Lineare Algebra II

Vorlesung SS 2005

Wilhelm Plesken

RWTH Aachen

Prof. Dr. Wilhelm Plesken
Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64
Internet: http://wwwb.math.rwth-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Sesquilinearformen

1 HERMITEsche Sesquilinearformen

Lernziel: HERMITEsche Sesquilinearformen, GRAM-Matrizen und ihr Transformationsverhalten.

Während wir früher vom Speziellen zum Allgemeinen, sprich von EUKLIDischen Vektorräumen zu allgemeinen Bilinearformen, gegangen sind, wollen wir es jetzt bei komplexen Vektorräumen umgekehrt machen und erst die Sesquilinearformen behandeln und dann die unitären Vektorräume als wichtigsten Spezialfall. Die Theorie kommt sowohl in der Funktionalanalysis als auch in der Quantenmechanik zur Anwendung, ist aber auch für sich genommen wichtig. Außerdem ist es eine gute und nicht so langweilige Wiederholung der Abschnitte über EUKLIDische Vektorräume und über Bilinearformen, allerdings mit Variationen.

Erinnerung: Das komplexe Konjugieren $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi$ ist ein Körperautomorphismus, also bijektiv, additiv und multiplikativ. Seine Fixpunkte sind genau die reellen Zahlen. Wir haben die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen Realteil $\mathfrak{R} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z = a+bi \mapsto a = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und Imaginärteil $\mathfrak{I} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z = a+bi \mapsto b = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$. Schließlich haben wir noch den Betrag oder Absolutbetrag eine komplexen Zahl als $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Definition 1.1 *Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.*
1) Eine Abbildung

$$\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C} : (V, W) \mapsto \Phi(V, W)$$

heißt **Sesquilinearform**, *falls Φ linear in der zweiten Komponente ist, d. h. für jedes $V \in \mathcal{V}$ gilt*

$$\Phi(V, aW + bW') = a\Phi(V, W) + b\Phi(V, W') \qquad W, W' \in \mathcal{V}, a, b \in \mathbb{C}$$

und falls Φ **semilinear** *in der ersten Komponente ist, d. h. für jedes $W \in \mathcal{V}$ gilt*

$$\Phi(aV + bV', W) = \overline{a}\Phi(V, W) + \overline{b}\Phi(V', W) \qquad V, V' \in \mathcal{V}, a, b \in \mathbb{C}.$$

2) Eine Sesquilinearform $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ heißt **HERMITEsch** *bzw.* **schiefHERMITEsch**, *falls*

$$\Phi(V, W) = \overline{\Phi(W, V)} \text{ für alle } V, W \in \mathcal{V}$$

bzw.

$$\Phi(V,W) = -\overline{\Phi(W,V)} \text{ für alle } V,W \in \mathcal{V}.$$

Die Mengen aller Sesquilinearformen, HERMITE*schen resp. schief*HERMITE*schen Sesquilinearformen auf $\mathcal{V}$ werden mit* $\mathrm{Sesq}(\mathcal{V})$, $\mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V})$ *bzw. mit* $\mathrm{Sesq}_-(\mathcal{V})$ *bezeichnet.*
3) Eine HERMITE*sche Sesquilinearform Φ auf $\mathcal{V}$ heißt* **positiv definit** *oder ein* **HERMITEsches inneres Produkt**, *falls*

$$\Phi(V,V) > 0 \text{ für alle } V \in \mathcal{V} - \{0\}.$$

Ist in diesem Fall $\mathcal{V}$ endlich dimensional, heißt $(\mathcal{V},\Phi)$ ein **unitärer Vektorraum.**

Wie im Falle von Bilinearformen kann man wieder Matrizen zur Beschreibung heranziehen. Hier sind die entsprechenden Begriffsbildungen für Matrizen:

Definition 1.2 *1) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definiert durch*

$$A^* : \underline{n} \times \underline{m} \to \mathbb{C} : (k,j) \mapsto \overline{A_{jk}}$$

die (komplex) **adjungierte Matrix** *von A.*
2) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt (komplex) **selbstadjungiert** *oder* **HERMITEsch**, *falls $A^* = A$. Sie heißt* **schiefHERMITEsch**, *falls $A^* = -A$. Die Menge aller* HERMITE*schen $n\times n$-Matrizen wird mit $\mathbb{C}^{n\times n}_{Herm}$ bezeichnet, die Menge der schief*HERMITE*schen mit $\mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh}$.*

Übung: Zeige

$$\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{n\times m} : A \mapsto A^*$$

ist $\mathbb{R}$-linear, jedoch nicht $\mathbb{C}$-linear, genauer $\mathbb{C}$-semilinear.

Übung: Zeige

$$\mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} \to \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} : A \mapsto iA$$

ist ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Zeige weiter:

$$\mathrm{Dim}\, \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} = \mathrm{Dim}\, \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} = n^2.$$

Übung: Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}, B \in \mathbb{C}^{m\times o}$ gilt

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Beispiel 1.3 *1) Sei $\mathcal{V} := \mathbb{C}^{n\times 1}$. Dann heißt*

$$\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C} : (V,W) \mapsto V^*W (= \overline{V_1}W_1 + \cdots + \overline{V_n}W_n)$$

*das Standard*HERMITE*sche innere Produkt auf $\mathcal{V}$. Übung: Verifiziere dies. Wie wird man dies auf $\mathbb{C}^{m\times n}$ verallgemeinern?*
2) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist

$$\underset{\sim}{A} : \mathbb{C}^{n\times 1} \times C^{n\times 1} \to \mathbb{C} : (V,W) \mapsto V^*AW$$

eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. *Sie ist genau dann* HERMITE*sch resp. schief*HERMITE*sch, falls A die entsprechende Eigenschaft hat. Insbesondere nennen wir eine* HERMITE*sche Matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **positiv definit**, *falls* $\underset{\sim}{A}$ *positiv definit ist. Beachte: Das Standard*HERMITE*sche innere Produkt auf* $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *ist gerade* $\underset{\sim}{I_n}$.

Wenn man etwas Neues beginnt, sollte man sich den Bezug zum Bekannten überlegen.

Bemerkung 1.4 *Ist* $\mathcal{V}$ *ein (endlich erzeugter)* $\mathbb{C}$-*Vektorraum mit Basis* $B = (B_1, \dots, B_n)$, *so kann man* $\mathcal{V}$ *durch Einschränkung der Skalare auch als reellen Vektorraum* $\mathcal{V}_{|\mathbb{R}}$ *mit Basis* $(B_1, iB_1, \dots, B_n, iB_n)$ *auffassen, also die zugrundeliegende abelsche Gruppe bleibt, jedoch die Dimension verdoppelt sich, genauer die reelle Dimension ist das Doppelte der komplexen. Ist* $\Phi \in \mathrm{Sesq}(\mathcal{V})$, *so sind* $\mathfrak{R}\circ\Phi, \mathfrak{I}\circ\Phi \in \mathrm{Bifo}(\mathcal{V}_{|\mathbb{R}})$ *reelle Bilinearformen mit* $\Phi = \mathfrak{R}\circ\Phi + i\mathfrak{I}\circ\Phi$. *Ist* Φ HERMITE*sch, so sind* $\mathfrak{R}\circ\Phi$ *symmetrisch und* $\mathfrak{I}\circ\Phi$ *alternierend.*

Wer will, kann die letzte Bemerkung noch genauer ausführen. Wir halten nur fest, daß man das Studium von Sesquilinearformen auch als Studium von gewissen Paaren von reellen Bilinearformen auffassen kann. Analog zum Fall der Bilinearformen haben wir:

Satz 1.5 *Sei* $\mathcal{V}$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{C}$-*Vektorraum mit Basis* $B \in \mathcal{V}^n$.
1)

$$\mathrm{Sesq}(\mathcal{V}) \to \mathbb{C}^{n\times n} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$$

ist ein Isomorphismus komplexer Vektorräume, wobei ${}_B\Phi^B$ *die* GRAM-**Matrix** *von* Φ *bezüglich B ist, definiert durch*

$${}_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \to \mathbb{C} : (k,j) \mapsto \Phi(B_k, B_j).$$

Für alle $V, W \in \mathcal{V}$ *gilt*

$$\boxed{\Phi(V,W) = ({}^BV)^*{}_B\Phi^{BB}W.}$$

2) Der Isomorphismus aus 1) schränkt sich zu Isomorphismen der reellen Vektorräume

$$\mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V}) \to \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} \text{ und } \mathrm{Sesq}_-(\mathcal{V}) \to \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh}$$

ein. Weiter ist $\Phi \in \mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V})$ *genau dann positiv definit, falls die* GRAM*matrix* ${}_B\Phi^B$ *positiv definit ist.*

Beweis. Übung q. e. d.

Folgerung 1.6 *Sind* $B, C \in \mathcal{V}^n$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\Phi \in \mathrm{Sesq}(\mathcal{V})$, *so gilt*

$$\boxed{{}_C\Phi^C = ({}^B\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}{}^C)^*{}_B\Phi^{BB}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}{}^C}.$$

Beispiel 1.7 *Sei $\Phi \in \mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V})$ gegeben durch*

$$_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Basistransformation

$$T := {}^B\mathrm{Id}^C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$_C\Phi^C = T^* {}_B\Phi^B T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die weitere Basistransformation

$$S := {}^C\mathrm{Id}^D := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$_D\Phi^D = S^* {}_C\Phi^C S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so daß D bereits Orthogonalbasis ist.

Bei HERMITEschen Sesquilinearformen kann man wieder Orthogonalbasen definieren. Hier ist ein Algorithmus zum Auffinden den Orthogonalbasen. Im Spezialfall von HERMITEschen inneren Produkten ist er eine Modifikation des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens, welches sich dabei nur als eine Variante des GAUSSschen Algorithmus entpuppt.

Algorithmus 1.8 *Gegeben: $\Phi \in \mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V})$ durch $_B\Phi^B \in \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm}$ für eine Basis $B \in \mathcal{V}^n$.*
Gesucht: Transformationsmatrix $T = {}^B\mathrm{Id}^C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so daß $_C\Phi^C = T^* {}_B\Phi^B T$ eine Diagonalmatrix ist.
Algorithmus: Setze $A := {}_B\Phi^B$ und $T := I_n$.
Führe die folgenden Schritte 1 bis $n-1$ durch:
Schritt r:
1) Vorbereitungsschritt (Entfällt, wenn Φ als positiv definit bekannt ist): Falls $A_{r,j} = 0$ für alle $j = r, \ldots n$, gehe sofort nach Schritt $r+1$. Falls $A_{r,r} = 0$ aber $A_{r,j} \neq 0$ für ein $j \geq r+1$, ersetze T durch TS mit $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ definiert durch seine Spalten:

$$S_{-,k} := \begin{cases} (I_n)_{-,k} & k \neq r \\ (I_n)_{-,r} + \frac{1}{2A_{r,j}}(I_n)_{-,j} & k = r \end{cases} \quad \text{bzw. } S_{-,k} := \begin{cases} (I_n)_{-,k} & k \neq r,j \\ (I_n)_{-,r} & k = j \\ (I_n)_{-,j} & k = r \end{cases}$$

im Falle $A_{j,j} = 0$ bzw. $A_{j,j} \neq 0$ und A durch S^*AS. (Beachte $A_{r,r} \neq 0$.)
2) Ausräumschritt: Ersetze T durch TS mit $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ definiert durch seine Zeilen:

$$S_{k,-} := \begin{cases} (I_n)_{k,-} & k \neq r \\ A_{r,r}^{-1}(\underbrace{0,\ldots,0}_{r-1}, A_{r,r}, -A_{r,r+1}, \ldots, -A_{r,n}) & k = r \end{cases}$$

und ersetze A durch S^*AS.
Nach dem $n-1$-ten Schritt ist T die gewünschte Basistransformation und A die GRAM-*matrix bezüglich der neuen Basis, welche eine Orthogonalbasis ist.*

Der Algorithmus räumt also der Reihe nach die i-te Zeile und Spalte mit möglicher Ausnahme des Diagonalelementes aus. Er testet auch, ob eine selbstadjungierte Matrix positiv definit ist.

Übung: Man übertrage den SYLVESTERschen Trägheitssatz auf den Fall HERMITEscher Sequilinearformen und zeige, daß der letzte Algorithmus 1.8 die somit wohldefinierte Signatur liefert.

2 Unitäre Vektorräume: Spektralsatz und unitäre Gruppe

Lernziel: Komplexe innere Produkträume, komplexer Spektralsatz für normale Abbildungen, Rolle der unitären Gruppe

Jetzt wollen wir uns der Theorie der unitären Vektorräume zuwenden. Für den Rest dieses Abschnittes sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein fester unitärer Vektorraum. Φ ist dann eine positiv definite HERMITEscher Sequilinearform, also ein HERMITEsches inneres Produkt. Ergänzt man Algorithmus 1.8 um eine Normierung am Ende, so erhält man das folgende Korollar:

Folgerung 1.9 *Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein unitärer Vektorraum. Dann gibt es eine Orthonormalbasis (kurz ONBasis) für $(\mathcal{V}, \Phi)$.*

Hier eine Liste der elementaren Resultate über EUKLIDische Vektorräume, die sich ohne Aufwand übertragen:

Satz 1.10 *1) Es gilt die* CAUCHY-SCHWARZ*sche Ungleichung*

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \Phi(V,V) & \Phi(V,W) \\ \Phi(W,V) & \Phi(W,W) \end{pmatrix} = \Phi(V,V)\Phi(W,W) - |\Phi(V,W)|^2 \geq 0$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$ mit Gleichheit genau dann, wenn (V,W) linear abhängig ist.
2) Die **Länge** *$|V|$ eines Vektors $V \in \mathcal{V}$ kann definiert werden durch*

$$|V| := \sqrt{\Phi(V,V)},$$

so daß die **Dreiecksungleichung** *für alle $V, W \in \mathcal{V}$ gilt :*

$$\boxed{|V+W| \leq |V| + |W|}.$$

3) **Winkel** *zwischen Vektorpaaren $(V,W) \in \mathcal{V}^2$ mit $V \neq 0, W \neq 0$ sind definiert durch*

$$\boxed{\cos(\angle(V,W)) = \frac{\Re(\Phi(V,W))}{|V| \cdot |W|}}.$$

mit $0 \leq \angle(V,W) \leq \pi$(:= *kleinste positive Nullstelle von* sin), *wobei* $\Re(z)$ *den Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet.*
4) Für Teilmengen $M \subseteq \mathcal{V}$ *sind* **Orthogonalräume** *definiert durch*

$$M^\perp := \{V \in \mathcal{V} | \Phi(W,V) = 0 \textit{ für alle } W \in M\}.$$

Teilräume $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ *haben ein* **orthogonales Komplement** $\mathcal{U}^\perp$ *mit*

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp.$$

Die Projektionen $\pi_\mathcal{U}$ *und* $\pi_{\mathcal{U}^\perp}$ *in dieser Zerlegung von* $\mathcal{V}$ *in Orthogonalräume werden* **Orthogonalprojektion** *auf* $\mathcal{U}$ *bzw.* $\mathcal{U}^\perp$ *genannt.*
5)Ist weiter $V \in \mathcal{V}$, *so gilt*

$$|\pi_{\mathcal{U}^\perp}(V)| = min\{|V - U| \; |U \in \mathcal{U}\}$$

und das Minimum, genannt der **Abstand** *von V und* $\mathcal{U}$, *wird durch genau einen Vektor von* $\mathcal{U}$ *angenommen, nämlich* $\pi_\mathcal{U}(V)$, *auch* **beste Approximation** *von V an* $\mathcal{U}$ *genannt.*
6)

$$\mathcal{U} \mapsto \pi_\mathcal{U}$$

liefert eine Bijektion zwischen den Teilräumen und den Orthogonalprojektionen von $\mathcal{V}$.

