to U) \land (\neg V \to \neg Y) \land (\neg Z \to U) \models Y \to (U \lor X).$$

Aufgabe 2

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Erleutern Sie kurz in eigenen Worten, welche Bedeutung folgende Beziehungen haben:

$$\mathfrak{A} \models \varphi, \qquad \Phi \models \varphi, \qquad \Phi \vdash \varphi.$$

Sind alle drei Bedingungen stets erfüllt, wenn φ allgemeingültig ist? Sind sie stets falsch, wenn φ unerfüllbar ist?

(b) Geben Sie eine Formulierung des Vollständigkeitssatzes für FO an.

(c) Geben Sie eine Formulierung des Kompaktheitssatzes für FO an.

(d) Erläutern Sie, wie der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

Aufgabe 3

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $\quad \mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, \cdot, \leq)$,

$$f(x) := \begin{cases} 2^m 3^n k & \text{für } x = 2^n 3^m k,\ 2 \nmid k,\ 3 \nmid k, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq, R^{\mathfrak{A}})$ mit

$$R^{\mathfrak{A}} := \{\, (v, w) \mid \ v \text{ und } w \text{ enthalten gleichviele Einsen} \,\},$$

$\mathfrak{B} := (P, \subseteq, R^{\mathfrak{B}})$, wobei $R^{\mathfrak{B}} := \{\, (X, Y) \mid |X| = |Y| \,\}$ und P die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist,
$f(a_0 \cdots a_{n-1}) := \{\, i \mid a_i = 1 \,\}$.

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle endlichen Substrukturen der Struktur $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), f)$ an, wobei

$$f(X) := X \setminus \{\min X\}.$$

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(a) $$\frac{\Gamma,\ \psi,\ \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \psi,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \psi \oplus \varphi}$$ ($\oplus$ ist das exklusive Oder.)

(b) $$\frac{\Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma,\ \psi \oplus \varphi \Rightarrow \Delta}$$

(c) $$\frac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Aufgabe 5

Sei f ein zweistelliges Funktionsymbol und c und d Konstanten. Betrachten Sie die Formeln über der Signatur $\{f, c, d\}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &:= \forall x \forall y \forall z (fxfyz = ffxyz) \\
\varphi_1 &:= \forall x (fxc = x \wedge fcx = x) \\
\varphi_1' &:= \forall x (fxd = x \wedge fdx = x) \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y (fxy = c \wedge fyx = c) \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y (fxy = fyx)
\end{aligned}$$

Welche der folgenden Formelmengen sind erfüllbar?

(a) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$,

(b) $\{\varphi_0, \varphi_1, \neg\varphi_2\}$,

(c) $\{\varphi_0, \varphi_1, \neg\varphi_3\}$,

(d) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, c \neq d\}$.

Aufgabe 6

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[(X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Y \rightarrow \neg Z)] \leftrightarrow [\neg(\neg X \rightarrow (Y \wedge Z)) \vee \neg(Y \leftrightarrow Z)]$$

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar? Ist sie ein Unendlichkeitsaxiom?

$$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x (Rxx \rightarrow \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx))$$

(c) Kann eine Formel gleichzeitig eine Tautologie und ein Unendlichkeitsaxiom sein?

Aufgabe 7

Seien R und E zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Gegeben sei $\varphi := \exists y[((\forall z Rzx) \rightarrow Rxy) \wedge \forall x(\neg Exz \vee Exy)]$. Berechnen Sie $\varphi[x/fxy,\ y/gz,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie

$$\psi := \exists y \forall x \neg Rxy \wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg \exists z (Rxz \wedge \neg z = y))$$

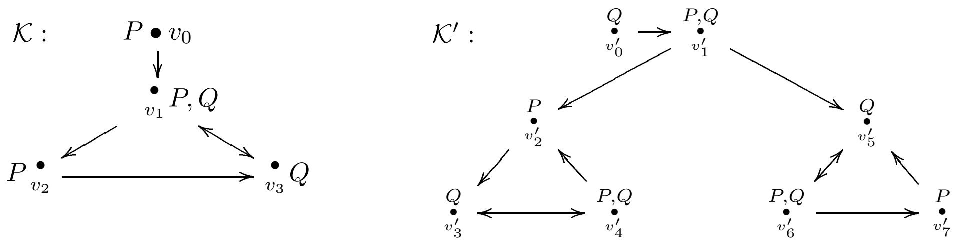
in eine äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform um.

(c) Bilden Sie die Skolem-Normalform ψ'' von ψ'.

(d) Geben Sie je ein Modell für ψ' und ψ'' an.

Aufgabe 8

Betrachten Sie die Transitionssysteme



(a) Beweisen Sie, daß $\mathcal{K}, v_0$ und $\mathcal{K}', v'_0$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so daß der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen Satz φ mit minimalem Quantorenrang an, so daß $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, v_0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, v_0$ bisimilar ist?

Aufgabe 9

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(Exy \wedge \forall z(Eyz \rightarrow Qz))$

(ii) $\pi_1((\pi_{1,4}\sigma_{2=3}(E \times E)) - (P \times Q))$

(iii) $\mathbf{A}(P\mathbf{U}(\mathbf{EG}Q))$

(iv) $\Box((P \wedge \Diamond\Diamond Q) \vee (P \wedge Q))$

(b) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA an, welche die Menge $\{v_2', v_5'\}$ definieren, oder begründen Sie, wieso solche Formeln nicht existieren.

