# Klausur Mathematische Logik

**Aufgabe 1** 12 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine aussagenlogische Formel

$$\varphi(X_n, \dots, X_0,\ Y_n, \dots, Y_0,\ Z_{n+1}, \dots, Z_0),$$

die besagt, daß die Summe der in $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ binär kodierten Zahlen gleich $\bar{Z}$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \vee Z) \wedge ((X \wedge Y) \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow X) \wedge (Y \rightarrow \neg X) \wedge (1 \rightarrow Y)$$

(c) Zwei Formeln $\varphi$ und $\psi$ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, daß $\varphi$ und $\psi$ einander ausschließen?

(d) Zeigen Sie, daß

$$\varphi := (Y \rightarrow (X \vee Z)) \wedge (X \rightarrow U) \wedge (U \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Y \vee U)$$

und $\psi := ((U \wedge Z) \rightarrow Y) \wedge \neg(U \wedge X) \wedge (Z \rightarrow X)$

einander ausschließen.

**Aufgabe 2** 9 Punkte

Seien $\varphi \in \mathrm{FO}$ und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) $\varphi$ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ keine Tautologie ist.

(b) $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

(c) $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

**Aufgabe 3** 15 Punkte

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \leq)$, $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $f(n) := 2^n$.

(ii) $\mathfrak{A} := (\mathscr{P}(\mathbb{N}), R^{\mathfrak{A}})$ mit $R^{\mathfrak{A}} := \subsetneq$,
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, R^{\mathfrak{B}})$ mit $R^{\mathfrak{B}} := <$,
$f(X) := \min X$ (wobei $f(\emptyset) := 0$).

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle Substrukturen der Struktur $(\mathbb{N}, +)$ an.

**Aufgabe 4** 9 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(a) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \forall x \varphi(x)}$ wobei *keine* weitere Bedingung an $c$ gestellt wird.

(b) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \psi \qquad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \leftrightarrow \psi}$

(c) $\dfrac{\Gamma,\ \exists x \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \forall x \varphi \Rightarrow \Delta}$

**Aufgabe 5** 12 Punkte

Betrachten Sie die Formeln:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &:= \forall x(\neg x < x) \land \forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z) \\ &\qquad \land \forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x), \\ \varphi_1 &:= \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y)), \\ \varphi_2 &:= \forall x \exists y(x < y \land \neg \exists z(x < z \land z < y)), \\ \varphi_3 &:= \forall x \exists y(y < x \land \neg \exists z(y < z \land z < x)), \\ \varphi_4 &:= \forall x \exists y \exists z(z < x \land x < y).\end{aligned}$$

Welche der folgenden Formelmengen sind erfüllbar?

(a) $\{\varphi_0, \varphi_1\}$,

(b) $\{\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3\}$,

(c) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$,

(d) $\{\varphi_0, \neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \varphi_4\}$.

**Aufgabe 6** 6 Punkte

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$((X \to \neg Y) \to (Z \land Y)) \land (Z \to \neg((Y \land \neg X) \lor (\neg Y \land X)))$$

(b) Sei $R$ ein zweistelliges Relationssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[\forall x \exists y Rxy \land \forall x \forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to y = z)] \to \exists x Rxx$$

**Aufgabe 7** 9 Punkte

Seien $R$ und $E$ zweistellige Relationssymbole, $f$ ein zweistelliges und $g$ ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Gegeben sei $\varphi := \forall y[\exists z(Rxz \land \neg Ryz) \to \forall x(Rfxyz \land Exgy)]$. Berechnen Sie $\varphi[x/fxy,\ y/gz,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie

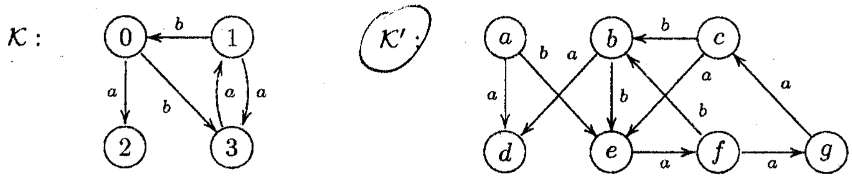
$$\psi := [\forall x \exists y Rxy \land \forall x \forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to y = z)] \to \forall x Rxfyx$$

in eine äquivalente Formel $\psi'$ in Pränex-Normalform um.

(c) Bilden Sie die Skolem-Normalform $\psi''$ von $\psi'$.

**Aufgabe 8** 18 Punkte

Betrachten Sie die Transitionssysteme




(a) Beweisen Sie, daß $\mathcal{K}, 0$ und $\mathcal{K}', a$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $m$, so daß der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen Satz $\varphi$ mit minimalem Quantorenrang an, so daß $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilar ist?

**Aufgabe 9** 18 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formlen definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(E_a yx \wedge \forall z \neg E_b yz)$

(ii) $\pi_1(\sigma_{2=3}\sigma_{4=5}(E_a \times E_b \times E_b) - \sigma_{1=6}\sigma_{2=3}\sigma_{4=5}(E_a \times E_b \times E_b))$

(iii) $[b]0 \wedge \langle a \rangle \langle a \rangle 1$

(b) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA an, welche die Menge $\{c, f\}$ definieren.

**Aufgabe 10** 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, an deren sämtlichen Nachfolgern $P$ gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, so daß es einen Pfad der Länge höchstens 3 von $v$ zu einem Knoten gibt, welcher keinen Nachfolger besitzt.

(c) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(d) Die Menge aller $v \in V$, so daß alle in $v$ beginnenden Pfade nur Knoten enthalten, an welchen $Q$ gilt.

**Aufgabe 11** 15 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein ensprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der ungerichteten Graphen.

(b) Die Klasse der ungerichteten, endlichen Graphen.

(c) Die Klasse der ungerichteten, unendlichen Graphen.

(d) Die Klasse der ungerichteten, zykelfreien Graphen.

(e) Die Klasse der ungerichteten Graphen, so daß zu je zwei Knoten $x$ und $y$ ein Zykel existiert, welcher beide Knoten enthält.

**Aufgabe 12** 12 Punkte

(a) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik (beide Aussagen).

(b) Beweisen Sie jeweils die einfache Richtung der Aussagen.

(c) Zeigen Sie, daß beide Aussagen äquivalent sind.

**Aufgabe 13** 6 Punkte

Skizzieren Sie je einen Algorithmus, welcher zu zwei gegebenen Formeln

(a) der Modallogik;

(b) der Prädikatenlogik;

entscheidet, ob diese logisch äquivalent sind, oder begründen Sie, wieso ein solcher Algorithmus nicht existiert.