Beweis. Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, kann man $\mathcal{V}$ auch als reellen Vektorraum auffassen. Wir schreiben hierfür kurz $\mathcal{V}_{|\mathbb{R}}$. (Übung: $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}_{|\mathbb{R}}) = 2\,\mathrm{Dim}(\mathcal{V})$.)

$$\Psi : \mathcal{V}_{|\mathbb{R}} \times \mathcal{V}_{|\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : (V,W) \mapsto \frac{1}{2}(\Phi(V,W) + \Phi(W,V)) = \Re(\Phi(V,W))$$

ist ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathcal{V}_{|\mathbb{R}}$, denn $\Phi(V,V) = \Psi(V,V)$. Da $(\mathcal{V}_{|\mathbb{R}}, \Psi)$ ein EUKLIDischer Vektorraum ist, folgen Großteile der Behauptungen aus der entsprechenden Theorie des ersten Semesters. Rest und Einzelheiten: Übung. q. e. d.

Nun kommen wir zu der Spektraltheorie, die im komplexen Fall einfacher ist als im reellen. Zunächst haben wir wieder zu jedem Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ einen adjungierten Endomorphismus.

Satz 1.11 *Sei* $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. *Dann existiert ein eindeutiges* $\alpha^{ad} \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ *mit*

$$\Phi(V, \alpha(W)) = \Phi(\alpha^{ad}(V), W) \textit{ für alle } V, W \in \mathcal{V}.$$

α^{ad} *heißt die zu* α **adjungierte** *(lineare) Abbildung. Ist* $B \in \mathcal{V}^n$ *eine Basis von* $\mathcal{V}$, *so gilt*

$${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}_B\Phi^B({}^B\alpha^B)({}_B\Phi^B)^{-1})^*,$$

insbesondere

$${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}^B\alpha^B)^*.$$

falls B eine ONBasis ist.

Beweis. Wir zeigen, daß α^{ad} als Abbildung wohldefiniert ist. Sei also $V \in \mathcal{V}$. Wegen $\mathcal{V}^{\perp} = \{0\}$ gibt es ein eindeutiges $V' \in \mathcal{V}$ mit

$$\Phi(V, \alpha(W)) = \Phi(V', W) \text{ für alle } W \in \mathcal{V}.$$

Damit ist $\alpha^{ad}(V) := V'$ wohldefiniert. Darüber hinaus folgt auch, daß α^{ad} eindeutig definiert ist, daß es also keine weitere Abbildung mit der definierenden Eigenschaft gibt. Daß α^{ad} linear ist, zeigt man analog (Übung).
Wir schreiben nun die definierende Gleichung in Matrixform:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(V, \alpha(W)) & = & ({}^{B}V)^{*}{}_{B}\Phi^{B}({}^{B}\alpha^{BB}W) \\ \parallel & & \\ \Phi(\alpha^{ad}(V), W) & = & ({}^{B}(\alpha^{ad})^{BB}V)^{*}{}_{B}\Phi^{BB}W \\ & = & ({}^{B}V)^{*}({}^{B}(\alpha^{ad})^{B})^{*}{}_{B}\Phi^{BB}W \end{array}$$

Also

$$({}^{B}(\alpha^{ad})^{B})^{*}{}_{B}\Phi^{B} = {}_{B}\Phi^{BB}\alpha^{B},$$

woraus die restlichen Behauptungen folgen. q. e. d.

Definition 1.12 *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*
1) α heißt **selbstadjungiert** *(bzw.* **antiselbstadjungiert***), falls $\alpha^{ad} = \alpha$ (bzw. $\alpha^{ad} = -\alpha$).*
2) α heißt **normal**, *falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$.*
3) α heißt **unitär**, *falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$.*
2')A heißt **normal**, *falls $A^*A = AA^*$.*
3') A heißt **unitär**, *falls $A^*A = I_n$.*

Bemerkung 1.13 *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ und $A := {}^{B}\alpha^{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für eine ONBasis von $\mathcal{V}$.*
1) α ist selbstadjungiert bzw. antiselbstadjungiert genau dann, wenn A selbstadjungiert bzw. schiefHERMITEsch ist.
2) α ist normal genau dann, wenn A normal ist.
3) α ist unitär genau dann, wenn A unitär ist.

Übung: Zeige: Die unitären Endomorphismen von $(\mathcal{V}, \Phi)$ bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Diese heißt die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi)$ von $(\mathcal{V}, \Phi)$. Ebenso bilden die unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine Untergruppe $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und

$$\mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi) \to \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) : \alpha \mapsto {}^{B}\alpha^{B}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen, falls $B \in \mathcal{V}^n$ eine ONBasis ist.

Übung: Eine Projektion $\pi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ (also $\pi^2 = \pi$) ist Orthogonalprojektion genau dann, wenn π selbstadjungiert ist.

Der Hauptsatz ist nun der Spektralsatz, der nicht mehr in zwei Teilfälle unterteilt werden muß wie im reellen Fall.

Hauptsatz 1.14 *(Spektralsatz, komplexe Hauptachsentransformation)*
1) (Abbildungsversion) Sei $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ normal, wo $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein unitärer Vektorraum ist. Dann existiert eine ONBasis aus Eigenvektoren von α. Anders ausgedrückt: $\alpha = a_1\pi_1 + \cdots + a_k\pi_k$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, wo $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} = \pi_1 + \cdots + \pi_k$ einer Zerlegung der 1 in Orthogonalprojektionen ist ($\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}\pi_i$).
2) (Matrixversion) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit U^*AU diagonal.

Beweis. Es genügt, 1) zu beweisen. Wir führen den Beweis zuerst für den Fall, daß α selbstadjungiert oder unitär ist. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat α mindestens einen Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ und einen Eigenvektor $B_1 \in \mathcal{V}$ zum Eigenwert a. OBdA sei $|B_1| = 1$. Wir haben

$$\mathcal{V} = \langle B_1\rangle \oplus \langle B_1\rangle^{\perp}.$$

Da α selbstadjungiert oder unitär ist, folgt aus der α-Invarianz von $\langle B_1\rangle$ diejenige von $\langle B_1\rangle^{\perp}$, so daß wir mit

$$\alpha_{|\langle B_1\rangle^{\perp}} : \langle B_1\rangle^{\perp} \to \langle B_1\rangle^{\perp}$$

fortfahren können. Nach n Schritten haben wir eine ONBasis aus Eigenvektoren.
Sei jetzt α lediglich normal. Dann ist $\alpha^{ad}\circ\alpha = \alpha\circ\alpha^{ad}$ selbstadjungiert, hat also eine Basis aus Eigenvektoren mit reellen nicht negativen Eigenwerten. Da α mit $\alpha^{ad}\circ\alpha$ vertauscht, wird jeder Eigenraum von $\alpha^{ad}\circ\alpha$ durch α in sich abgebildet (Übung!). Wir können also oBdA annehmen, daß $\alpha^{ad}\circ\alpha = a\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ gilt für ein reelles $a \geq 0$. Der Fall $a = 0$ impliziert $\alpha = 0$. Im Fall $a > 0$ existiert $b > 0$ mit $b^2 = a$ und $\frac{1}{b}\alpha$ ist unitär. Dieser Fall wurde aber schon oben behandelt.
Hier ist noch ein zweiter Beweis, der von einem Hörer vorgeschlagen wurde und ohne Fallunterscheidungen auskommt: Der Eigenraum $E_\alpha(\lambda)$ ist α^{ad}-invariant, denn für $V \in E_\alpha(\lambda)$ gilt:

$$\alpha(\alpha^{ad}(V)) = \alpha^{ad}(\alpha(V)) = \lambda\alpha^{ad}(V).$$

Allgemein gilt: Ist $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ invariant unter α^{ad}, so ist $\mathcal{W}^{\perp}$ invariant unter α. Insbesondere ist $E_\alpha(\lambda)^{\perp}$ invariant unter α. Wir haben $\mathcal{V} = E_\alpha(\lambda) \oplus E_\alpha(\lambda)^{\perp}$ und die Induktion über die Dimension greift. q. e. d.

Folgerung 1.15 *Unitäre sowie (schief)HERMITEsche Matrizen sind diagonalisierbar mit einer unitären Transformation.*

Übung: Die Eigenwerte von unitären Matrizen haben Betrag 1, die von selbstadjungierten Matrizen sind reell, die von (schief)HERMITEschen Matrizen sind rein imaginär und die von normalen Matrizen sind beliebig.

Wir schließen ab mit einigen Bemerkungen über die unitäre Gruppe. Die Beweise sind analog zu denen bei der orthogonalen Gruppe, nur einfacher.

Bemerkung 1.16 *Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum. Dann gilt:*
1) $\mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi)$ *operiert auf* $\mathcal{V}^r$ *durch*

$$\mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi) \times \mathcal{V}^r \to \mathcal{V}^r : (g, X) \mapsto gX := (g(X_1), \ldots, g(X_r)).$$

Eine trennende Invariante dieser Operation ist die GRAM-*Matrix:*

$$\Gamma : \mathcal{V}^r \to \mathbb{C}^{r\times r}_{Herm} : X \mapsto (\Phi(X_k, X_j))_{1\leq k,j\leq r}$$

2) $\mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi)$ *operiert auf der Menge der Teilräume von* $\mathcal{V}$. *Eine trennende Invariante dieser Operation ist die Dimension, denn jeder Teilraum hat eine Orthonormalbasis.*

Was sagt diese Bemerkung für $r = 1$ aus? Die Bahnen auf $\mathcal{V}$ sind offenbar die Spären mit Mittelpunkt Null. Der zweite Teil der Bemerkung ist auf den ersten Blick estaumlich, denn die Matrixeinträge von $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ sind beschränkt durch 1. Die Werte der Determinanten unitärer Transformationen sind reichhaltiger als im orthogonalen Fall:

Übung: Ist $\alpha \in \mathrm{U}(\mathcal{V}, \Phi)$, so gilt $|\operatorname{Det}(\alpha)| = 1$ und jede komplexe Zahl vom Betrag 1 kommt als Determinante einer unitäten Transformation vor.

Schließlich überträgt sich auch noch die Polarzerlegung und die CAYLEY-Parametrisierung. Wir geben die Matrixversionen an; die Beweise übertragen sich vom orhogonalen Fall.

Satz 1.17 *(**Polarzerlegung**) Jedes $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ läßt sich eindeutig schreiben als $X = HU$ mit $H \in \mathbb{C}^{n\times n}_{herm}$ positiv definit und $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$.*

Man beachte, daß die Polarzerlegung im Falle $n = 1$ eine bekannte Sache ist und daß sich daher auch der Name erklärt.

Satz 1.18 *(* **CAYLEY-Parametrisierung** *)*

$$\zeta : \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} \to \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) : S \mapsto (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$$

ist eine wohldefinierte injektive Abbildung, deren Bild aus allen unitären Matrizen besteht, die -1 nicht als Eigenwert haben.

Wie im orthogonalen Fall gibt man eine Linksinverse der CAYLEY-Parametrisierung wieder leicht an.

Kapitel 2

Äquivalenz für Endomorphismen

1 JORDAN-Normalform

Lernziel: JORDAN-Normalform für die Matrix eines Endomorphismus

Zu Anfang möchte ich noch ein Ergebnis über Endomorphismen nachtragen, welches uns nochmals an die Begriffsbildungen Minimalpolynom und charakteristisches Polynom erinnert und welches unabhängig von der Zerlegung des Vektorraumes in Haupträume ist.

Satz 2.1 *Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n und $\alpha \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$. Wir definieren*

$$C_{\operatorname{End}(\mathcal{V})}(\alpha) := \{\beta \in \operatorname{End}(\mathcal{V}) | \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha\} \leq \operatorname{End}(\mathcal{V})$$

als den **Zentralisator** *von α (in $\operatorname{End}(\mathcal{V})$). Sei nun $\mu_\alpha(x) = \chi_\alpha(x)$, also das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom seien gleich. Dann gilt:*

$$C_{\operatorname{End}(\mathcal{V})}(\alpha) = \langle \operatorname{Id}_{\mathcal{V}}, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle.$$

Beweis. Wir benutzen folgendes Lemma, welches wir später als Übungsaufgabe beweisen werden:
Ist $\mu_\alpha(x) = \chi_\alpha(x)$, so gibt es ein $V \in \mathcal{V}$ mit Minimalpolynom $\mu_{\alpha,V}(x) = \mu_\alpha(x)$.
Sei V ein solcher Vektor. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist

$$(V, \alpha(V), \ldots, \alpha^{n-1}(V))$$

eine Basis von $\mathcal{V}$. Sei nun $\beta \in C_{\operatorname{End}(\mathcal{V})}(\alpha)$ und

$$\beta(V) = V' = \sum a_i \alpha^i(V) \text{ für geeignete } a_i \in K.$$

Dann ist $\beta(\alpha(V)) = \alpha(\beta(V)) = \alpha(V')$ und allgemeiner $\beta(\alpha^j(V)) = \alpha^j(V')$, also

$$\beta(\alpha^j(V)) = (\sum_i a_i \alpha^i)(\alpha^j(V)).$$

Also hat β denselben Effekt auf unsere Basis wie $\sum a_i \alpha^i$, d. h. $\beta = \sum a_i \alpha^i$. q. e. d.

Übung: Zeige: $C_{\mathrm{End}(\mathcal{V})}(\alpha)$ ist der Kern der linearen Abbildung

$$\mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}) : \gamma \mapsto \alpha \circ \gamma - \gamma \circ \alpha.$$

Übung: Zeige: $C_{\mathrm{End}(\mathcal{V})}(\alpha)$ ist ein Teilring von $\mathrm{End}(\mathcal{V})$. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist er isomorph zu $K[x]/\mu_\alpha(x)K[x]$.

Übung: Man formuliere den letzten Satz und die zugehörigen Übungen in der Sprache der Matrizen.

Wir wollen in diesem Abschnitt für einen gegebenen Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ eine möglichst einfache Form für die Matrix ${}^B\alpha^B$ finden. Bislang haben wir nur Teilergebnisse und Spezialfälle erledigt, an die wir uns kurz erinnern wollen. Für den ganzen Abschnitt sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

Ist $\mu_\alpha(x) = \prod_{i=1}^l p_i^{m(i)}$ die Zerlegung des Minimalpolynoms in normierte irreduzible und paarweise verschiedene Polynome p_i, dann gilt:
1) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\chi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^l p_i^{c(i)}$ mit $c(i) \geq m(i)$.
2) Man hat eine Zerlegung von $\mathcal{V}$ in die p_i-**Haupträume** $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$, die alle α-invariant sind:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha)).$$

Man hat $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha)) = \mathrm{Bild}(q_i(\alpha))$ mit $q_i := \prod_{j\neq i}^l p_j^{m(j)}$.
3) Die Projektionen der Zerlegung sind gegeben durch $\pi_i = (a_i q_i)(\alpha)$ wobei $a_i \in K[x]$ mit

$$1 = a_1 q_1 + \cdots a_l q_l$$

gegeben sind.
4) Für die Dimension der Haupträume gilt

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))) = c(i)\,\mathrm{Grad}(p_i).$$

5) Im Falle $m(i) = 1$ ist $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$ ein $K[x]/p_iK[x]$-Vektorraum der Dimension $c(i)$, und aus einer $K[x]/p_iK[x]$-Basis konstruiert man leicht eine K-Basis, die für die Einschränkung von α auf $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$ die Matrix

$$I_{c(i)} \otimes M_{p_i}$$

liefert, wobei M_{p_i} die Begleitmatrix von p_i ist. (Wichtiger Spezialfall: $p_i(x) = x - a$ für ein $a \in K$. Dann ist $M_{p_i} = a$ und wir haben ($m(i) = 1$ vorausgesetzt) eine Basis aus Eigenvektoren für den Hauptraum.)

Wir können und werden also ab jetzt bis auf Widerruf voraussetzen, daß wir nur einen Hauptraum haben, also $l = 1$, d. h. $\mu_\alpha(x) = p^m$ mit $p \in K[x]$ irreduzibel und normiert und $\chi_\alpha(x) = p^c$. Wir hatten in dieser Situation auch schon einen Spezialfall andiskutiert:

Falls $p = x - a$ ein lineares Polynom ist und $m = c = \mathrm{Dim}(\mathcal{V})$ ist, dann kann man eine Basis von $\mathcal{V}$ finden, so daß die Matrix von α durch den JORDAN-Block *

$$J_m(a) := aI_m + M_{x^m} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dieses Ergebnis wollen wir sofort auf den Fall $\mathrm{Grad}(p) > 1$ übertragen.