Aufgabe 10

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolgern besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens einen Vorgänger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, von denen aus alle Pfade nach höchsens 3 Kanten enden.

(d) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthälten, an welchen P gilt.

Aufgabe 11

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{ (A, f) \mid f \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv} \}$,

(b) $\mathcal{K}_2 := \{ (A, f) \in \mathcal{K}_1 \mid A \text{ endlich} \}$,

(c) $\mathcal{K}_3 := \{ (A, f) \mid (A, f) \cong (\mathbb{N}, s) \}$ wobei $s(n) := n + 1$,

(d) $\mathcal{K}_4 := \{ (A, f) \mid A \text{ überabzählbar} \}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \{ (A, f) \mid f^{-1}(a) \text{ ist unendlich für ein } a \in A \}$,

(f) $\mathcal{K}_6 := \{ (A, f) \mid |\{ f^n(a) \mid n \in \mathbb{N} \}| \leq 753 \text{ für alle } a \in A \}$,

(g) $\mathcal{K}_7 := \{ (A, f) \in \mathcal{K}_6 \mid A \text{ endlich} \}$.

Aufgabe 12

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller gerichteter Graph, in welchen jeder Knoten entweder keine oder unendlich viele ausgehende Kanten hat.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{K}$ FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.
Hinweis. Benutzen Sie den Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé.

(b) Beweisen Sie, daß die Klasse $\mathcal{K}'$ aller Graphen aus $\mathcal{K}$, welche keine unendlichen Pfade enthalten, nicht FO-axiomatisierbar ist.
Hinweis. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, A. Blumensath

WS 2002/03

Probeklausur Mathematische Logik

Dies ist eine Auswahlklausur. Es wird nicht erwartet, daß sämtliche Aufgaben in zwei Stunden gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie eine aussagenlogische Formel

$$\varphi(X_n, \dots, X_0,\ Y_n, \dots, Y_0,\ Z_{n+1}, \dots, Z_0),$$

die besagt, daß die Summe der in $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ binär kodierten Zahlen gleich $\bar{Z}$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \lor Z) \land ((X \land Y) \to Z) \land (Z \to X) \land (Y \to \neg X) \land (1 \to Y)$$

(c) Zwei Formeln φ und ψ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, daß φ und ψ einander ausschließen?

(d) Zeigen Sie, daß

$$\varphi := (Y \to (X \lor Z)) \land (X \to U) \land (U \to (Y \lor Z)) \land (Y \lor U)$$
und $$\psi := ((U \land Z) \to Y) \land \neg(U \land X) \land (Z \to X)$$

einander ausschließen.

Aufgabe 2

Seien $\varphi \in \mathrm{FO}$ und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ keine Tautologie ist.

(b) $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

(c) $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Aufgabe 3

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \leq)$, $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $f(n) := 2^n$.

(ii) $\mathfrak{A} := \big(\mathscr{P}(\mathbb{N}), R^{\mathfrak{A}}\big)$ mit $R^{\mathfrak{A}} := \subsetneq$,
$\mathfrak{B} := \big(\mathbb{N}, R^{\mathfrak{B}}\big)$ mit $R^{\mathfrak{B}} := <$,
$f(X) := \min X$ (wobei $f(\emptyset) := 0$).

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle Substrukturen der Struktur $(\mathbb{N}, +)$ an.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(a) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi(x)}$ wobei *keine* weitere Bedingung an c gestellt wird.

(b) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \psi \qquad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \leftrightarrow \psi}$

(c) $\dfrac{\Gamma,\ \exists x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \forall x\varphi \Rightarrow \Delta}$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &:= \forall x(\neg x < x) \wedge \forall x\forall y\forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)\\
&\qquad\qquad \wedge \forall x\forall y(x < y \vee x = y \vee y < x),\\
\varphi_1 &:= \forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)),\\
\varphi_2 &:= \forall x\exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)),\\
\varphi_3 &:= \forall x\exists y(y < x \wedge \neg\exists z(y < z \wedge z < x)),\\
\varphi_4 &:= \forall x\exists y\exists z(z < x \wedge x < y).
\end{aligned}$$

Welche der folgenden Formelmengen sind erfüllbar?

(a) $\{\varphi_0, \varphi_1\}$,

(b) $\{\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3\}$,

(c) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$,

(d) $\{\varphi_0, \neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \varphi_4\}$.

Aufgabe 6

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$((X \to \neg Y) \to (Z \wedge Y)) \wedge (Z \to \neg((Y \wedge \neg X) \vee (\neg Y \wedge X)))$$

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[\forall x\exists yRxy \wedge \forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Rxz \to y = z)] \to \exists xRxx$$

Aufgabe 7

Seien R und E zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Gegeben sei $\varphi := \forall y[\exists z(Rxz \wedge \neg Ryz) \to \forall x(Rfxyz \wedge Exgy)]$. Berechnen Sie $\varphi[x/fxy,\ y/gz,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie

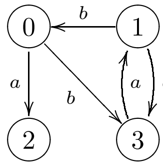
$$\psi := [\forall x\exists yRxy \wedge \forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Rxz \to y = z)] \to \forall xRxfyx$$

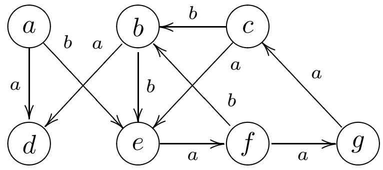
in eine äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform um.