Lemma 2.2 *Sei $\mu_\alpha(x) = p^m = \chi_\alpha(x) = p^c$ mit p irreduzibel und normiert. Dann gibt es eine Basis B von $\mathcal{V}$ mit*

$${}^B\alpha^B = J(p^m),$$

wobei $J(p^m)$ der **verallgemeinerte** JORDAN-**Block** *von p^m ist, definiert durch*

$$J(p^m) := \begin{pmatrix} M_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_n & M_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_n & M_p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_n & M_p \end{pmatrix} \in K^{mn \times mn}$$

mit $n := \mathrm{Grad}(p)$, $0 \in K^{n \times n}$ die Nullmatrix vom Grad n und

$$N_n := \underline{n} \times \underline{n} \to K : (i,j) \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{falls } (i,j) = (1,n) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

Man beachte $J_m(a) = J((x-a)^m)$.

Beweis. Setze $\mathcal{V}_i := \mathrm{Bild}(p(\alpha)^i)$. Nach Definition des Minimalpolynoms ist $\mathcal{V}_{m-1} \neq \{0\}$ und $\mathcal{V}_m = \{0\}$. Weiter sind die $\mathcal{V}_i$ α-invariant, d. h. $\alpha(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i$. Somit induziert α einen Endomorphismus α_i auf $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}$. Dieser hat offensichtlich p als Minimalpolynom, so daß man in bekannter Manier $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}$ als $K[x]/pK[x]$-Vektorraum auffassen kann. Wegen

$$c\,\mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = \sum \mathrm{Dim}(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1})$$

und

$$\mathrm{Dim}(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}) = \mathrm{Grad}(p)\,\mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1})$$

sieht man leicht, daß alle $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}$ eindimensional als $K[x]/pK[x]$-Vektorräume sind. Jetzt ist klar, wie man an die Basis B kommt:
Wähle $B_1 \in \mathcal{V} - \mathcal{V}_1$ beliebig und setze

$$B_i := \alpha^{i-1}(B_1) \text{ für } i = 2, \dots n := \mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Dim}(K[x]/pK[x]).$$

*In der Literatur bezeichnet man häufig die Transponierte dieser Matrix als JORDAN-Block. Dies hängt damit zusammen, daß man die Reihenfolge der Basisvektoren, wie wir sie gewählt haben, umkehrt.

Man beachte, $(B_1 + \mathcal{V}_1, \ldots, B_n + \mathcal{V}_1)$ ist eine K-Basis von $\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_1$, die für α_0 die Matrix M_p liefert. Wir definieren jetzt (im Falle $m > 1$)

$$B_{n+i} := p(\alpha)(B_i) = p(\alpha)(\alpha^{i-1}(B_1)) = \alpha^{i-1}(p(\alpha)(B_1)) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Man beachte,

$$\alpha(B_n) = \alpha^n(B_1) = \underbrace{p(\alpha)(B_1)}_{B_{n+1}} - a_0 B_1 - a_1 B_2 - \cdots - a_{n-1} B_n,$$

wobei $p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ist. Allgemein definiert man nun

$$B_{kn+i} := p(\alpha)^k(B_i) \text{ für } i = 1, \ldots, n, k = 0, \ldots, m-1.$$

Übung: Zeige die lineare Unabhängigkeit der B_i. Es ist klar, daß ${}^B\alpha^B$ die gewünschte Gestalt hat. q. e. d.

Wir halten fest, die Basis, die uns die gewünschte Basis von $\mathcal{V}$ liefert, kann aus jedem Element $B_1 \in \mathcal{V} - \operatorname{Bild} p(\alpha)$ durch Anwendung der Basis

$$B_{p,m} := (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, p, xp, \ldots, x^{n-1}p, \ldots, p^{m-1}, xp^{m-1}, \ldots, x^{n-1}p^{m-1})$$

von $K[x]_{\text{Grad}<nm}$ erhalten werden. Dabei heißt Anwenden, daß man für x den Endomorphismus α einsetzt und dann den dadurch erhaltetenen Endomorphismus anwendet.

Übung: Zeige, daß im Vektorraum $\mathcal{V}_r \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aufgespannt von den

$$s_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i \sin(x)$$

und den

$$c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i \cos(x)$$

mit $0 \leq i \leq r$ für die Ableitung als Endomorphismus genau die Situation von Lemma 2.2 vorliegt. Was ist p und was ist m?

Übung: Beweise mit Hilfe des letzten Lemmas die Aussage: Es gibt ein $V \in \mathcal{V}$ mit Minimalpolynom $\mu_{\alpha,V}(x) = \mu_\alpha(x)$, die noch im Beweis von 2.1 offen geblieben ist. (In diesem Fall ist zugelassen, daß $\mu_\alpha(x)$ unterschiedliche irreduzible Teiler hat.)

Die Ideen und Begriffsbildungen des letzten Beweises können viel allgemeiner angewandt werden. Wir können jedem $\alpha \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$ mit charakteristischem Polynom p^c eine Partition von c zuordnen. Zur Erinnerung: Eine **Partition der natürlichen Zahl** c ist ein k-Tupel $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ und $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = c$. Man visualisiert üblicherweise die Partition durch Kästchen, die man linksbündig in Zeilen untereinander anordnet mit a_i Kästchen in der i-ten Zeile. Dies nennt man das YOUNG-**Diagramm** der Partition.

Definition 2.3 *1) Ist $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ eine Partition von $c \in \mathbb{N}$, so ist die* **konjugierte Partition** *a' von a definiert durch $a'_i := |\{j | a_j \geq i\}|$. (Die* YOUNG*-Diagramme von a und a' sind transponiert zueinander.)*
2) Sei $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\alpha(x) = p^c$ für ein normiertes irreduzibles Polynom $p \in K[x]$. Wir setzen $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_i := \mathrm{Bild}(p(\alpha)^i)$. Die zu α **gehörige Partition** *$a(\alpha)$ ist die konjugierte Partition von*

$$(\mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_1), \mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2), \dots, \mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_{m-1}/\mathcal{V}_m)),$$

wo m minimal ist mit $\mathcal{V}_m = \{0\}$.

Es ist klar, daß man für allgemeine Endomorphismen eine Partition für jeden Hauptraum bekommt.

Beispiel 2.4 *1) Ist $m = c$, so ist die zugeordnete Partition gleich $(c) = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{N}^1$.*
2) Ist $m = 1$, so ist die zugeordnete Partition gleich $(1, \dots, 1) = (c)' \in \mathbb{N}^c$.

Übung: Zeige, daß die Partition eines Endomorphismus wohldefiniert ist, daß also

$$\mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_{i-1}/\mathcal{V}_i) \geq \mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1})$$

für alle i gilt. (Hinweis: $p(\alpha)$ induziert einen Epimorphismus.)

Übung: Ist a die zu $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ gehörige Partition, so gilt $a_1 = m$, wobei $\mu_\alpha(x) = p^m$.

Hauptsatz 2.5 *(*JORDAN*) Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\alpha(x) = p^c$ für ein normiertes irreduzibles Polynom $p \in K[x]$. Ist $a = (a(1), \dots, a(k)) \in \mathbb{N}^k$ die zu α gehörige Partition von c, so gibt es eine Basis B von $\mathcal{V}$ mit*

$${}^B\alpha^B = \mathrm{Diag}(J(p^{a(1)}), \dots, J(p^{a(k)})).$$

Diese Matrix heißt (verllgemeinerte) JORDAN-**Normalform** *(für die α beschreibenden Matrizen).*

Beweis. Der Beweis ist technisch etwas kompliziert zu formulieren, aber im Grunde inhaltlich nicht so kompliziert, weil wir schon Lemma 2.2 zur Verfügung haben, welches uns jeweils einen JORDAN-Block liefern wird. Unser Ziel wird also sein: Zerlege $\mathcal{V}$ in eine direkte Summe α-invarianter Teilräume $\mathcal{T}_i$, so daß bei der Einschränkung von α auf $\mathcal{T}_i$ Minimalpolynom gleich p^i und zwar so, daß $\mathcal{T}_i$ eine gewisse Anzahl, genauer $a'(i) - a'(i+1)$, gleicher JORDAN-Blöcke $J(p^i)$ liefert. Dabei läuft i von 1 bis $a(1)$; einige $\mathcal{T}_i$ können Null sein. Diese Zerlegung ergibt sich aus dem Zusammenspiel der beiden $K[x]/pK[x]$-Vektorräume $\mathcal{V}/\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{W} := \mathrm{Kern}(p(\alpha))$.
1. Vergleich der Schichten $\mathcal{V}_i/V_{i+1}$.
Obwohl $\mathcal{V}$ kein $K[x]/pK[x]$-Vektorraum ist, außer in dem trivialen Fall $a(1) = 1$, sind die Faktorräume $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}$ in natürlicher Weise $K[x]/pK[x]$-Vektorräume:

$$\overline{q(x)} V_i + \mathcal{V}_{i+1} := q(\alpha)(V_i) + \mathcal{V}_{i+1}$$

mit $\overline{q(x)} \in K[x]/pK[x], V_i \in \mathcal{V}_i$. (Übung: Produkt ist wohldefiniert!) Dabei setzen wir $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}$. Desweiteren definiert $p(\alpha)$ einen Epimorphismus

$$\tau_{i+1,i} : \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1} \to \mathcal{V}_{i+1}/\mathcal{V}_{i+2} : V_i + \mathcal{V}_{i+1} \mapsto p(\alpha)(V_i) + \mathcal{V}_{i+2},$$

Hierbei läuft i von 0 bis $a(1)-1$; die $\mathcal{V}_i$ mit $i \geq a(1)$ sind Null zu setzen. Die Kompositionen der $\tau_{i+1,i}$ bezeichnen wir mit $\tau_{i+r,i} := \tau_{i+r,i+r-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$:

$$\tau_{i+r,i} : \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1} \to \mathcal{V}_{i+r}/\mathcal{V}_{i+r+2}$$

Wenn wir in die oberste Schicht schauen, bekommen wir:

$$\{0\} \leq \operatorname{Kern} \tau_{1,0} \leq \operatorname{Kern} \tau_{2,0} \leq \ldots \leq \operatorname{Kern} \tau_{a(1),0} = \mathcal{V}/\mathcal{V}_1.$$

2) Vergleich mit $\mathcal{W} := \operatorname{Kern} p(\alpha)$.
In $\mathcal{W}$ haben wir die Filtrierung

$$\{0\} \leq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{a(1)-1} \leq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{a(1)-2} \leq \ldots \leq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_1 \leq \mathcal{W}.$$

Wir wählen eine angepaßte $K[x]/pK[x]$-Basis: $B^{(a(1))}$ sei Basis von $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{a(1)-1}$, die Ergänzung mit $B^{(a(1)-1)}$ sei Basis von $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{a(1)-2}$, etc. bis $B^{(1)}$, welche den Zusammenschluß aller vorherigen $B^{(i)}$ zu einer Basis von $\mathcal{W}$ ergänzt. Man beachte, die Restklassen der Elemente aus $B^{(1)}$ nach $\mathcal{V}_1$ bilden eine $K[x]/pK[x]$-Basis eines$K[x]/pK[x]$-Teilraumes $\overline{\mathcal{T}}_1$ von $\mathcal{V}/\mathcal{V}_1$. Wir setzen $B^{[1]} := B^{(1)}$ und wählen für $i > 1$ Folgen $B^{[i]}$ in $\mathcal{V}$ mit $p(\alpha)^{i-1} \circ B^{[i]} = B^{(i)}$, was nach Definition der $\mathcal{V}_i$ möglich ist. Die Restklassen der Elemente von $B^{[i]}$ nach $\mathcal{V}_1$ bilden eine $K[x]/pK[x]$-Basis eines Teilraumes $\overline{\mathcal{T}}_i \leq \mathcal{V}/\mathcal{V}_1$ mit der Eigenschaft

$$\overline{\mathcal{T}}_i \oplus \operatorname{Kern} \tau_{i-1,0} = \operatorname{Kern} \tau_{i,0}, \qquad (i = 1, \ldots, a(1)),$$

wobei $\operatorname{Kern} \tau_{0,0} := \mathcal{V}/\mathcal{V}_1$. Insbesondere haben wir

$$\mathcal{V}/\mathcal{V}_1 = \overline{\mathcal{T}_1} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{T}_{a(1)}}.$$

3) Zerlegung von $\mathcal{V}$:
Der kleinste α-invariante Teilraum $K[\alpha]C := \langle C, \alpha(C), \alpha^2(C), \ldots \rangle$, der von einem Vektor C aus $B^{[i]}$ erzeugt wird, hat nach Lemma 2.2 eine K-Basis, so daß die Matrix der Einschränkung von α gleich einem JORDAN-Block $J(p^i)$. Die Behauptung des Satzes folgt, wenn wir zeigen:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{a(1)} \mathcal{T}_i \text{ mit } \mathcal{T}_i := \bigoplus_{C \in B^{[i]}} K[\alpha]C.$$

Sei $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}$ und $\nu_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}$ der natürliche Epimorphismus. Dann gilt

$$\nu_0(\mathcal{T}_i) = \overline{\mathcal{T}}_i \text{ und } \mathcal{T}_i \cap \mathcal{W} = \langle B^{(i)} \rangle_{K[x]/pK[x]} = p(\alpha)^{i-1}(\mathcal{T}_i)$$

für $i = 1, \ldots, a(1)$ und

$$\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1} = \tau_{i,0}(\overline{\mathcal{T}}_i) \oplus \cdots \oplus \tau_{i,0}(\overline{\mathcal{T}}_{a(1)}) \text{ mit } \tau_{i,0}(\overline{\mathcal{T}}_j) = \nu_i(\mathcal{T}_j \cap \mathcal{V}_i)$$

für $j = i, \dots, a(1)$. Da jedes dieser $\tau_{i,0}(\overline{\mathcal{T}}_j)$ als $K[x]/pK[x]$-Vektorraum vermöge $\tau_{i,0}$ offenbar isomorph zu $\overline{\mathcal{T}}_j$ ist und $\tau_{i,0}(\overline{\mathcal{T}}_i)$ gleich $\nu_i(\mathcal{W})$, sieht man auch

$$\mathrm{Dim}_K \mathcal{T}_i = i \cdot \underbrace{\mathrm{Grad}(p)}_{\mathrm{Dim}_K K[x]/pK[x]} \underbrace{\mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]}(\overline{\mathcal{T}}_i)}_{\#j \text{ mit } a(j)=i}$$

Es ist nun ziemlich klar (Übung, Induktion über i bei Betrachtung von $\mathcal{V}/\mathcal{V}_i$), daß $\mathcal{V}$ von den $\mathcal{T}_i$ erzeugt wird. Ein Dimensionsvergleich von

$$\mathrm{Dim}_K \mathcal{V} = \mathrm{Grad}(p) \sum_{j=0}^{a(1)-1} \mathrm{Dim}_{K[x]/pK[x]} \mathcal{V}_j/\mathcal{V}_{j+1} = \mathrm{Grad}(p) \sum_{i=1}^{k} a(i)$$

mit der Summe der Dimensionen der $\mathcal{T}_i$ zeigt, daß eine direkte Summe vorliegt und die Behauptung folgt. q. e. d.

Man beachte, die Zerlegung, die im letzten Beweis konstruiert wurde, ist nicht kanonisch, nur die resultierende Matrix ist kanonisch. Der Beweis ist konstruktiv in dem Sinne, daß man ihn in einen Algorithmus zur Bestimmung der JORDAN-Normalform resp. zur Bestimmung einer Basis, die die JORDAN-Normalform liefert, umschreiben kann. Hier nochmals die schematische Darstellung eines Falles mit $m = 3$:

$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_1$	
$\overline{\mathcal{T}_3}$	$\overline{\mathcal{T}_2}$	$\overline{\mathcal{T}_1}$	$\mathcal{V}/\mathcal{V}_1$
$\tau_{1,0}(\overline{\mathcal{T}_3})$	$\tau_{1,0}(\overline{\mathcal{T}_2})$		$\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2$
$\tau_{2,0}(\overline{\mathcal{T}_3})$			$\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_3$

und für die Basiswahl:

$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_1$	
$B^{[3]}$			
$p(\alpha)(B^{[3]})$	$B^{[2]}$		
$p(\alpha)^2(B^{[3]}) = B^{(3)}$	$p(\alpha)(B^{[2]}) = B^{(2)}$	$B^{(1)} = B^{[1]}$	$\mathcal{W}$

Beispiel 2.6

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$$

hat Minimalpolynom $(x-2)^3$. *Es gilt*

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 1*, wir werden also den ersten* JORDAN*-Block aus dem zweiten Standardbasisvektor V bekommen. $(A-2I_4)^2V$ wird offenbar durch den dritten Standardbasisvektor W zur Basis von $\mathcal{W} = \mathrm{Kern}(A-2I_4) = \mathcal{E}_A(2)$ ergänzt. also ist unsere neue Basis $B = (V, (A-2I_4)V, (A-2I_4)^2V, W)$ und die transformierte Matrix ist*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}.$$

Wir wollen nochmals die Problemstellung in der Sprache der konjugierten Abbildungen aufgreifen und geben jetzt die Generalvoraussetzung auf, daß das Minimalpolynom eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, daß wir also nur einen Hauptraum haben.

Definition 2.7 *1) Zwei Endomorphismen $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ heißen* **ähnlich** *oder* **konjugiert** *unter* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$*, falls ein $\gamma \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ existiert mit $\alpha = \gamma \circ \beta \circ \gamma^{-1}$.*
2) Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen **ähnlich** *oder* **konjugiert** *unter* $\mathrm{GL}(n, K)$*, falls ein $g \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert mit $A = gBg^{-1}$.*

Klar: Die Matrizen, die einen festen Endomorphismus beschreiben, bilden eine Ähnlichkeitsklasse, wenn man die Basis variieren läßt. Zwei Endomorphismen sind genau dann durch dieselbe Matrix beschreibbar, wenn sie konjugiert sind.

Es stellt sich die Frage nach trennenden Invarianten für die Konjugationsoperation. Der Satz von JORDAN gibt einen Standardvertreter an und einen Algorithmus, diesen auszurechnen. Wir wollen dies nochmals in einem Satz ausdrücken.

Satz 2.8 *Zwei Endomorphismen $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ sind genau dann unter* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *konjugiert, wenn gilt*
a) die Minimalpolynome sind gleich: $\mu_\alpha(x) = \mu_\beta(x)$ und
b) für jeden normierten irreduziblen Teiler $p \in K[x]$ des Minimalpolynoms sind die Partitionen des p-Hauptraumes von $(\mathcal{V}, \alpha)$ und von $(\mathcal{V}, \beta)$ gleich.
In anderen Worten: Die Minimalpolynome zusammen mit den Partitionen bilden ein System trennender Invarianten für die Ähnlichkeitsklassen.

Übung: Formuliere die Matrixversion des letzten Satzes. Wie findet man eine Matrix, die zwei ähnliche Matrizen ineinander transformiert?

Beispiel 2.9 *Ähnlichkeitsklassen in* $\mathbb{C}^{4\times 4}$*:*

$\chi_A(x)$	$\mu_A(x)$	*Partitionen*	*Vertreter*
$(x-a)^4$	$x-a$	$(1,1,1,1)$	$\mathrm{Diag}(a,a,a,a)$
	$(x-a)^2$	$(2,1,1)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),a,a)$
	$(x-a)^2$	$(2,2)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),J_2(a))$
	$(x-a)^3$	$(3,1)$	$\mathrm{Diag}(J_3(a),a)$
	$(x-a)^4$	(4)	$J_4(a)$
$(x-a)^3(x-b)$	$(x-a)(x-b)$	$(1,1,1),(1)$	$\mathrm{Diag}(a,a,a,b)$
	$(x-a)^2(x-b)$	$(2,1),(1)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),a,b)$
	$(x-a)^3(x-b)$	$(3),(1)$	$\mathrm{Diag}(J_3(a),b)$
$(x-a)^2(x-b)^2$	$(x-a)(x-b)$	$(1,1),(1,1)$	$\mathrm{Diag}(a,a,b,b)$
	$(x-a)^2(x-b)$	$(2),(1,1)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),b,b)$
	$(x-a)^2(x-b)^2$	$(2),(2)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),J_2(b))$
$(x-a)^2(x-b)(x-c)$	$(x-a)(x-b)(x-c)$	$(1,1),(1),(1)$	$\mathrm{Diag}(a,a,b,c)$
	$(x-a)^2(x-b)(x-c)$	$(2),(1),(1)$	$\mathrm{Diag}(J_2(a),b,c)$
$\prod_{w=a,b,c,d}(x-w)$	$\prod_{w=a,b,c,d}(x-w)$	$(1),(1),(1),(1)$	$\mathrm{Diag}(a,b,c,d)$

Übung: Gib ein Vertretersystem aller Konjugiertenklassen von Endomorphismen von $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$ und von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

2 Anwendungen auf lineare Rekursionen und Differentialgleichungen

Lernziel: Anwendung der JORDAN-Normalform auf lineare Differenzen- und Differentialgleichungen

Zu Beginn eine Bemerkung, die eigentlich Wiederholung der Ideen des letzten Abschnittes ist.

Bemerkung 2.10 *Sei K ein Körper und V ein (nicht notwendig endlich dimensionaler) K-Vektorraum mit einem Endomorphismus α. Für jedes normierte irreduzible Polynom $p = p(x) \in K[x]$ gelte*

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Kern}(p(\alpha)) = \mathrm{Grad}(p)\cdot v_p$$

für ein $v_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. (Beachte: Ist die Dimension endlich, so ist sie durch Grad(p) *teilbar, wie das Minimalpolynom zeigt.) Dann gilt für jedes normierte $q \in K[x]$*

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Kern}(q(\alpha)) \leq \sum_p \mathrm{Grad}(p)\cdot v_p \cdot r_p$$

wobei $q = \prod_p p^{r_p}$ die Zerlegung von q in irreduzible Faktoren ist. Weiter hat die Einschränkung von α auf Kern$(q(\alpha))$ *höchstens v_p verallgemeinerte* JORDAN*-Blöcke zu Potenzen von p.*

Beweis. Offenbar haben wir

$$\mathrm{Kern}(q(\alpha)) = \bigoplus_p \mathrm{Kern}(p(\alpha)^{r_p}),$$

und $p(\alpha)$ induziert für jedes irreduzible normierte p und jedes $e > 1$ einen Monomorphismus

$$\mathrm{Kern}(p(\alpha)^e)/\,\mathrm{Kern}(p(\alpha)^{e-1}) \to \mathrm{Kern}(p(\alpha)^{e-1})/\,\mathrm{Kern}(p(\alpha)^{e-2}).$$

q. e. d.

Hier sind Beispiele, die interessant sind.

Beispiel 2.11 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathcal{V} := K[[x]]$ und $\alpha = \sigma : \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} x^i$ der Schiebeoperator. Dann sind die normierten irreduziblen Polynome von $K[x]$ gegeben durch $x - a$ für $a \in K$. Offenbar gilt*

$$\mathrm{Kern}(\sigma - a\,\mathrm{Id}) = \langle \frac{1}{1-ax} \rangle,$$

also $v_{x-a} = 1$. In diesem Fall gilt immer Gleichheit in 2.10, denn

$$\mathrm{Kern}((\sigma - a\,\mathrm{Id})^r) = \langle \frac{1}{1-ax}, \frac{1}{(1-ax)^2}, \ldots, \frac{1}{(1-ax)^r} \rangle.$$

Man beachte, daß dies ein Verfahren liefert, **lineare Differenzengleichungen** oder **lineare Rekursionen** mit konstanten Koeffizienten zu lösen.

Beweis. Daß $v_{x-a} = 1$ gilt, ist offensichtlich. Zur Bestimmung von $\mathrm{Kern}((\sigma - a\,\mathrm{Id})^r)$ beachte man die folgende leicht zu verifizierende Funktionalgleichung:

$$\sigma(\sum a_i x^i \sum b_j x^j) = \sigma(\sum a_i x^i) \sum b_j x^j + a_0 \sigma(\sum b_j x^j).$$

Damit folgt

$$\sigma(\frac{1}{(1-ax)^n}) = \frac{a}{(1-ax)^n} + \frac{a}{(1-ax)^{n-1}} + \cdots + \frac{a}{(1-ax)}$$

q. e. d.

Übung: Man gebe die Lösungen mit Wachstumsverhalten der folgenden linearen Rekursionen über $\mathbb{R}$ an: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$.

Übung: Man diskutiere $\alpha := \sigma^2$.

Bemerkung 2.12 *Gibt man in 2.11 die Voraussetzung auf, daß K algebraisch abgeschlossen ist, so läßt sich immer noch alles übertragen, nur daß die Lösungen nicht mehr so übersichtlich sind. Die Lösungen der linearen Rekursion $a_{n+k}+b_{k-1}a_{n+k-1}+\cdots+b_0a_n=0$, der ja das Polynom $p(x)=x^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0\in K[x]$ zugeordnet ist, sind gegeben durch*

$$\frac{q(x)}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots b_{k-1}x+1} \text{ mit } \mathrm{Grad}(q(x))<k,$$

also der Nenner ist $\tilde{p}:=x^kp(x^{-1})$.

Als Beweisidee eine kleine Erinnerung: $m_x : K[[x]] \to K[[x]] : f \mapsto xf$ ist Rechtsinverse zu σ. Man setzt an $\tilde{p}\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i = * + 0x^{k+1} + 0\ldots$.

Übung: Man diskutiere die Anwendung auf Partialbruchzerlegungen rationaler Funktionen.

Beispiel 2.13 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $n\cdot 1\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{V}:=K[[x]]$ und $\alpha=\partial : \sum a_i\frac{x^i}{i!}\mapsto\sum a_{i+1}\frac{x^i}{i!}$ der formale Ableitungsoperator. Wieder haben wir $v_{x-a}=1$, denn*

$$\mathrm{Kern}(\partial - a\,\mathrm{Id}) = \langle e^{ax}\rangle,$$

mit $e^{ax}:=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}$. Wiederum haben wir Gleichheit in 2.10, denn

$$\mathrm{Kern}((\partial - a\,\mathrm{Id})^r) = \langle e^{ax}, xe^{ax}, \ldots \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}e^{ax}\rangle.$$

Zum Beweis benutze man die Produktregel. Man beachte, hiermit haben wir ein Lösungsverfahren für gewöhnliche formale lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also Gleichungen der Form $p(\partial)(f)=0$ mit $p\in K[x]$ vorgegeben und $f\in K[[x]]$ gesucht.

Übung: Man stelle die zu den linearen Rekursionen aus der obigen Übung korrespondierenden linearen Differentialgleichungen auf und löse sie.

Beispiel 2.14 *Sei $K=\mathbb{R}$,*

$$\mathcal{V} = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} | f \textit{ unendlich oft differenzierbar}\}$$

und $\alpha=\partial$ die Ableitung auf $\mathcal{V}$. Dann sind die irreduziblen normierten Polynome in $\mathbb{R}[x]$ durch $x-a$ für $a\in\mathbb{R}$ und $(x-a)^2+b^2$ mit $a,b\in\mathbb{R}, b>0$ gegeben.
Zitat *aus der Analysis: Für jedes $a\in\mathbb{R}$ sind alle Lösungen von $f'=af$ gegeben durch $f(x)=r\exp(ax)$ mit $r\in\mathbb{R}$ beliebig, und für jedes $a,b\in\mathbb{R}, b>0$ sind alle Lösungen von $f''-2af'+(a^2+b^2)f=0$ gegeben durch $f(x)=\exp(ax)(r\sin(bx)+s\cos(bx))$ für beliebige $r,s\in\mathbb{R}$.*
Also haben wir wieder $v_p=1$ für alle irreduziblen Polynome p. Die Situation ist analog zu den letzten Fällen: Durch Heranmultiplizieren der Polynomfunktionen bekommt man die Lösungsräume für die $p(\partial)^i$.

Ein tieferes Verständnis liefert der Übergang von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ im letzten Beispiel.

Beispiel 2.15 *Sei* $K = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{V} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f = f_1 + if_2, f_i \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

und $\alpha = \partial$ *wieder die Ableitung.*
Zitat *aus der Analysis: Definiere* $\exp(i\circ) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{ix} := \cos(x) + i\sin(x) = \exp(ix)$. *Dann ist* $\exp(i\circ) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *bis auf (komplexe) Vielfache die einzige Lösung von* $f' = if$ *in* $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Ebenso ist* $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \exp((a+ib)x) := \exp(ax) \cdot \exp(ibx)$ *bis auf Vielfache die einzige Lösung von* $f' = (a+bi)f$, *wobei* $a, b \in \mathbb{R}$.
Man überzeugt sich nun leicht, daß die Situation wie in 2.13 ist.

Wir wollen ein konkretes einfaches Beispiel durchrechnen:

Beispiel 2.16 *Aufgabe: Suche alle* $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *mit* $D^4 f + f = 0$, *wo* D *die Ableitung bezeichnet.*
Lösung: Der größte Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *ist gesucht, der mit jeder Funktion ihre Ableitung enthält und für den die Ableitung* $x^4 + 1$ *als Minimalpolynom hat.*
Beachte: $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \in \mathbb{R}[x]$ *mit* $x^2 + \sqrt{2}x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ *und* $x^2 - \sqrt{2}x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ *irreduzibel. Also untersuchen wir statt der Differentialgleichung vierter Ordnung die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung:*

$$D^2 f + \sqrt{2}Df + f = 0 \text{ und } D^2 f - \sqrt{2}Df + f = 0.$$

Wir betrachten $D^2 f + \sqrt{2}Df + f = 0$ *und beachten, daß*

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{C}[x]$$

eine Faktorisierung in teilerfremde Polynome ist. Jetzt gehen wir über zu $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *und fragen nach allen* $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *mit*

$$Df - \frac{-1+i}{\sqrt{2}} f = 0 \text{ bzw. } Df - \frac{-1-i}{\sqrt{2}} f = 0$$

und erhalten die Lösungen

$$f(x) = a\exp(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x) \text{ bzw. } f(x) = a\exp(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}x)$$

mit $a \in \mathbb{C}$.
Nun waren wir aber eigentlich an reellen Lösungen interessiert: Wir schließen jetzt leicht, daß die Lösungsmenge von $D^2 f + \sqrt{2}Df + f = 0$ *mit* $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *durch*

$$(x \mapsto \exp(-x/\sqrt{2})\sin(x/\sqrt{2}), x \mapsto \exp(-x/\sqrt{2})\cos(x/\sqrt{2})) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$$

erzeugt wird.

Man könnte nun den Eindruck bekommen, daß zum gleichen irreduziblen Polynom immer nur ein verallgemeinerter JORDAN-Block vorkommt. Dieser Eindruck ist darauf zurückzuführen, daß wir immer nur eine Differentialgleichung betrachtet haben. Bei Systemen kann wirklich alles vorkommen. Wir behandeln dies als abschließende Bemerkung.

Bemerkung 2.17 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ein gewöhnliches lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ist gegeben durch*

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

wobei die $f_i \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ gesucht sind und die f_i' die Ableitungen der f_i sind.
Ist dann $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, so daß TAT^{-1} in JORDAN-*Normalform ist, so wird das obige System auf*

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_n' \end{pmatrix} = (TAT^{-1}) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

zurückgeführt, also auf den Fall von einzelnen Gleichungen, den wir bereits oben behandelt haben.