(c) Bilden Sie die Skolem-Normalform ψ'' von ψ'.

Aufgabe 8

Betrachten Sie die Transitionssysteme

$\mathcal{K}$: 

$\mathcal{K}'$: 

(a) Beweisen Sie, daß $\mathcal{K}, 0$ und $\mathcal{K}', a$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so daß der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen Satz φ mit minimalem Quantorenrang an, so daß $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilar ist?

Aufgabe 9

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formlen definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(E_a yx \land \forall z \neg E_b yz)$

(ii) $\pi_1(\sigma_{2=3}\sigma_{4=5}(E_a \times E_b \times E_b) - \sigma_{1=6}\sigma_{2=3}\sigma_{4=5}(E_a \times E_b \times E_b))$

(iii) $[b]0 \land \langle a \rangle \langle a \rangle 1$

(b) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA an, welche die Menge $\{c, f\}$ definieren.

Aufgabe 10

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, an deren sämtlichen Nachfolgern P gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, so daß es einen Pfad der Länge höchstens 3 von v zu einem Knoten gibt, welcher keinen Nachfolger besitzt.

(c) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(d) Die Menge aller $v \in V$, so daß alle in v beginnenden Pfade nur Knoten enthalten, an welchen Q gilt.

Aufgabe 11

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein ensprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der ungerichteten Graphen.

(b) Die Klasse der ungerichteten, endlichen Graphen.

(c) Die Klasse der ungerichteten, unendlichen Graphen.

(d) Die Klasse der ungerichteten, zykelfreien Graphen.

(e) Die Klasse der ungerichteten Graphen, so daß zu je zwei Knoten x und y ein Zykel existiert, welcher beide Knoten enthält.

Aufgabe 12

(a) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik (beide Aussagen).

(b) Beweisen Sie jeweils die einfache Richtung der Aussagen.

(c) Zeigen Sie, daß beide Aussagen äquivalent sind.

Aufgabe 13

Skizzieren Sie je einen Algorithmus, welcher zu zwei gegebenen Formeln

(a) der Modallogik;

(b) der Prädikatenlogik;

entscheidet, ob diese logisch äquivalent sind, oder begründen Sie, wieso ein solcher Algorithmus nicht existiert.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

WS 2003/04

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg X, Y\}, \{X, \neg Y\}, \{X, Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y, Z\}, \{X, Y, \neg Z\}, \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}\}.$$

(b) Verwenden Sie die Resolutionsmethode um festzustellen, ob folgende Implikation allgemeingültig ist:

$$\big((X \land Y \to Z \lor Q) \land (X \land Q \to Y \lor Z) \land (X \lor Q)\big) \to \big(Y \to Z \lor Q\big).$$

(c) Sei K eine endliche Klauselmenge, in der jede Klausel höchstens ein negiertes Literal besitzt. Zeigen Sie, dass man in Polynomzeit entscheiden kann, ob K erfüllbar ist.

Aufgabe 2 8 Punkte

(a) Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_n(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0)$, die besagt, dass bei der Addition der Binärzahlen $X_n \dots X_0$ und $Y_n \dots Y_0$ kein Überlauf entsteht.

(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i)	$(X \to Y) \land (X \to \neg Z)$;	(iii)	$Y \lor ((X \to Y) \land (X \to Z))$;
(ii)	$(X \to Y) \lor (X \to \neg Z)$;	(iv)	$Y \land ((X \to Y) \lor (X \to Z))$.

Aufgabe 3 12 Punkte

Seien φ und ψ zwei aussagenlogische Formeln ohne gemeinsame Variablen. Beweisen Sie, dass $\varphi \models \psi$ genau dann gilt, wenn φ unerfüllbar oder ψ eine Tautologie ist.

Aufgabe 4 12 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an.

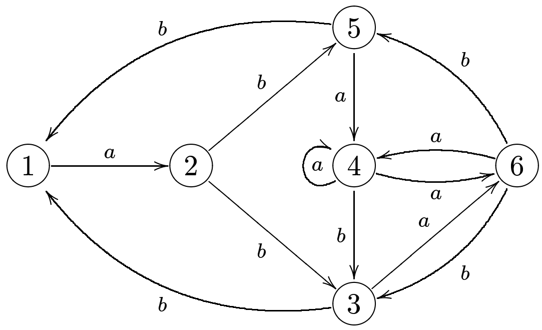
(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an, oder beweisen Sie, dass es einen solchen nicht gibt.

Aufgabe 5 8 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, E)$ mit $E = \{(0,0), (1,0)\}$. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\varphi = \forall x(Exx \to \exists y(Eyx \land x \neq y))$ an, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler.

Aufgabe 6 20 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}, v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$, und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

(e) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA^+ an, welche die Menge $\{1, 3, 5\}$ definieren.