Kapitel 3

Gruppen

1 Gruppen, Bahnen, Invarianten und Stabilisatoren

Lernziel: Stabilisatoren, Bahnen von Stabilisatoren, Rückblick auf verschiedene Konstruktionen vom Gesichtspunkt der Gruppentheorie,

Bislang haben wir das Konzept des Operierens einer Gruppe auf einer Menge kennengelernt. Inzwischen haben wir eine Reihe Beispiele hierfür. Bevor wir diese Beispiele nochmals durchgehen, wollen wir ein weiteres Konzept kennenlernen, welches dual zum Konzept der Bahn ist.

Definition 3.1 *Sei G eine Gruppe.*
1) $U \subseteq G$ heißt **Untergruppe** *von G, kurz $U \leq G$, falls*

(a) $U \neq \emptyset$,

(b) $g, h \in U$ impliziert $gh^{-1} \in U$.

2) G operiere auf der Menge M. Für $m \in M$ heißt

$$\mathrm{Stab}_G(m) := \{g \in G | gm = m\}$$

der **Stabilisator** *von m in G.*

Bemerkung 3.2 *G operiere auf M.*
1) Für $m \in M$ gilt $\mathrm{Stab}_G(m) \leq G$.
2) Ist $m \in M$ und $g \in G$, so gilt $\mathrm{Stab}_G(gm) = g\,\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1}$.

Übung: Sei G eine Gruppe, $U \leq G, g \in G$. Zeige: $gUg^{-1} \leq G$. Man nennt U und gUg^{-1} **konjugierte Untergruppen**. Stabilisatoren von Elementen in derselben Bahn sind also konjugiert.

Bevor wir jetzt den bisherigen Stoff unter dem Gesichtspunkt der Gruppentheorie wiederholen, ist noch eine kleine Bemerkung sehr hilfreich.

Bemerkung 3.3 *Die Gruppe G operiere* **transitiv** *auf der Menge M, d. h. $Gm = M$ für jedes $m \in M$. Dann gilt für jedes $m \in M$: Die Bahnen von G auf $M \times M$ (bei diagonaler Operation) stehen in Bijektion zu den Bahnen von $\mathrm{Stab}_G(m)$ auf M.*

$$\boxed{(M \times M)/G \xrightarrow{\sim} M/\operatorname{Stab}_G(m)}$$

Beweis. Die Bijektion ist gegeben durch

$$G(m,n) \mapsto \operatorname{Stab}_G(m)n \qquad (n \in M).$$

Wir zeigen, daß diese Abbildung wohldefiniert ist:
Wegen der Transitivität von G auf M ist jede Bahn von G auf $M \times M$ von der Form $G(m,n) = \{(gm, gn) | g \in G\}$. Gilt $G(m,n) = G(m,n')$ für ein $n' \in M$, so sind offenbar n und n' in derselben Bahn unter $\mathrm{Stab}_G(m)$. Also ist die Abbildung wohldefiniert.
Offenbar ist die Abbildung surjektiv. Wir zeigen die Injektivität:
$\mathrm{Stab}_G(m)n = \mathrm{Stab}_G(m)n'$ impliziert offenbar $G(m,n) = G(m,n')$. Also haben wir insgesamt eine Bijektion. q. e. d.

Übung: G operiere auf M und sei $m \in M$. Zeige: Die Bahnen von G auf $(Gm) \times M$ stehen in Bijektion zu den Bahnen von $\mathrm{Stab}_G(m)$ auf M.

Übung: Sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugter K-Vektorraum und $\mathcal{TR}_k(\mathcal{V})$ die Menge der k-dimensionalen Teilräume von $\mathcal{V}$. Zeige: $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ operiert transitiv auf $\mathcal{TR}_k(\mathcal{V})$ und

$$d : \mathcal{TR}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{TR}_k(\mathcal{V}) \to \mathbb{R} : (\mathcal{U}, \mathcal{W}) \mapsto k - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

ist eine trennende Invariante der diagonalen Operation auf $\mathcal{TR}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{TR}_k(\mathcal{V})$, also ist

$$\mathcal{TR}_k(\mathcal{V}) \to \mathbb{R} : \mathcal{W} \mapsto k - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

eine trennende Invariante für die Operation von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(\mathcal{V})}(\mathcal{U})$ auf $\mathcal{TR}_k(\mathcal{V})$.

Beispiel 3.4 *Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ auf $\mathcal{V} - \{0\}$ transitiv. Der Stabilisator eines $V \in \mathcal{V} - \{0\}$ hat dann jedes Vielfache $\neq 0$ von V als Bahn, sowie die Menge aller Vektoren, die linear unabhängig von V sind. Dies vergleiche man mit der früheren Beschreibung der Bahnen von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ auf $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ durch die Teilräume von K^2, die die linearen Abhängigkeiten beschreiben (Stichwort: Trennende Invariante).*
In Matrizen: $\mathcal{V} = K^{n \times 1}$, $G = \mathrm{GL}(n, K)$, Operation durch Linksmultiplikation. Der Stabilisator des ersten Standardbasisvektors $E_1 := (I_n)_{-,1}$ ist

$$\operatorname{Stab}_G(E_1) := \{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & A \end{array} \right) | a \in K^{1 \times (n-1)}, A \in \mathrm{GL}(n-1, K)\}$$

und hat die folgenden Bahnen auf $\mathcal{V}$:

$$\{aE_1\} \text{ mit } a \in K \text{ und } \mathcal{V} - \{aE_1 | a \in K\}.$$

Häufig ist es interessanter, den Stabilisator auf einer anderen Menge operieren zu lassen. Hier einige Beispiele.

Beispiel 3.5 *Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ auf dem Dualraum $\mathcal{V}^*$ durch*

$$G \times \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^* : (g, \varphi) \mapsto (g^{-1})^{tr}(\varphi) = \varphi \circ g^{-1}.$$

Der Stabilisator eines $\varphi \in \mathcal{V}^* - \{0\}$ operiert auf jeder Faser $\varphi^{-1}(\{a\})$ mit $a \in K$, also auf jeder Restklasse nach $\mathrm{Kern}(\varphi)$. Das Studium der Operation von $\mathrm{Stab}_G(\varphi)$ auf $\varphi^{-1}(\{1\})$ heißt affine Geometrie und wird uns noch ausführlich beschäftigen.
In Matrizen: $\mathcal{V} = K^{n\times 1}$, $G = \mathrm{GL}(n, K)$, die Operation auf $K^{1\times n}$, dem bekanntlich $\mathcal{V}^*$ entspricht, ist gegeben durch

$$G \times K^{1\times n} \to K^{1\times n} : (g, Z) \mapsto Zg^{-1}.$$

Der Stabilisator des letzten Standardbasisvektors $Z_n := (I_n)_{n,-}$ ist

$$\mathrm{Stab}_G(Z_n) := \{\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in K^{(n-1)\times 1}, A \in \mathrm{GL}(n-1, K)\}.$$

Die Operation dieser Gruppe auf

$$\{\left(\begin{array}{c} S \\ \hline 1 \end{array}\right) | S \in K^{(n-1)\times 1}\}$$

wird also affine Geometrie sein. Man beachte:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} S \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} AS + a \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

Beispiel 3.6 *Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ auf $\mathrm{Bifo}_+(\mathcal{V})$ durch*

$$G \times \mathrm{Bifo}_+(\mathcal{V}) : (g, \Phi) \mapsto g\Phi$$

mit

$$(g\Phi)(V, W) = \Phi(g^{-1}(V), g^{-1}(W)).$$

Der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(\Phi)$ wird mit $\mathrm{O}(\mathcal{V}, \Phi)$ bezeichnet und heißt **orthogonale Gruppe** *von $(\mathcal{V}, \Phi)$. Die Operation der orthogonalen Gruppe auf $\mathcal{V}$ ist wieder von erheblichem Interesse; wir haben lediglich den Fall $K = \mathbb{R}$ und Φ positiv definit im letzten Semester im Rahmen der* EUKLID*ischen Vektorraumtheorie durchgeführt. Der* SYLVESTER*sche Trägheitssatz beschreibt uns die Bahnen der obigen Operation durch die Signatur als trennende Invariante im reellen Fall. Signatur $(1, n-1, 0)$ ist in der Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung: $(\mathcal{V}, \Phi)$ heißt dann* MINKOWSKI*-Raum und $\mathrm{O}(\mathcal{V}, \Phi)$ im Falle $n = \mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = 4$ die* LORENTZ*-Gruppe. Im komplexen Fall hatten wir gesehen, daß die Dimension $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}^{\perp,\Phi})$ des Radikals eine trennende Invariante ist. Für andere Körper ist die Situation sehr viel komplizierter.*
In Matrizen: $G := \mathrm{GL}(n, K)$ operiert auf $K^{n\times n}_{sym}$ durch

$$G \times K^{n\times n}_{sym} : (g, F) \mapsto g^{-tr} F g^{-1}.$$

Den Stabilisator von $F = \mathrm{Diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{k},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-k})$ *bezeichnet man mit* $\mathrm{O}(k, n-k, \mathbb{R})$ *im Falle* $K = \mathbb{R}$.

Übung: Man zeige, daß die Einträge der Matrizen in $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ beschränkt sind, jedoch bei $\mathrm{O}(n-1, 1, \mathbb{R})$ nicht.

Übung: Diskutiere die Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ für endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume auf $\mathrm{Sesq}_+(\mathcal{V})$ analog zum letzten Beispiel. Ebenso die Matrixversion.

Bevor wir weitere Beispiele aufzählen, betrachten wir noch eine Definition, die den Übersetzungsprozeß in die Matrixsprache in einen allgemeineren Rahmen stellt.

Definition 3.7 *Sei G eine Gruppe.*
1) Die Operation von G auf dem K-Vektorraum $\mathcal{V}$ *heißt* **linear**, *falls für jedes* $g \in G$ *die Abbildung*

$$\hat{g} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : V \mapsto gV$$

linear ist.
2) Die Gruppe G operiere auf der Menge M und die Gruppe H auf der Menge N. Die beiden Operationen heißen **ähnlich**, *falls ein Isomorphismus* $\rho : G \to H$ *und eine Bijektion* $\alpha : M \to N$ *existieren, so daß*

$$\alpha(gm) = (\rho(g))(\alpha(m)) \text{ für alle } g \in G, m \in M$$

gilt, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{g}} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ N & \xrightarrow[\widehat{\rho(g)}]{} & N \end{array}$$

für jedes $g \in G$ *kommutativ ist. Sind zudem die beiden Operationen linear (über demselben Körper), so heißen sie als lineare Operationen* **ähnlich**, *falls* α *noch zusätzlich ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.*

Übung: Verifiziere, daß in den Beispielen 3.4, 3.5, 3.6 lineare Operationen vorliegen und daß die Matrixversionen im Sinne der letzten Definition ähnlich sind zu den Abbildungsversionen.

Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß das Studium der linearen Gruppenoperationen eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Sie wird in der Darstellungstheorie von Gruppen intensiv betrieben und hat viele Anwendungen.

Eine sehr wichtige lineare Operation der vollen linearen Gruppe haben wir im letzten Abschnitt diskutiert. Hier nochmals die Quintessenz:

Beispiel 3.8 *$G := \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ operiert linear auf $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ für endlich erzeugte K-Vektorräume $\mathcal{V}$ durch*

$$\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \times \mathrm{End}(\mathcal{V}) \to \mathrm{End}(\mathcal{V}) : (g, \varphi) \mapsto g \circ \varphi \circ g^{-1}.$$

Die Matrixversion liefert Standardvertreter durch die JORDAN-*Normalformen. Stabilisatoren sind die Zentralisatoren geschnitten mit $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Die Primteiler des Minimalpolynoms zusammen mit den zugehörigen Partitionen liefern ein System trennender Invarianten.*

2 GAUSS-BRUHAT-Zerlegung

Lernziel: Operation der vollen linearen Gruppe auf Fahnen von Teilräumen, Restklassen und Doppelrestklassen nach Untergruppen, Analyse des GAUSSschen Algorithmus, treue Operationen.

Bevor wir den GAUSSschen Algorithmus einer gründlichen gruppentheoretischen Analyse unterziehen wollen, wollen wir eine nichtlineare Operation der vollen linearen Gruppe studieren.

Definition 3.9 *Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum.*
1) Eine **Fahne** *von $\mathcal{V}$ ist eine Folge $(\mathcal{U}_i)_{i \in \underline{n}}$ von Teilräumen*

$$\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2 \leq \cdots \leq \mathcal{U}_n := \mathcal{V}$$

mit $\mathrm{Dim}(\mathcal{U}_i) = i$. Die Menge aller Fahnen von $\mathcal{V}$ wird mit $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ bezeichnet.
2) Ist $B \in \mathcal{V}^n$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so heißt $F(B)$ mit $F(B)_i = \langle B_1, \ldots, B_i \rangle$ die zu B gehörige Fahne.

Bemerkung 3.10 *Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann gilt:*
1) $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ operiert transitiv auf der Menge $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ aller Fahnen von $\mathcal{V}$.
2) (Wir identifizieren $\mathrm{GL}(n,K)$ mit $\mathrm{GL}(K^{n\times 1})$ vermöge $A \mapsto \widetilde{A}$.) Ist S die Standardbasis von $K^{n\times 1}$, so ist der Stabilisator von $F(S)$ gegeben durch

$$\Delta^o(n,K) := \{A \in \mathrm{GL}(n,K) | A_{i,j} = 0 \text{ für } i > j\} \leq \mathrm{GL}(n,K),$$

der Gruppe der (invertierbaren) oberen Dreiecksmatrizen. Entsprechend ist der Stabilisator von $F(S')$ mit $S' := (S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1) \in (K^{n\times 1})^n$ gegeben durch

$$\Delta^u(n,K) := \{A \in \mathrm{GL}(n,K) | A_{i,j} = 0 \text{ für } i < j\} \leq \mathrm{GL}(n,K),$$

die Gruppe der (invertierbaren) unteren Dreiecksmatrizen.
3) Ist $B \in \mathcal{V}^n$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so gilt für den Stabilisator von $F(B)$

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(\mathcal{V})}(F(B)) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}) | {}^B g^B \in \Delta^o(n,K)\}.$$

Beweis. 1) Offenbar operiert $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ transitiv auf der Menge $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ der Basen von $\mathcal{V}$. Weiter ist jede Fahne von der Form $F(B)$ für eine geeignete Basis $B \in \mathcal{V}^n$. Schließlich ist die Abbildung $F : \mathcal{B}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ verträglich mit der Gruppenoperation oder **äquivariant**, d. h. $F(gB) = gF(B)$ für alle $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$. Damit ist die Behauptung klar.
2) 3) Übung. q. e. d.

Übung: Sei K algebraisch abgeschlossen. Zeige: Für jedes $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ existiert eine Fahne F mit $gF = F$. Zeige auch, daß die Voraussetzung über K notwendig ist.

Übung: Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein EUKLIDischer Vektorraum. Zeige: Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(\mathcal{V}, \Phi)$ operiert immer noch transitiv auf der Menge aller Fahnen von $\mathcal{V}$. Zeige auch, daß der Stabilisator einer Fahne endlich von der Ordnung 2^n mit $n := \mathrm{Dim}(\mathcal{V})$ ist.

Es stellt sich jetzt die Frage nach den Bahnen auf der Menge $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ aller Fahnen unter dem Stabilisator (in $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$) einer festen Fahne.

Satz 3.11 *Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sind F und F' Fahnen von $\mathcal{V}$, so gibt es eine Basis $B \in \mathcal{V}^n$ und eine eindeutig bestimmte (von B unabhängige) Permutation $\sigma \in S_n$ mit*

$$F = F(B) \text{ und } F' = F(B \circ \sigma).$$

Beweis.
A: Identifikation $\mathcal{F}(\mathcal{V}) \equiv \mathrm{GL}(n, K)/\Delta^o(n, K)$:
Wir wissen von früher, daß $\mathrm{GL}(n, K)$ auf der Menge $\mathcal{B}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}^n$ transitiv operiert durch

$$\mathrm{GL}(n, K) \times \mathcal{B}(\mathcal{V}) \to \mathcal{B}(\mathcal{V}) : (g, D) \mapsto Dg^{-1}.$$

Schränken wir diese Operation auf $\Delta^o(n, K)$ ein, so sehen wir sofort, daß

$$F : \mathcal{B}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$$

eine trennende Invariante dieser $\Delta^o(n, K)$-Operation ist. Da F zudem surjektiv ist, können wir also die Menge $\mathcal{B}(\mathcal{V})/\Delta^o(n, K)$ der Bahnen mit $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ identifizieren. Dies gibt uns einen entscheidenden Rechenvorteil, weil wir auch $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ mit $\mathrm{GL}(n, K)$ identifizieren können. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß die erste Fahne F gegeben ist als $F = F(C)$ für ein $C \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$. Dann haben wir die Identifikation

$$\mathcal{B}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n, K) : D \mapsto {}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D,$$

welche auch $\Delta^o(n, K)$-äquivariant ist, also eine Ähnlichkeit mit zugehörigem Isomorphismus $\mathrm{Id}_{\Delta^o(n,K)}$. Entsprechend schreiben wir

$$F : \mathrm{GL}(n, K) \to \mathcal{F}(\mathcal{V}) : {}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D \mapsto F(D)$$

und haben

$$F(Ag) = F(A) \text{ für alle } A \in \mathrm{GL}(n, K), g \in \Delta^o(n, K)$$

als entscheidende Eigenschaft.
B: Standardvertreter für $\mathrm{GL}(n,K)/\Delta^o(n,K)$:
Eine leichte Modifikation des spaltenweisen GAUSS-Algorithmus ermöglicht es uns nun, ein ausgezeichnetes Vertretersystem der $\Delta^o(n,K)$-Bahnen, also der F-Fasern nicht nur anzugeben, sondern auch eine algorithmische Vertreterbestimmung durchzuführen.
Modifikation: Für i von 1 bis n mache folgende Schritte: Durchsuche die i-te Spalte $A_{-,i}$ von unten her nach dem ersten Eintrag $\neq 0$, und ersetze A durch das Produkt Ag mit einer geeigneten Matrix $g \in \Delta^o(n,K)$, so daß dieser Eintrag auf 1 normiert wird und die Zeile rechts von dem Eintrag aus Nullen besteht.
Übung: Das so konstruierte Vertretersystem steht in Bijektion zu den Fahnen.
C: Algorithmus zur Bestimmung der gewünschten Basis B:
Sei D eine Basis mit $F(D) = F'$ gegeben durch ${}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D$.
1. Schritt: Bestimme Standardvertreter $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $F' = F({}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D) = F(A)$ mit Hilfe des obigen Verfahrens, d. h. finde $T \in \Delta^o(n,K)$ mit ${}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D\, T = A$.
2. Schritt: Sei $P \in \mathrm{GL}(n,K)$ die **Permutationsmatrix**, also eine Matrix, die durch Spaltenpermutation aus der Einheitsmatrix hervorgeht, die wie folgt konstruiert ist: Ersetze jede Spalte von A durch diejenige Spalte der Einheitsmatrix, die die 1 an derselben Stelle hat wie die letzte 1 in der Spalte von A und transponiere (=invertiere) die so erhaltene Matrix. Kurz: P = Transponierte (oder Inverse) der Matrix, die man aus A erhält, indem man alle Einträge außer den untersten Einsen in jeder Spalte zu Null macht.
3. Schritt: Die gesuchte Basis B ist gegeben durch ${}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^B = AP \in \Delta^o(n,K)$.
D: Kommentare und Beweise:
Interpretiere $T \in \Delta^o(n,K)$ als ${}^D\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^{B\circ\sigma}$, so daß $A = {}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^{B\circ\sigma}$ und $F(D) = F(B\circ\sigma)$. Interpretiere die Permutationsmatrix P als $P = {}^{B\circ\sigma}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^B$, so daß $AP = {}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^B$. Da $AP \in \Delta^o(n,K)$, gilt $F(C) = F(B)$. Die Permutation $\sigma \in S_n$ ist schließlich gegeben durch

$$I_{-,\sigma(i)} := i - \text{te Spalte von } P^{tr} = (P^{tr})_{-,i}.$$

E: Eindeutigkeit von σ:
Klar: $\sigma(1)$ ist das kleinste $i \in \underline{n}$ mit $F_1' \leq F_i$. Sei $\nu_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/F_1'$ der natürliche Epimorphismus. Dann ist $\sigma(2)$ das kleinste $i \in \underline{n}$ mit $\nu_1(F_2') \leq \nu_1(F_i)$ etc. (Einzelheiten Übung).
q. e. d.

Beispiel 3.12 *1) Gegeben $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Basen $C, D \in \mathcal{V}^3$ mit*

$${}^C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: M.$$

Gesucht: Kompatible Basen für $F(C)$ und $F(D)$.
Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist die gesuchte Transformationsmatrix ${}^{C}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^{B\circ\sigma}$*, die Permutationsmatrix* P *und die gesuchte Basis* B*, die sich aus* ${}^{C}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^{B\circ\sigma}\,P$ *ergibt, sind gegeben durch*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad und \; {}^{C}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}^{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Die Vertreter der Bahnen von $\mathrm{GL}(3,K)$ *unter der Operation von* $\Delta^o(3,K)$ *haben die folgenden möglichen Gestalten:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man interpretiere die Anzahl der $*$.

Wir haben bei den Herleitungen die Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ bzw. $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ nicht benutzt. Aber diese Operation ist vertauschbar mit der Operation von $\Delta^o(n,K)$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ und wir haben $F(gB) = gF(B)$ für alle $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$. Beschreiben wir die Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ durch Matrizen bezüglich B, so wissen wir schon, daß der Stabilisator von $F(B)$ wieder durch $\Delta^o(n,K)$ gegeben ist. Wir bekommen also sofort aus 3.11 folgendes Korollar.

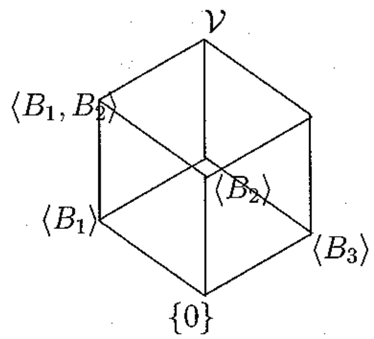
Folgerung 3.13 *Sei* $\mathcal{V}$ *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum.*
1) $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *operiert transitiv auf* $\mathcal{F}(\mathcal{V})$.
2) Für zwei Fahnen $F, F' \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ *sei* $d(F,F')$ *die Permutation* $\pi \in S_n$*, für die eine Basis* B *von* $\mathcal{V}$ *existiert mit* $F = F(B)$ *und* $F' = F(B\circ\pi)$*. Dann ist*

$$d : \mathcal{F}(\mathcal{V}) \times \mathcal{F}(\mathcal{V}) \to S_n$$

eine trennende Invariante der Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *auf* $\mathcal{F}(\mathcal{V})\times\mathcal{F}(\mathcal{V})$*. In anderen Worten: Ist* $F \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$*, dann stehen die Bahnen des Stabilisators* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(\mathcal{V})}(F)$ *auf der Menge aller Fahnen* $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ *von* $\mathcal{V}$ *in Bijektion mit der symmetrischen Gruppe* S_n.

Beweis. 1) Ist klar, da $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ transitiv auf der Menge der Basen operiert.
2) d ist eine Invariante, denn für $F, F' \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ und $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ finden wir eine Basis B mit $F = F(B), F' = F(B\circ\pi)$, wo $\pi = d(F,F')$. Aber $gF = F(gB)$ und $gF' = F(g(B\circ\pi)) = F((gB)\circ\pi)$, also $d(F,F') = d(gF,gF')$. Zeige: d trennt die Bahnen von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Es genügt zu zeigen, daß für $F, F', F'' \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ mit $d(F,F') = d(F,F'') =: \pi$ ein $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ existiert mit $gF = F$ und $gF' = F''$. Aber nach 3.11 haben wir zwei Basen B, C von $\mathcal{V}$ mit $F = F(B) = F(C), F' = F(B\circ\pi), F'' = F(C\circ\pi)$. Sei g das eindeutige Element von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ mit $gB = C$. Dann folgt $gF = F$ und $gF' = F''$. q. e. d.

Übung: Man male ein Diagramm, welches für eine feste Basis $B \in (K^3)^3$ alle $F(B \circ \pi)$ enthält. Man vergleiche mit der Komposition der Permutationen.



Wir wollen jetzt den Beweis des letzten Satzes noch benutzen, um zu folgender allgemeiner Erkenntnis zu kommen, die sich geradezu aufdrängt.

Definition 3.14 *Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe.*
$gU := \{gu | u \in U\}$ heißt eine **Restklasse** *von G nach U. Die Menge der Restklassen, die offenbar eine Partition von G bilden, wird mit G/U bezeichnet.*

Übung: Zeige, die Restklassen von G nach U sind gerade die Bahnen der Operation

$$U \times G \to G : (u, g) \mapsto gu^{-1}$$

von U auf G.

Satz 3.15 *Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe.*
1) G operiert transitiv auf G/U durch

$$G \times G/U \to G/U : (g, hU) \mapsto ghU.$$

2) Operiert G transitiv auf der Menge M, und ist $m \in M$ mit $\mathrm{Stab}_G(m) = U$, so gilt

$$gU = \{h \in G | hm = gm\},$$

und

$$F : G \to M : g \mapsto gm$$

ist eine surjektive trennende Invariante für die Operation von U auf G aus der obigen Übungsaufgabe. Die induzierte Bijektion

$$G/U \to M : gU \mapsto gm$$

ist eine Ähnlichkeit der beiden G-Mengen M und G/U mit zugehörigem Gruppenisomorphismus Id_G. Unter dieser Abbildung sind die Bahnen einer Untergruppe $H \leq G$ von G (z. B. $H = U$) auf M in Bijektion zu den **Doppelrestklassen**

$$HgU := \{hgu | h \in H, u \in U\} \text{ mit } g \in G.$$

Wir wollen den Satz jetzt nicht beweisen, weil er in die Algebra gehört, aber man kann sich bereits an ihn gewöhnen, indem man den Beweis von 3.11 nochmals durchgeht.

Es drängt sich die Frage auf, was herausgekommen wäre, wenn wir im Beweis des Satzes über die Existenz kompatibler Basen den spaltenweisen GAUSS-Algorithmus nicht modifiziert hätten, sondern ganz normal den ersten Eintrag $\neq 0$ in einer Spalte von oben anfangend gesucht hätten. Man macht sich leicht klar, daß man dann für jedes $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ ein $g \in \Delta^o(n, K)$ (welches die Spaltenumformungen macht) und eine eindeutige Permutationsmatrix P finden kann (welche die Spalten permutiert), so daß $AgP \in \Delta^u(n, K)$ liegt. Die angelsächsische Literatur spricht von einer LU-Zerlegung von A (L wie "lower triangular" und U wie "upper triangular"). Wir halten dies als zweiten Teil des folgenden Korollars fest.

Folgerung 3.16 *1)(* GAUSS-BRUHAT-**Zerlegung***) Jedes $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ läßt sich schreiben als*

$$A = gPh \ \mathit{mit}\ g, h \in \Delta^o(K)$$

und eindeutiger Permutationsmatrix $P \in \mathrm{GL}(n, K)$.
2)(**LU–Zerlegung***) Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ läßt sich schreiben als*

$$A = gPh \ \mathit{mit}\ g \in \Delta^u(n, K), h \in \Delta^o(K)$$

und eindeutiger Permutationsmatrix $P \in \mathrm{GL}(n, K)$.

Übung: Sei $P_0 \in \mathrm{GL}(n, K)$ die Permutationsmatrix definiert durch

$$P_0 : \underline{n} \times \underline{n} \to K : (i, j) \mapsto \delta_{i,n+1-j}.$$

Man zeige, daß P_0 die Gruppen $\Delta^o(n, K)$ und $\Delta^u(n, K)$ beim Konjugieren vertauscht.

Mit Hilfe dieser Übungsaufgabe kann man sich den Zusammenhang zwischen den beiden Permutationsmatrizen aus der GAUSS-BRUHAT-ZERLEGUNG und der LU-Zerlegung herstellen. Der generische Fall, wo also beim GAUSS-Algorithmus keine zufälligen Nullen auftreten, ist bei der GAUSS-BRUHAT-Zerlegung $P = P_0$ und bei der LU-Zerlegung $P = I_n$. Die GAUSS-BRUHAT-Zerlegung ist vom Standpunkt der Gruppentheorie und der projektiven Geometrie her bedeutsamer, die Numeriker arbeiten mit der LU-Zerlegung. Man kann diese Zerlegungen auch anders herstellen mit einem Verfahren analog zum CHOLESKI-Verfahren. Ich begnüge mich mit einem Beispiel und lasse es als Übungsaufgabe, den Algorithmus richtig zu formulieren und zu beweisen. Es sei vermerkt, daß sich ein ähnliches Verfahren als Ersatz des GAUSS-Algorithmus anbietet, wenn man gleichzeitig eine Basis für den Kern und das Bild einer Matrix bestimmen will.

Beispiel 3.17 *Aufgabe: Stelle die LU-Zerlegung von* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$ *her.*

Lösung:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluß müssen wir noch einen weiteren Begriff bei Gruppenoperationen einführen, den wir bald brauchen.

Definition 3.18 *Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Die Operation heißt* **treu,** *falls*

$$gm = m \text{ für alle } m \in M \text{ impliziert } g = 1,$$

d. h.

$$\bigcap_{m \in M} \mathrm{Stab}_G(m) = \{1\}.$$

Beispiel 3.19 *1)* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *operiert treu auf* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{V}^*$.
2) $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *operiert nicht treu auf* $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ *durch Konjugation, da* $a\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ *für jedes* $a \in K^*$ *die Identität auf* $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ *induziert.*
3) $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *operiert nicht treu auf* $\mathcal{F}(\mathcal{V})$.
4) Ist $A \in K^{m \times n}$ *und* $b \in \mathrm{Bild}(\widetilde{A})$, *so operiert* $\mathrm{Kern}(\widetilde{A})$ *treu auf der Lösungsmenge von* $AX = b$.

Übung: Operiert eine abelsche Gruppe G treu und transitiv auf M und ist $m \in M$, so gilt

$$G \to M : g \mapsto gm$$

ist bijektiv.

Kapitel 4

Affine Geometrie

1 Der affine Raum und affine Abbildungen

Lernziel: Definition und Modelle des affinen Raumes, affine Abbildungen, Invarianten der affinen Geometrie.

In der affinen Geometrie hat man einen Punktraum, dessen Punkte in Bijektion zu einem Vektorraum stehen, welcher in bestimmter Weise auf dem Punktraum (durch Translationen oder Verschiebungen) operiert. Der wesentliche Unterschied zum Vektorraum besteht darin, daß kein Punkt (Nullpunkt) mehr ausgezeichnet ist. Begriffe wie Geraden, Ebenen etc. lassen sich leicht als sogenannte affine Unterräume definieren.

Definition 4.1 *Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. Ein* **affiner Raum** *über $\mathcal{V}$ ist eine nicht leere Menge $\mathcal{A}$, genannt Punktmenge, auf der $\mathcal{V}$ treu und transitiv operiert. Genauer ist ein affiner Raum ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \tau)$, wobei*

$$\tau : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : (V, P) \mapsto \tau_V(P)$$

eine treue und transitive Operation des Vektorraumes $\mathcal{V}$ auf dem Punktraum $\mathcal{A}$ ist. Die Abbildung $\tau_V : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt die **Translation** *um den Vektor V von $\mathcal{A}$. Der Vektorraum $\mathcal{V}$ wird auch als* **Translationsraum** *von $\mathcal{A}$ bezeichnet: $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \mathcal{V}$. (Bezeichnung: Oft schreiben wir $V + P$ oder $P + V$ anstatt $\tau_V(P)$. Diese Schreibweise soll nicht implizieren, daß $\mathcal{A} = \mathcal{V}$ ist.)*

Bemerkung 4.2 *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem K-Vektorraum $\mathcal{V}$.*
1) Für jeden Punkt $P_0 \in \mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{V} \to \mathcal{A} : V \mapsto \tau_V(P_0)$$

eine Bijektion.
2) Für jedes Punktepaar $(P, Q) \in \mathcal{A}^2$ gibt es genau einen Vektor $V \in \mathcal{V}$ mit $\tau_V(P) = Q$. Bezeichnung: $V =: \overrightarrow{PQ}$.