Aufgabe 7 8 Punkte

Wir betrachten folgende linear geordnete Strukturen:

(i) $\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3\}, <)$; (iii) $\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{Z}, <)$;

(ii) $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$; (iv) $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$.

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 8 12 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der Äquivalenzstrukturen mit genau drei Äquivalenzklassen.

(b) Die Klasse der transitiven ungerichteten Graphen, die nicht zusammenhängend sind.

(c) Die Klasse der abzählbaren diskreten linearen Ordnungen.

(d) Die Klasse der ungerichteten Graphen, in denen alle Knoten ungeraden Grad haben.

Aufgabe 9 8 Punkte

(a) Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass

(i) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.

(ii) eine Regel $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ korrekt ist.

(b) Formulieren Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik (beide Aussagen). Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

WS 2004/05

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{X, Y, Z\}, \{\neg X, Y, \neg Z\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg X, Y, Z\}, \{X, \neg Z\}\}.$$

(b) Verwenden Sie die Resolutionsmethode um festzustellen, ob folgende Folgerung gilt:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \models (A \rightarrow B) \rightarrow C.$$

(c) Zwei Formeln φ und ψ *schliessen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, dass φ und ψ einander ausschliessen?

Aufgabe 2 8 Punkte

Sei $\tau = \{X_0, X_1, \dots\}$ eine Menge aussagenlogischer Variablen und Φ eine Formelmenge über τ, so dass für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}(\tau)$ entweder $\Phi \cup \{\varphi\}$ oder $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist. Beweisen Sie, dass Φ dann genau ein Modell $\mathfrak{J} : \tau \rightarrow \{0, 1\}$ besitzt.

Aufgabe 3 12 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq)$ der binäre Baum mit der Vorgängerrelation ($x \preceq y$:gdw $y = xz$ für ein z) und $\mathfrak{B} := (\mathscr{P}(\{0,1\}), \subseteq)$. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(b) ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(c) eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$;

(d) ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 4 8 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, +, 1)$, in der $+$ als Addition (mod 2) interpretiert ist. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\psi := \exists x \forall y (x + x = y + 1 \land \exists z (y + z = x))$ an, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler.

Aufgabe 5 6 Punkte

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und R eine binäre Relation. Gegeben sei die Formel

$$\varphi := \exists z \big(\forall x \forall y (Rxy \land Ryz) \rightarrow fxz = y\big).$$

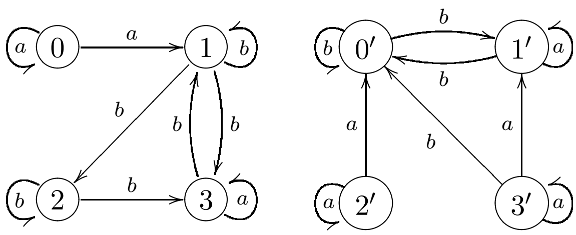
(a) Berechnen Sie $\varphi[x/fyz,\ y/z,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie φ in Pränex-Normalform um.

(c) Formen Sie φ in Skolem-Normalform um.

Aufgabe 6 12 Punkte

Wir betrachten die Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}', v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}', v$, und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}', v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 7 8 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Relationen an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x, y) := \forall z(E_b xz \rightarrow E_b zy) \wedge \neg\exists z(E_a xz \wedge E_a zy)$;

(ii) $[b]\langle b\rangle\langle a\rangle 1 \wedge (\langle a\rangle 1 \rightarrow [a][b]\langle b\rangle 1)$.

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{0, 1, 2\}$ definieren.

Aufgabe 8 8 Punkte

Die Arithmetik ist die Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot)$. Drücken Sie folgende Sachverhalte in der Prädikatenlogik aus:

(i) $x \leq y$. (ii) $x \mid y$. (iii) x ist eine Primzahl;

(iv) Die Binärdarstellungen von x und y haben dieselbe Länge.

Aufgabe 9 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolgern besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthälten, an welchen P gilt.

Aufgabe 10 12 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{ (A, f) \mid f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$,

(b) $\mathcal{K}_3 := \{ (A, f) \mid (A, f) \cong (\mathbb{N}, s) \}$ wobei $s(n) := n + 1\}$,

(c) $\mathcal{K}_4 := \{ (A, f) \mid A$ überabzählbar $\}$,

(d) $\mathcal{K}_5 := \{ (A, f) \mid f^{-1}(a)$ ist unendlich für ein $a \in A \}$.

Aufgabe 11 6 Punkte

Beweisen Sie, dass die Theorie der unendlichen Mengen vollständig ist.

Aufgabe 12 8 Punkte

In welchen der folgenden Fällen ist entscheidbar, ob $\varphi \models \psi$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\varphi, \psi \in$ AL; (c) $\varphi, \psi \in$ FO;

(b) $\varphi, \psi \in$ ML; (d) $\varphi \in$ ML und $\psi \in$ FO.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow, Ł. Kaiser

WS 2005/06

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz und erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die Formel

$$\big((X \land Y) \to (U \lor V)\big) \land (Y \to X) \land (U \land Y \to 0) \land (V \land Y \to 0) \land Y$$

unerfüllbar ist.

(c) Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob für zwei AL-Formeln φ und ψ die Beziehung $\varphi \models \psi$ gilt?