Beweis. 1) Offenbar liegt eine Abbildung vor. Da die Operation transitiv ist, ist die Abbildung surjektiv. Seien $V, W \in \mathcal{V}$ mit $\tau_V(P_0) = \tau_W(P_0)$. Dann ist $V - W$ im Stabilisator

von P_0. Da $\mathcal{V}$ transitiv operiert, sind alle Stabilisatoren konjugiert. Aber $\mathcal{V}$ ist abelsch, also sind alle Stabilisatoren gleich. Da $\mathcal{V}$ aber treu operiert, muß der Stabilisator somit trivial sein, d. h. $V = W$. Also ist unsere Abbildung bijektiv.
2) Aus 1) (Übung). q. e. d.

Übung: Zeige für $P, Q, P', Q' \in \mathcal{A}$ gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$.

Hier sind einige Modelle für affine Räume. Die Beispiele 2) und 2') sind aus Gründen, die bald klar werden, vorzuziehen. Die Modelle 1) und 1') sind verbreiteter.

Beispiel 4.3 *1) Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. Dann ist $\mathcal{A}_0(\mathcal{V}) := \mathcal{V}$ ein affiner Raum mit Operation*

$$\tau : \mathcal{V} \times \mathcal{A}_0(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}_0(\mathcal{V}) : (V, P) \mapsto V + P.$$

2) Ist $\tilde{\mathcal{V}}$ ein K-Vektorraum mit nicht verschwindender Linearform $\varphi : \tilde{\mathcal{V}} \to K$. Setze $\mathcal{V} :=$ Kern(φ) und $\mathcal{A}(\varphi) := \varphi^{-1}(\{1\})$. Dann ist $(\mathcal{A}(\varphi), \mathcal{V}, \tau)$ mit

$$\tau : \mathcal{V} \times \mathcal{A}(\varphi) \to \mathcal{A}(\varphi) : (V, P) \mapsto V + P \text{ in } \tilde{\mathcal{V}} \text{ gerechnet}$$

ein affiner Raum.
1') $\mathcal{A}_0(K^{n\times 1})$ heißt der standardaffine Raum der n-Spalten über K.
2') Wir setzen speziell für $\tilde{\mathcal{V}} = K^{(n+1)\times 1}$ und $\varphi \in (K^{(n+1)\times 1})^*$ die Projektion auf die letzte Komponente:

$$\mathcal{A}_n(K) := \mathcal{A}(\varphi) = \{\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} | X \in K^{n\times 1}\}$$

und nennen ihn den n-dimensionalen affinen Standardraum. Genau genommen ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_n(K)) = \{\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} | X \in K^{n\times 1}\},$$

was wir aber mit dem Vektorraum $K^{n\times 1}$ identifizieren.
2") Wir setzen speziell für $\tilde{\mathcal{V}} = K^{(n+1)\times 1}$ und $\varphi \in (K^{(n+1)\times 1})^*$ die Summe der Komponenten:

$$\mathcal{A}^b_n(K) := \mathcal{A}(\varphi) = \{X \in K^{(n+1)\times 1} | (1, \dots, 1)X = 1\}$$

und nennen ihn den n-dimensionalen affinen baryzentrischen Standardraum. In diesem Fall ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}^b_n(K)) = \{X \in K^{(n+1)\times 1} | (1, \dots, 1)X = 0\}.$$

Wir kommen zur Definition affiner Teilräume.

Definition 4.4 *Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \tau)$ affiner Raum über dem K-Vektorräum $\mathcal{V}$. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ heißt* **affiner Teilraum** *von $\mathcal{A}$, falls ein Teilvektorraum $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ existiert, so daß $(\mathcal{A}', \mathcal{W}, \tau_{|\mathcal{W}\times\mathcal{A}'})$ ein affiner Raum über $\mathcal{W}$ ist.*

Bemerkung 4.5 *Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über $\mathcal{V} := \mathcal{T}(\mathcal{A})$.*
1) Der Translationsraum eines affinen Teilraums von $\mathcal{A}$ ist eindeutig bestimmt.
2) Zu jedem $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ und jedem $P \in \mathcal{A}$ gibt es genau einen affinen Teilraum $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ mit $P \in \mathcal{A}'$ und Translationsraum $\mathcal{T}(\mathcal{A}') = \mathcal{W}$, nämlich $P + \mathcal{W} = \mathcal{W} + P := \tau(\mathcal{W} \times \{P\})$, die Bahn von P unter $\mathcal{W}$.

Beweis. 1) Sofort aus 4.2. 2) Existenz: Verifiziere Eigenschaften für $P + \mathcal{W}$. Eindeutigkeit analog zu 1). q. e. d.

Übung: Der Schnitt affiner Teilräume eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ ist entweder leer oder wieder ein affiner Teilraum. Benutze dies, um das affine Erzeugnis einer Teilmenge von $\mathcal{A}$ zu definieren. Wie sieht das affine Erzeugnis einer zweipunktigen Teilmenge von $\mathcal{A}$ aus?

Wir können bereits einige geometrische Begriffe über die gegenseitige Lage affiner Teilräume zueinander angeben. Daß diese Begriffe jedoch geometrisch sinnvoll sind, d. h. Invarianzeigenschaften gegenüber der affinen Gruppe haben, können wir erst einsehen, wenn wir über affine Abbildungen gesprochen haben.

Definition 4.6 *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$ mit affinen Teilräumen $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$.*
1) Die Teilräume heißen **parallel**, *falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}') = \mathcal{T}(\mathcal{A}'')$.*
2) Sie heißen **schwach parallel**, *falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}'')$ oder $\mathcal{T}(\mathcal{A}'') \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}')$.*
3) Sie heißen **windschief**, *falls $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ und $\mathcal{T}(\mathcal{A}'') \cap \mathcal{T}(\mathcal{A}') = \{0\}$.*

Übung: Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem Vektorraum $\mathcal{V}$. Zeige, daß Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller affinen Teilräume von $\mathcal{A}$ ist. Zeige weiter, daß die Äquivalenzklasse mit zugehörigem Teilraum $\mathcal{W} \leq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ wiederum einen affinen Raum $\mathcal{A}/\mathcal{W}$ bildet, und zwar mit Translationsraum $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. Man nennt $\mathcal{A}/\mathcal{W}$ auch den Bahnenraum von $\mathcal{A}$ mod $\mathcal{W}$. (Beachte: $\mathcal{V}$ operiert zwar auch transitiv auf $\mathcal{A}/\mathcal{W}$, aber nicht treu, es sei denn $\mathcal{W} = \{0\}$.)

Nun kommen wir zur Definition affiner Abbildungen. Die nicht leeren Fasern affiner Abbildungen werden die affinen Teilräume sein.

Definition 4.7 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ affine Räume über den K-Vektorräumen $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$.*
$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt **affine Abbildung**, *falls eine lineare Abbildung $\overline{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ existiert mit $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overline{f}(\overrightarrow{PQ})$ für alle $P, Q \in \mathcal{A}$. $\overline{f}$ heißt auch der* **lineare Anteil** *von f.*

Klar: $\overline{f}$ ist durch f eindeutig festgelegt. Anschaulich interpretieren wir die Bedingung so: Ist $P \in \mathcal{A}$, so liefert $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ eine Identifikation von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{V}$ und $S \mapsto \overrightarrow{f(P)S}$ eine Identifikation von Bild(f) mit Bild$(\overline{f})$. Im Sinne dieser Identifikation ist f dann eine lineare Abbildung, nämlich $\overline{f}$. Es kommt hinzu, daß $\overline{f}$ unabhängig von der Wahl von P ist.

Übung: Translationen sind affine Abbildungen, deren linearer Anteil die Identität des Translationsraumes ist. Sie sind auch die einzigen affinen Abbildungen eines affinen Raumes in sich mit dieser Eigenschaft.

Satz 4.8 *1) Kompositionen affiner Abbildungen sind affin: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affine Räume über K-Vektorräumen mit affinen Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ und $f' : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$, so ist $f' \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ affin mit $\overline{f' \circ f} = \overline{f'} \circ \overline{f}$.*
2) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und bijektiv, so ist $f^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ebenfalls affin mit $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$. (Man sagt, f ist ein **affiner Isomorphismus**.*) Insbesondere ist*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} | f \text{ affin und bijektiv } \}$$

eine Gruppe (Untergruppe von $S_{\mathcal{A}}$), genannt die **affine Gruppe** *von $\mathcal{A}$, und*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) : f \mapsto \overline{f}$$

ein Homomorphismus.
3) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$, so ist $f(\mathcal{A}'')$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{T}(f(\mathcal{A}'')) = \overline{f}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.
4) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$, so ist $f^{-1}(\mathcal{A}'')$ leer oder ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{A}'')) = \overline{f}^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.

Beweis. 1) Für $P, Q \in \mathcal{A}$ ist

$$\overrightarrow{(f' \circ f)(P)(f' \circ f)(Q)} = \overrightarrow{f'(f(P))f'(f(Q))} =$$
$$\overline{f'}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = (\overline{f'} \circ \overline{f})(\overrightarrow{PQ}).$$

2)Wegen der Identifikation von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ist klar, daß $\overline{f} : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ bijektiv ist. (Genauer Beweis: Übung!). Zeige nur noch

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \overline{f}^{-1}(\overrightarrow{P'Q'})$$

für alle $P', Q' \in \mathcal{A}'$. Dies ist aber äquivalent zu

$$\overline{f}(\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}) = \overrightarrow{P'Q'}.$$

3) Übung.
4) Leicht mit 4.5 Teil 2. q. e. d.

Übung: Zeige: Parallelität und schwache Parallelität von affinen Teilräumen bleiben unter affinen Abbildungen erhalten. Die Eigenschaft, windschief zu sein, bleibt unter injektiven affinen Abbildungen erhalten. Wie steht es mit Urbildern?

Wir können etwas unscharf sagen, daß affine Geometrie das Studium von Eigenschaften ist, welche unter affinen Isomorphismen erhalten bleiben, oder auch das Studium der Invarianten der affinen Gruppe bei diversen Operationen. Hier ein Anfang: Die Dimension.

Satz 4.9 *Zwei affine Räume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ über demselben Körper K sind genau dann affin isomorph, wenn* $\dim \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{T}(\mathcal{A}')$. *Man nennt* $\dim \mathcal{A} := \dim \mathcal{T}(\mathcal{A})$ *die* **Dimension** *des affinen Raumes $\mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ affin isomorph zu $\mathcal{A}_n(K)$ für $n = \dim \mathcal{A}$. Ein affiner Isomorphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(K)$ heißt* **affines Koordinatensystem**.

Je nach Präferenz würde man eher einen affinen Isomorphismus auf $\mathcal{A}(K^{n\times 1})$ als affines Koordinatensystem bezeichnen. Wir bevorzugen aber $\mathcal{A}_n(K)$ als Standardmodell. Einen affinen Isomorphismus auf $\mathcal{A}_n^b(K)$ wird man als baryzentrisches Koordinatensystem bezeichnen. Die Idee des Koordinatensystems geht zurück auf DESCARTES,1596-1650, der hierdurch die Algebra und Analysis als Hilfsmittel der Geometrie zugänglich machte.

Beweis. Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ein affiner Isomorphismus, so ist $\overline{f} : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ein Vektorraumisomorphismus, also $\dim \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{T}(\mathcal{A}')$. Umgekehrt, sei $\varphi : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ein Vektorraumisomorphismus. Offenbar ist für jedes beliebige, fest gewählte $P_0 \in \mathcal{A}$ die Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0(\mathcal{T}(\mathcal{A}))(= \mathcal{T}(\mathcal{A})) : P \mapsto \overrightarrow{P_0P}$ ein affiner Isomorphismus (Beweis: Übung). Also erhält man durch Komposition einen affinen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}'$, falls die Dimensionen gleich sind. (Man zeige als Übungsaufgabe: Dieser Isomorphismus ist gegeben durch $P \mapsto P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0P})$, wo $P_0' \in \mathcal{A}'$ beliebig, aber fest gewählt ist.) q. e. d.

Somit ist die Dimension eine affine Invariante. Wir wollen uns ansehen, wie in den verschiedenen Modellen für affine Räume, die wir gesehen haben, die affinen Abbildungen aussehen und dargestellt werden.

Beispiel 4.10 *1) Sind $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ K-Vektorräume, so gilt*

$$\mathcal{A}_0(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}_0(\mathcal{W}) : V \mapsto Q_0 + \varphi(V)$$

ist für jede lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und jedes $Q_0 \in \mathcal{W} = \mathcal{A}(\mathcal{W})$ eine affine Abbildung. Umgekehrt ist jede affine Abbildung $\mathcal{A}_0(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ von dieser Form mit eindeutig bestimmten $Q_0 \in \mathcal{W}$ und φ.
2) Sei $\tilde{\mathcal{V}}, \varphi, \mathrm{Kern}(\varphi) = \mathcal{V}, \mathcal{A}(\varphi) = \varphi^{-1}(1)$ wie in 4.3. Entsprechend nehmen wir einen zweiten affinen Raum mit den Daten $\tilde{\mathcal{W}}, \psi, \mathrm{Kern}(\psi) = \mathcal{W}, \mathcal{A}(\psi) = \psi^{-1}(1)$. Dann ist eine affine Abbildung $f : \mathcal{A}(\varphi) \to \mathcal{A}(\psi)$ nichts anderes als die Einschränkung einer linearen Abbildung $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, welche $\mathcal{A}(\varphi)$ in $\mathcal{A}(\psi)$ abbildet, d. h. für die $\psi \circ \alpha = \varphi$. Wir haben also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\varphi) & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{\mathcal{W}} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ K & = & K \end{array}$$

Übung: α legt f eindeutig fest und umgekehrt.
Wichtiger Spezialfall: $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_n(K))$ *kann mit der Matrixgruppe*

$$\mathrm{Aff}(n,K) := \{\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in \mathrm{GL}(n,K), t \in K^{n\times 1}\} \leq \mathrm{GL}(n+1,K)$$

identifiziert werden, die durch Linksmultiplikation auf $\mathcal{A}_n(K)$ operiert (ähnliche Operationen!). Man beachte, daß $\mathrm{Aff}(n,K)$ *schon als Stabilisator eines Kovektors als Untergruppe von* $\mathrm{GL}(n+1,K)$ *früher vorkam.*

Übung: Verifiziere und interpretiere die folgenden drei Formeln in $\mathrm{Aff}(n, K)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b & s \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} ab & as+t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} & -a^{-1}t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

und

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & s \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & as \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}$$

und zeige, daß der Homomorphismus "linearen Anteil nehmen" durch

$$\mathrm{Aff}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K) : \left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto a$$

gegeben ist.

Dieses letzte Beispiel kann natürlich als eine Einladung verstanden werden, Begriffe, die wir bei Vektorräumen studiert haben, auf affine Räume zu übertragen und dann nach der geometrischen Bedeutung zu fragen. Die andere Möglichkeit ist, sich durch das Operationskonzept leiten zu lassen und nach Invarianten zu fragen. Dies ist übrigens die ursprüngliche Idee von Felix Klein, der vor ungefähr 130 Jahren in seinem Erlanger Programm gesagt hat: Geometrie ist das Studium der Invarianten gewisser geometrischer Gruppenoperationen.