(d) Verwenden Sie die Methode aus (c), um zu zeigen, dass

$$((Z \land V) \to X) \land (V \to U) \land (\neg V \to \neg Y) \land (\neg Z \to U) \models Y \to (U \lor X).$$

Aufgabe 2

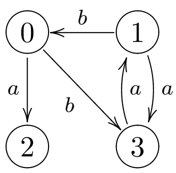
(a) Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_n(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0)$, die besagt, dass bei der Addition der Binärzahlen $X_n \dots X_0$ und $Y_n \dots Y_0$ kein Überlauf entsteht.

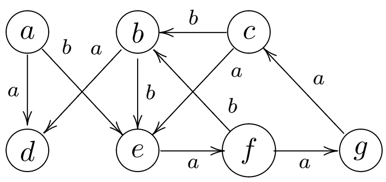
(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(X \to Y) \land (X \to \neg Z)$; (iii) $Y \lor ((X \to Y) \land (X \to Z))$;
(ii) $(X \to Y) \lor (X \to \neg Z)$; (iv) $Y \land ((X \to Y) \lor (X \to Z))$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Transitionssysteme

$\mathcal{K}$:


$\mathcal{K}'$:


(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{K}, 0$ und $\mathcal{K}', a$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so dass der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen FO-Satz φ mit minimalem Quantorenrang an, so dass $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilar ist?

Aufgabe 4

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(E_a yx \wedge \forall z \neg E_b yz)$

(ii) $\psi := [b]0 \wedge \langle a\rangle\langle a\rangle 1$

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{c, f\}$ definieren.

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, an deren sämtlichen Nachfolgern P gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, so dass es einen Pfad der Länge höchstens 3 von v zu einem Knoten gibt, welcher keinen Nachfolger besitzt.

(c) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(d) Die Menge aller $v \in V$, so dass alle in v beginnenden Pfade nur Knoten enthalten, an welchen Q gilt.

Aufgabe 6

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $\quad \mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, \cdot, \leq)$,

$$f(x) := \begin{cases} 2^m 3^n k & \text{für } x = 2^n 3^m k,\ 2 \nmid k,\ 3 \nmid k, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq, R^{\mathfrak{A}})$ mit

$$R^{\mathfrak{A}} := \{(v, w) \ : \ v \text{ und } w \text{ enthalten gleichviele Einsen}\},$$

$\mathfrak{B} := (P, \subseteq, R^{\mathfrak{B}})$, wobei $R^{\mathfrak{B}} := \{(X, Y) \ : \ |X| = |Y|\}$ und P die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist,
$f(a_0 \cdots a_{n-1}) := \{i \ : \ a_i = 1\}$.

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle endlichen Substrukturen der Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), f)$ an, wobei

$$f(X) := X \setminus \{\min X\}.$$

Aufgabe 7

Sei f ein zweistelliges, g ein einstelliges Funktionssymbol und seien P, E zweistellige Relationssymbole. Weiterhin sei $\psi := Pxx \wedge \forall x\ ((\exists y\ Pyx \wedge \exists y\ Pxy) \wedge \forall z\ Ezy)$

1. Bilden Sie $\psi[x/fyy, y/gx]$.
2. Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.
3. Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 8

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[(X \to (Y \vee Z)) \wedge (Y \to \neg Z)] \leftrightarrow [\neg(\neg X \to (Y \wedge Z)) \vee \neg(Y \leftrightarrow Z)]$$

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar? Ist sie ein Unendlichkeitsaxiom?

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x(Rxx \to \forall y(Rxy \to \neg Ryx))$$

(c) Kann eine Formel gleichzeitig eine Tautologie und ein Unendlichkeitsaxiom sein?

Aufgabe 9

1. Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass
   a) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.
   b) eine Regel $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ korrekt ist.
2. Welche der folgenden Sequenzen sind gültig, welche Regeln korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.
   a) $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$, wenn c nicht in φ vorkommt.
   b) $\varphi(c), \varphi(d), \forall z \forall z'(\neg\varphi(z) \vee z = z' \vee \neg\varphi(z')) \Rightarrow c = d$.
   c) $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei
   $\Gamma := \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y(x = y \vee Exy \vee Eyx), \forall x \forall y \forall z(Exy \wedge Eyz \to Exz)\}$ und
   $\Delta := \{\forall x \forall y\ (Exy \vee Eyx), \neg\exists x \exists y(Exy \wedge Eyx)\}$.
   d) $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$.
3. Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:
   a) $((\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi) \to \psi$.
   b) $(\neg\exists x \psi(x)) \to (\forall x \neg\psi(x))$.

Aufgabe 10

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \ : \ f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$,

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \in \mathcal{K}_1 \ : \ A$ endlich$\}$,

(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \ : \ (A, f) \cong (\mathbb{N}, s)\}$ wobei $s(n) := n + 1$,

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \ : \ A$ überabzählbar$\}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \big\{(A, f) \ : \ f^{-1}(a)$ ist unendlich für ein $a \in A\big\}$,

(f) $\mathcal{K}_6 := \{(A, f) \ : \ |\{f^n(a) \ : \ n \in \mathbb{N}\}| \leq 753$ für alle $a \in A\}$,

(g) $\mathcal{K}_7 := \{(A, f) \in \mathcal{K}_6 \ : \ A$ endlich$\}$.

Aufgabe 1

12 Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die Formel

$$(U \vee Y) \wedge (U \wedge Z \rightarrow Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Y \rightarrow 0)$$

unerfüllbar ist.

(b) Seien Γ, Δ endliche Mengen von aussagenlogischen Formeln, und seien o.B.d.A. die Formeln aus Γ in KNF und die Formeln aus Δ in DNF gegeben. Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob die aussagenlogische Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist?

(c) Verwenden Sie die Methode aus (b), um zu zeigen, dass die folgende Sequenz gültig ist:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow 0) \wedge (U \wedge Z \rightarrow Y) \wedge (X \vee Y \vee Z) \Rightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge \neg U)$$

Aufgabe 2

6 Punkte

(a) Gibt es eine modallogische Formel φ, so dass für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle v gilt: $\mathcal{K}, v \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{K}$ ein Baum mit Wurzel v ist?

(b) Sei $\Phi_\infty := \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ (d.h. alle Modelle von Φ_∞ sind unendlich). Zeigen oder widerlegen Sie, dass für ein beliebiges Unendlichkeitsaxiom ψ die Menge $\Phi_\infty \cup \{\neg\psi\}$ immer unerfüllbar ist.

Aufgabe 3

8 Punkte

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche unentscheidbar? Begründen Sie ihre Antwort knapp.

(a) Das Erfüllbarkeitsproblem der Modallogik.

(b) Das Auswertungsproblem für FO-Formeln auf endlichen Strukturen.

(c) Die Menge aller modallogischen Formeln, die ein Baummodell haben.

(d) Die Menge aller $\psi \in$ FO, so dass $\emptyset \Rightarrow \psi$ eine gültige Sequenz ist.

Aufgabe 4

10 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{a, b\}^*, p : (x \mapsto ax), s : (x \mapsto xb))$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f : (n \mapsto 2n), g : (n \mapsto 3n))$, d.h. p fügt ein a am Anfang des Wortes ein, und s hängt ein b an das Ende des Wortes an. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein nicht-trivialer Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(b) ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$;

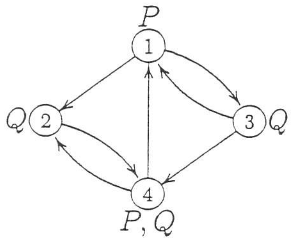
(c) ein nicht-trivialer Automorphismus von $\mathfrak{B}$.

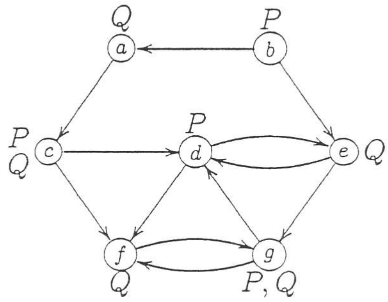
(d) Sei μ eine injektive Abbildung von $b\{a, b\}^*a$ auf die Menge $\{n > 1 : 2 \nmid n \wedge 3 \nmid n\}$. Zeigen Sie, dass man μ zu einer Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ fortsetzen kann.

Aufgabe 5

16 Punkte

Seien zwei Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ mit atomaren Eigenschaften P und Q wie folgt gegeben:

$\mathcal{K} :=$ 

$\mathcal{K}' :=$ 

(a) Sind $\mathcal{K}, 1$ und $\mathcal{K}', b$ bisimilar? Geben Sie gegebenenfalls eine Bisimulation an.

(b) Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{ML}$ mit $\mathcal{K}, 2 \models \varphi$, $\mathcal{K}', a \not\models \varphi$ an oder begründen Sie, warum eine solche Formel nicht existiert.

(c) Welches ist das kleinste m, so dass der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt?

(d) Geben Sie einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}$ mit minimalem Quantorenrang an, so dass $\mathcal{K} \models \psi$ und $\mathcal{K}' \models \neg\psi$.

(e) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 1$ bisimilare Baumstruktur.

(f) Gibt es eine *endliche* Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 1$ bisimilar ist?

Aufgabe 6

12 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus Aufgabe 5.

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln die Knoten an, an denen die Formel gilt:

(i) $\varphi_1(x) := Qx \wedge \exists y(Exy \wedge Qy \wedge \exists z(Eyz \wedge Pz \wedge x = z))$

(ii) $\varphi_2 := \Box P \wedge Q \wedge \Diamond\Diamond\Diamond(P \wedge Q)$

(iii) $\varphi_3 := \mathrm{A}(P\, \mathrm{U}\, \mathrm{A}(Q\, \mathrm{U}\, (P \wedge Q)))$

(b) Geben Sie Formeln in FO und ML an, welche die Menge $\{b, g\}$ definieren, oder begründen Sie, weshalb solche Formeln nicht existieren.

(c) Geben Sie eine CTL-Formel an, welche in einem beliebigen Transitionssystem $\mathcal{K}$ mit Zustand v ausdrückt, dass es keinen Pfad von v aus gibt, auf dem irgendwann P aber danach nie mehr Q gilt. Geben Sie eine äquivalente Formel in FO an, oder begründen Sie, weshalb eine solche nicht existiert.

Aufgabe 7

8 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Formeln für alle $n \geq 1$ Tautologien sind.