Bemerkung 4.11 $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *ist transitiv auf* $\mathcal{A}$ *und hat genau zwei Bahnen auf* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *gemäß den zwei Bahnen von* $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ *auf* $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Übung: Sei $P_0 \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeige: Jedes $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ kann in eindeutiger Weise als $f = \tau_V \circ \alpha$ geschrieben werden mit $V \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\alpha \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_0)$. Beachte: $\tau_V \circ \alpha = \alpha \circ \tau_{\overline{\alpha}^{-1}(V)}$. Zeige weiter: Die Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ ist ähnlich zu der von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_0)$ auf $\mathcal{A}$.

Bei der Operation auf Tripeln bekommen wir die ersten geometrischen Invarianten.

Definition 4.12 *1)* $P \in \mathcal{A}^n$ *heißt* **affin unabhängig**, *falls für jeden affinen Raum* $\mathcal{A}'$ *über* K *und jedes Tupel* $Q \in (\mathcal{A}')^n$ *eine affine Abbildung* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *existiert, mit* $f \circ P = Q$, *d. h.* $f(P_i) = Q_i$ *für* $i = 1, \dots, n$.
2) Für $M \subseteq \mathcal{A}$ *heißt*

$$\langle M \rangle_a := \cap \mathcal{B},$$

wo $\mathcal{B}$ *alle affinen Teilräume von* $\mathcal{A}$ *durchläuft mit* $M \subseteq \mathcal{B}$, *das affine Erzeugnis oder der von* M *erzeugte affine Teilraum von* $\mathcal{A}$. *(Analog für* $M \in \mathcal{A}^n$*).*
3) $P \in \mathcal{A}^n$ *heißt* **kollinear** *bzw.* **komplanar**, *falls* $\dim\langle P \rangle_a \leq 1$ *bzw.* ≤ 2 *gilt.*

Bemerkung 4.13 *Für $P \in \mathcal{A}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
1) P ist affin unabhängig.
2) $\dim\langle P\rangle_a = n-1$.
3) $(\overrightarrow{P_nP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_nP_{n-1}}) \in \mathcal{T}(\mathcal{A})^{n-1}$ ist linear unabhängig.
4) $P \in \tilde{\mathcal{V}}^n$ ist linear unabhängig, falls $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi) \subset \tilde{\mathcal{V}}$ wie in 4.3.
5) Die affine Abbildung $\mathcal{A}^b_{n-1}(K) \to \langle P\rangle_a : (I_n)_{-,i} \mapsto P_i$ definiert einen affinen Isomorphismus.

Beweis. Übung, z. B. in der Reihenfolge: 1) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) und 5) $\Leftrightarrow$ 4). q. e. d.

Sofort klar ist die folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.14 *1) Affine Abhängigkeit von Tupeln bleibt erhalten unter beliebigen affinen Abbildungen.*
2) Affine Unabhängigkeit bleibt unter injektiven affinen Abbildungen erhalten.

Satz 4.15 *1)*$\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *operiert transitiv auf der Menge $\mathcal{A}^3_{generisch}$ der affin unabhängigen Tripel in $\mathcal{A}^3$ (nicht entartete Dreiecke), falls* $\dim(\mathcal{A}) > 1$.
2)Eine trennende Invariante für die Operation von $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *auf der Menge $\mathcal{A}^3_{spez} := \{P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^3 | P_1 \neq P_2, P$ kollinear $\}$ ist das* **Teilverhältnis**. *Dabei ist das Teilverhältnis $TV(P)$ von $P \in \mathcal{A}^3_{spez}$ definiert als das eindeutige $a \in K$ mit $\overrightarrow{P_1P_3} = a\overrightarrow{P_1P_2}$.*

Beweis. 1) Wir können oBdA in $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi) \subset \tilde{\mathcal{V}}$ arbeiten. Offenbar hat $\tilde{\mathcal{V}}$ eine Basis $B \in \mathcal{A}^{n+1}$ und jedes affin unabhängige Tripel $P \in \mathcal{A}^3$ kann zu einer solchen Basis $\hat{P} \in \mathcal{A}^{n+1}$ von $\tilde{\mathcal{V}}$ ergänzt werden. Es genügt nun zu zeigen, daß ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ existiert, mit $f((B_1, B_2, B_3)) = P$. Dies ist aber klar, denn ein solches f wird induziert von der eindeutigen linearen Abbildung von $\tilde{\mathcal{V}}$, die B auf $\hat{P}$ abbildet.
2) Daß eine Invariante vorliegt, ist klar. Um zu zeigen, daß sie die Bahnen trennt, gehen wir wieder von der Situation des Beweises von 1) aus mit der Basis B. Sei $P \in \mathcal{A}^3_{spez}$ mit Teilverhältnis $a \in K$. Es genügt zu zeigen, daß ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ existiert mit $f((B_1, B_2, B_1 + a(B_2 - B_1))) = P$. Zu diesem Zweck ergänzt man (P_1, P_2) zu einer Basis $\hat{P} \in \mathcal{A}^{n+1}$ von $\tilde{\mathcal{V}}$. Die lineare Abbildung, die B auf $\hat{P}$ abbildet, induziert den gewünschten affinen Automorphismus. q. e. d.

Aus dem letzten Beweis erhalten wir eine Folgerung, die eine sehr anschauliche Vorstellung von der affinen Gruppe liefert.

Folgerung 4.16 *Sei* $\dim(\mathcal{A}) = n$. *Dann operiert* $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *transitiv auf $\mathcal{A}^{n+1}_{generisch}$, der Menge der affin unabhängigen $(n+1)$-Tupel (n-Simplizes) und der Stabilisator eines solchen Tupels ist trivial (Eine solche Operation heißt regulär.). In anderen Worten, ist $P \in \mathcal{A}^{n+1}_{generisch}$, so ist*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{n+1}_{generisch} : f \mapsto f(P)$$

eine Bijektion.

Wenn man bedenkt, daß ein affin unabhängiges $(n+1)$-Tupel P in einem n-dimensionalen affinen Raum eine Fahne festlegt, nämlich $\{P_1\} \subset \langle P_1, P_2\rangle_a \subset \ldots \subset \langle P_1, \ldots, P_{n+1}\rangle_a = \mathcal{A}$, so bekommt man eine weitere Folgerung.

Folgerung 4.17 $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *operiert transitiv auf der Menge der Fahnen von* $\mathcal{A}$.

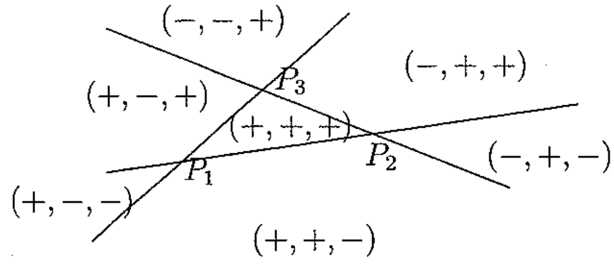
Übung: Man bestimme den Stabilisator einer Fahne. Hinweis: Zeige zuerst: die Operation von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_1)$ auf $\mathcal{A}$ ist ähnlich zu der von $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Übung: Gib eine trennende Invariante auf der Menge

$$\mathcal{A}^4_{spez} := \{P \in \mathcal{A}^4 | P \text{ affin abhängig}, (P_1, P_2, P_3) \text{ affin unabhängig}\}$$

an, welche eine echte Teilmenge der ebenen Vierecke ist. (Hinweis: Betrachte $\beta^{-1}(P_4)$, wo $\beta : \mathcal{A}^b_2(K) \to \langle P\rangle_a$ der eindeutige affine Isomorphismus ist mit $\beta((I_3)_{-,i}) = P_i$ für $i = 1, 2, 3$.)

Übung: Man verifiziere und diskutiere die Vorzeichenverteilung bei den ebenen baryzentrischen reellen Koordinaten gemäß der Vorgabe der vorigen Aufgabe. Für das Innere des Dreiecks kann man sich eine Massenverteilung an den Punkten P_1, P_2, P_3 vorstellen mit Gesamtmasse 1. Der durch die Koordinaten angesprochene Punkt ist dann der Schwerpunkt.



Wir wollen jetzt erste geometrische Sätze beweisen. Den ersten Satz kann man als weitgehende Verallgemeinerung einer Version des Strahlensatzes auffassen.

Satz 4.18 *Sei* $\dim(\mathcal{A}) = n$ *und* H_i *für* $i = 1, 2, 3$ *Hyperebenen in* $\mathcal{A}$, *also affine Teilräume der Dimension* $n-1$. H_1, H_2, H_3 *seien parallel und* $H_1 \neq H_2$.
1) Jede Gerade (= 1-dimensionaler affiner Teilraum von $\mathcal{A}$*), die nicht schwach parallel zu* H_1 *ist, hat genau einen Schnittpunkt mit* H_i *für* $i = 1, 2, 3$. *(Die Schnittpunkte sind offenbar kollinear.)*
2) Das Teilverhältnis der drei Schnittpunkte aus 1) ist unabhängig von der Wahl der Geraden und legt H_3 *auf Grund der Nebenbedingungen* $\dim H_3 = n-1, H_3 \parallel H_1$ *eindeutig fest.*

<u>Beweis.</u> 1. Beweis. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{T}(H_1) = \mathcal{T}(H_2) = \mathcal{T}(H_3)$. Wir betrachten $\mathcal{A}/\mathcal{W} := \{P + \mathcal{W} | P \in \mathcal{A}\}$ als eindimensionalen affinen Raum und beachten, daß $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{W} : P \mapsto P + \mathcal{W}$ eine affine Abbildung ist. Für jede Gerade G, wie in 1) spezifiziert, ist $\nu_{|G}$ ein

affiner Isomorphismus. Klar: Die Schnittpunkte sind $\nu_{|G}^{-1}(H_i)$ und die Behauptung über die Teilverhältnisse folgt auch, da diese bei Anwendung von affinen Isomorphismen fest bleiben.
2. Beweis. Sei G eine Gerade wie in 1) angegeben. Dann gilt $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(H_1) \oplus \mathcal{T}(G)$. Entsprechend haben wir eine affine Abbildung, genauer eine **Parallelprojektion**, von $\mathcal{A}$ auf G, nämlich

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : P \mapsto P' \text{ mit } \{P'\} = (P + \mathcal{T}(H_1)) \cap G.$$

(Man muß nachrechnen, daß dies eine affine Abbildung ist. Die Projektionseigenschaft ist klar.) Jetzt kann der Beweis analog zum ersten Beweis fortgesetzt werden. q. e. d.

Übung: Definiere Parallelprojektionen allgemein.

Übung: Zeige, daß in der affinen Ebene zwei Geraden sich entweder schneiden oder parallel sind.

Wurde der letzte Satz mit Hilfe von Parallelprojektionen bewiesen, so benötigen wir für den nächsten Satz Streckungen, also affine Abbildungen der Form

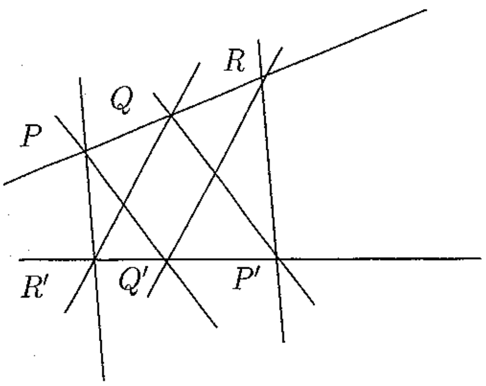
$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} : P \mapsto P_0 + a\overrightarrow{P_0P},$$

wobei das feste $P_0 \in \mathcal{A}$ das Streckzentrum ist und das feste $a \in K^*$ der Streckfaktor. Z. B. kann man sie benutzen, um den Strahlensatz zu beweisen.

Übung: Zeige: Je zwei Streckungen von $\mathcal{A}$ sind konjugiert in $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn sie denselben Streckfaktor haben. Die Streckungen zusammen mit den Translationen bilden eine Gruppe isomorph zur Matrixgruppe

$$\{\left(\begin{array}{c|c} aI_n & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in K^*, t \in K^{n\times 1}\}.$$

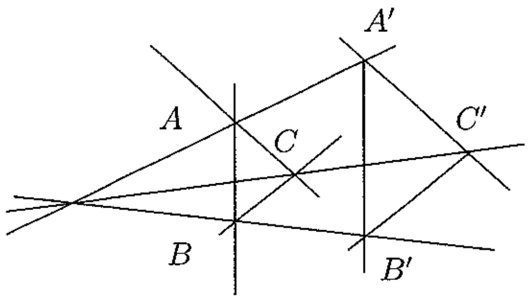
Satz 4.19 (Pappos) *Seien* $\dim(\mathcal{A}) = 2$ *und* D, D' *zwei Geraden in* $\mathcal{A}$ *mit sechs verschiedenen Punkten* $P, Q, R \in D$, $P', Q', R' \in D'$, *von denen keiner in* $D \cap D'$ *liegt. Gilt* $\langle P, Q'\rangle_a \parallel \langle Q, P'\rangle_a$ *und* $\langle Q, R'\rangle_a \parallel \langle R, Q'\rangle_a$, *so folgt* $\langle P, R'\rangle_a \parallel \langle R, P'\rangle_a$.



Beweis. Falls D und D' sich schneiden, arbeitet man mit den beiden Streckungen mit Zentrum $D \cap D'$, die P in Q und somit auch Q' in P' überführen bzw. Q nach R und somit auch R' nach Q' überführen. Die Komposition der beiden überführt P nach R und gleichzeitig P' nach R', da die Multiplikation in K kommutativ ist. Falls D und D' sich nicht schneiden, arbeitet man mit Translationen, denn dann sind D und D' parallel. q. e. d.

Eigentlich ist der Satz von PAPPOS ein Satz, der zur projektiven Geometrie gehört. Ähnlich ist es mit dem Satz von DESARGUES, der sich im affinen Raum abspielt. Der Beweis, den ich geben werde, ist vielleicht vom synthetisch-geometrischen Standpunkt aus nicht schön, demonstriert aber die DESCARTESsche Idee, durch Einführung von Koordinaten geometrische Sätze durch algebraische Rechnungen zu beweisen. Für kompliziertere Situationen kann man sogar Computer heranziehen, um derartige Beweise "durchzurechnen".

Satz 4.20 *(DESARGUES*) Seien $(A,B,C),(A',B',C') \in \mathcal{A}^3_{generisch}$ zwei nicht entartete Dreiecke, die keine Eckpunkte gemeinsam haben und für die $\langle A,B\rangle_a \parallel \langle A',B'\rangle_a$, $\langle B,C\rangle_a \parallel \langle B',C'\rangle_a$, $\langle A,C\rangle_a \parallel \langle A',C'\rangle_a$. Dann schneiden sich die drei Geraden $\langle A,A'\rangle_a$, $\langle B,B'\rangle_a$, $\langle C,C'\rangle_a$ in einem gemeinsamen Punkt oder sind paarweise parallel.*



Beweis. Da die beiden Dreiecke nicht entartet sind, erzeugen sie einen drei- oder zweidimensionalen affinen Raum. Wir behandeln zunächst den ersten Fall: OBdA ist (A,B,C,A') nicht komplanar. Dann können wir affine Koordinaten $\kappa : \langle A,B,C,A',B',C'\rangle_a \to \mathcal{A}_0(K^{3\times 1})$ so wählen (wir arbeiten hier nicht mit $\mathcal{A}_n(K)$, weil es uns nicht weiter hilft!), daß

$$\kappa(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Wegen der Parallelität der Seiten folgt durch kurze Rechnung

$$\kappa(B') = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa(C') = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

für ein $a \in K$. Da (A',B',C') nicht kollinear ist, folgt $a \neq 0$. Im Falle $a = 1$ sind die drei Geraden $\langle A,A'\rangle_a, \langle B,B'\rangle_a, \langle C,C'\rangle_a$ parallel. Anderenfalls schneiden sie sich in dem Punkt

*Genauer handelt es sich um eine affine Konsequenz der Umkehrung des (projektiven) Satzes von DESARGUES. Die Umkehrung ergibt sich aber durch Dualisieren aus dem ursprünglichen Satz von DESARGUES, wie noch gezeigt werden wird.