(a) $(X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow (X_3 \rightarrow \ldots (X_{n-1} \rightarrow X_n) \ldots))) \leftrightarrow ((X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \rightarrow X_n)$

(b) $(\bigvee_{i=1}^{n}(X_i \rightarrow Y_i)) \rightarrow ((\bigwedge_{i=1}^{n} X_i) \rightarrow (\bigwedge_{i=1}^{n} Y_i))$

Aufgabe 8 6 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

$$\text{(a)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \vartheta}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}$$

Aufgabe 9 10 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.
Hinweis zu (d) und (e): Wenden Sie den Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé auf geeignete Bäume an.

(a) $\mathcal{K}_a := \{(A, \circ) : (A, \circ) \text{ ist eine endliche Gruppe}\}$

(b) $\mathcal{K}_b := \{(A, \circ) : (A, \circ) \text{ ist eine unendliche Gruppe}\}$

(c) $\mathcal{K}_c := \{(A, \circ) : (A, \circ) \text{ ist eine Gruppe, die eine zu } (\mathbb{R}, +) \text{ isomorphe Untergruppe enthält}\}$

(d) $\mathcal{K}_d := \{(V, E) : (V, E) \text{ ist ein gerichteter Graph, der keine unendlichen Pfade enthält}\}$

(e) Ein gerichteter Graph heißt *unendlich verzweigt*, wenn jeder Knoten entweder keine oder unendlich viele ausgehende Kanten hat. Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K}_e$ der unendlich verzweigten, gerichteten Graphen FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 10 8 Punkte

Wir betrachten folgende Äquivalenzstrukturen:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}_1 := (\mathbb{N}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_1} := \{(n,m) \ : \ n = m\} \\
\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Z}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_2} := \{(x,y) \ : \ 3 | (x-y)\} = \{(x,y) \ : \ x \equiv y \pmod 3\} \\
\mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_3} := \{(A,B) \ : \ |A| = |B|\} \\
\mathfrak{A}_4 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_4} := \{(A,B) \ : \ \max\{a \in A\} = \max\{b \in B\}\}
\end{array}$$

wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichnet. Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \text{FO}$ an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 11 10 Punkte

(a) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik.

(b) Erläutern Sie, wie der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

(c) Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *torsionsfrei*, wenn $g^n \neq 1_G$ für alle Elemente $g \neq 1_G$ und alle $n > 0$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse der torsionsfreien Gruppen FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

Klausur Mathematische Logik

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
/10	/10	/10	/12	/5	/6	/6	/9	/7	/8	/10	/12	/10
Summe:												/115

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Jeder Teilnehmer darf sich *ein* A4 Blatt mit eigenen Notizen zusammenstellen und in der Klausur benutzen. Darüber hinaus ist *kein* Material (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Geben Sie dieses Deckblatt mit ab.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Jedem ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ ordnen wir eine Interpretation in folgender Weise zu: Zu jedem Paar $i < k$ von Knoten führen wir eine Variable X_{ik} ein, welche genau dann den Wert 1 erhält, wenn eine Kante zwischen i und k existiert.
Konstruieren Sie eine aussagenlogische Formel $\psi_{n,m}$, welche besagt, dass eine Menge von m Knoten existiert welche entweder alle untereinander durch eine Kante verbunden sind, oder alle nicht verbunden sind.

(b) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass jede endliche Teilmenge $X \subseteq V$ in zwei disjunkte unabhängige Mengen aufgeteilt werden kann. Zeigen Sie, dass die ganze Menge V ebenfalls eine solche Unterteilung besitzt. (Eine Menge $X \subseteq V$ ist unabhängig, wenn es keine Kante zwischen zwei Knoten aus X gibt.)

Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel unerfüllbar ist:

$$((Y \wedge X) \to \neg Z) \wedge (\neg Z \to Y) \wedge (X \to \neg Y) \wedge (1 \to X) \wedge (Y \vee \neg Z)$$

(b) Zwei Formeln φ und ψ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, dass φ und ψ einander ausschließen?

(c) Zeigen Sie mit der Methode aus (b), dass

$$\varphi := (Y \to (X \vee V)) \wedge (X \to Z) \wedge (Z \to (Y \vee V)) \wedge (Y \vee Z) \text{ und}$$
$$\psi := ((Z \wedge V) \to Y) \wedge \neg(Z \wedge X) \wedge (V \to X)$$

einander ausschließen.

Aufgabe 3 10 Punkte

Gegeben seien folgende $\{f, g, R\}$-Strukturen:

$$\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{A}}(w) := w0,\ g^{\mathfrak{A}}(w) := w1 \text{ und } R^{\mathfrak{A}} := \{(v,w) \ : \ \text{es gibt ein } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } vz = w\}.$$

$$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{B}}, g^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{B}}(n) := g^{\mathfrak{B}}(n) = n+1 \text{ und } R^{\mathfrak{B}} := \{(a,b) \ : \ a \le b\}.$$

$$\mathfrak{C} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{C}}, g^{\mathfrak{C}}, R^{\mathfrak{C}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{C}}(n) := 3n,\ g^{\mathfrak{C}}(n) := 5n \text{ und } R^{\mathfrak{C}} := \{(n,m) \ : \ n \text{ teilt } m\}.$$

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ an.

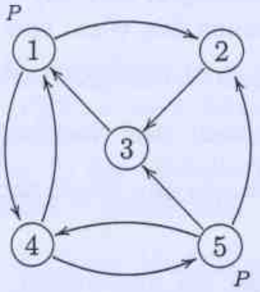
(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ an oder beweisen Sie, dass kein solcher existiert.

(c) Gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{A}$?

(d) Gibt es echte Substrukturen von $\mathfrak{A}$, die zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind? Wenn ja, wie viele? Gibt es auch Substrukturen von $\mathfrak{A}$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind?

Aufgabe 4 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = \big(\{1,2,3,4,5\}, E, P\big)$ das folgende Transitionssystem:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}, v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$ und geben sie eine ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 5 5 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Relationen an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(Eyx \land \forall z(Ezx \rightarrow z = y))$;

(ii) $\Diamond(\Box\Diamond P \lor \Diamond\Box P)$.

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{1,2,5\}$ definieren.

Aufgabe 6 6 Punkte

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und E ein zweistelliges Relationssymbol.

(a) Berechnen Sie $\varphi[x/fyz,\ y/fzz,\ z/x]$ für $\varphi := \exists x(Exz \land \forall z Eyz) \lor \forall z(Exz \land Ezy \land \exists y Exy)$.

(b) Wandeln Sie die Formel

$$\psi := \forall x \neg\big[(\exists y Exy) \rightarrow \exists x Exy\big]$$

in Pränex-Normalform um und bilden Sie die Skolem-Normalform von $\neg\psi$.

Aufgabe 7 6 Punkte

Wir betrachten folgende Strukturen über der Signatur $\{\subseteq\}$:

$$\mathfrak{A}_1 := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq); \qquad \mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq);$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq); \qquad \mathfrak{A}_4 := (\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\}, \subseteq);$$

wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist, und $\underline{n}$ die Menge $\{0,\ldots,n\}$ bezeichnet. Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \text{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 8 9 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem ohne Terminalknoten. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolger besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, von denen aus alle Pfade nach höchstens 3 Schritten einen Knoten erreichen, an dem Q gilt.

(d) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein unendlicher Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthält, an dem P gilt.

(e) Die Menge aller $v \in V$, welche auf einem Kreis der Länge ≥ 2 liegen.

Aufgabe 9 7 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

$$\text{(a)} \quad \frac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \psi \qquad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \leftrightarrow \psi}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\Gamma,\ \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta,\ \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\Gamma,\ \forall x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x\varphi \Rightarrow \Delta}$$

Aufgabe 10 8 Punkte

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}$ und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$.

(b) φ ist genau dann eine Tautologie, wenn $\{\neg\varphi\} \models \varphi$.

(c) Aus $\Phi \models \varphi$ folgt $\Phi' \models \varphi$ für alle Teilmengen $\Phi' \subseteq \Phi$.

(d) Gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann ist Φ unerfüllbar. Ist umgekehrt Φ unerfüllbar, dann gilt $\Phi \models \varphi$ für alle Formeln φ.

Aufgabe 11 10 Punkte

(a) Erläutern Sie, was es bedeutet, dass eine Relation in einer Struktur durch eine FO-Formel definierbar ist, und erklären Sie den Begriff der Termdefinierbarkeit.

(b) Welche der folgenden Mengen sind in $(\mathbb{N}, |, 2)$ definierbar? Hierbei gilt

$$k \mid n \ :\text{gdw}\ \ mk = n \text{ für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an oder beweisen Sie, dass keine solche existiert.

(i) $\{0, 1\}$

(ii) $\{2, 3\}$

(iii) Die Menge der Primzahlen.

(iv) Die Menge der Zweierpotenzen.

(c) Welche Elemente $c \in \mathbb{Q}$ sind in der Struktur $(\mathbb{Q}, +, 1)$ definierbar, welche termdefinierbar?

Aufgabe 12 12 Punkte

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche sind unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort knapp.

(a) Gegeben eine Formel φ in (i) der Aussagenlogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Ist φ kontingent (d.h. φ ist erfüllbar, aber keine Tautologie)?

(b) Gegeben $n \in \mathbb{N}$ und eine Formel φ in (i) der Modallogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Hat φ ein Modell mit höchstens n Elementen?

(c) Gegeben $n \in \mathbb{N}$ und eine Formel φ in (i) der Modallogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Hat φ ein Modell mit mindestens n Elementen?

Aufgabe 13 10 Punkte

Welche der folgenden Strukturklassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Geben Sie jeweils ein Axiomensystem an oder beweisen Sie, dass kein solches existiert.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Klasse $\mathcal{K}_n$ aller ungerichteten Graphen, die eine Clique der Größe n enthalten.

(b) Die Klasse aller regulären ungerichteten Graphen. (Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn alle Knoten den gleichen Grad $d \in \mathbb{N}$ haben.)

(c) Die Klasse aller gerichteten Graphen, die einen zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorphen Teilgraphen enthalten.

(d) Die Klasse aller kreisfreien ungerichteten Graphen (Ein ungerichteter Graph heißt *kreisfrei*, wenn er keinen Kreis der Länge ≥ 3 enthält.)