Hallo ihr Lieben!
Meine sehr ausführlichen Lösungen zu diesem Übungsblatt von Dr. Lübeck. Ich habe selber noch zwei Aufgaben hinzugefügt und hoffe das auch die Erklärungen bei den Lösungen zum besseren verständnis beitragen. Einige Aufgaben habe ich mit sinnvollen Unterpunkten ergänzt.

Übungsblatt 13

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Frank Lübeck, SS 2010

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Do 22 Jul 2010 10:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Do 15 Jul 2010 18:47:36 CEST

Diese Übung besteht aus typischen Klausuraufgaben. Von den 50 erwerbbaren Punkten bräuchten Sie 25 zum Bestehen. Bis zu 40 Ihrer erworbenen Punkte werden auf Ihren Hausaufgabenpunktestand angerechnet (Online oder schriftlicher Teil, wie benötigt). Zur Klausurzulassung sind damit mindestens je 100 Punkte in den Online-Aufgaben und schriftlichen Aufgaben, sowie mindestens 240 Punkte insgesamt nötig.
Bitte werfen Sie Ihre Lösungen (inklusive der ausgefüllten Aufgabenblätter) **getackert** in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik. Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt deutlich Ihre Matrikelnummer, Ihren Namen und Ihre **Gruppennummer**.

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

74 Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{1+a}$ *(1 Punkt)*

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{a \neq -1}$ *(1 Punkt)*

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{a \in \{0,-2\}}$ *(1 Punkt)*

(d) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_{-1}. $\boxed{-1, 0, 2}$ *(1 Punkt)*

(e) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_{-1} an. *(3 Punkte)*

(f) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_a, also in Abhängigkeit von a!

(g) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A_{-1}, 0)$, also den Kern berechnen.

(h) Sofern möglich, bestimmen Sie die Diagonalmatrise $D = T^{-1} \cdot A_{-1} \cdot T$.

(i) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen von Bild(A_{-1}) an.

(j) Es sei $a = 0$. Bestimmen Sie die Inverse A_0^{-1}.
Es sei $a = -2$. Bestimmen Sie die Inverse A_{-2}^{-1}.

75 Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(5 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$

76 Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u,v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ für $u = (u_1,u_2,u_3)^t$ und $v = (v_1,v_2,v_3)^t$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)*

$$x = (1,1,1)^t, \quad y = (1,1,0)^t, \quad z = (1,0,0)^t$$

mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis O.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Gegeben seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit *(je 1 Punkt)*

$$\kappa_O(u) = (-1,2,3)^t, \quad \kappa_O(v) = (0,-3,1)^t, \quad \kappa_O(w) = (-2,-4,2)^t.$$

Bestimmen Sie

$\|u\| = \boxed{\sqrt{14}}$, $\|v-w\| = \boxed{\sqrt{6}}$, $\|v+w\| = \boxed{\sqrt{62}}$, $(v,w) = \boxed{14}$.

77	Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung $$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. *(4 Punkte)* $$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (b) Bestimmen Sie den Rang von φ. $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{3}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ (d) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an. $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$
78	Betrachten Sie den von $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, und $f_3 : x \mapsto \cos x$ erzeugten Untervektorraum V von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Es bezeichne $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die Ableitung, d.h. $\varphi(\sin x) = \cos x$ und $\varphi(\cos x) = -\sin x$. (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ. *(1 + 1 Punkte)* $\chi_\varphi = \boxed{}$ $\mu_\varphi = \boxed{}$ (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

79	Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $0 \neq v \in V$ ein linear unabhängiges 2-Tupel (u,w) gibt mit $v = u + w$. *(3 Punkte)*
80	Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit L werde der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A bezeichnet (also $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$). Weiter bezeichne $L^\perp$ den Orthogonalraum von L bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$ (also $L^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0$ für alle $v \in L\}$). Zeigen Sie, dass $L^\perp$ gleich dem Spaltenraum von A^t ist. *(5 Punkte)*
81	Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist. *(3 Punkte)*
82	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ mit $(A - E_n)^n = 0$ und $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$. Zeigen Sie: *(2+1+1 Punkte)* (a) A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. (b) A ist invertierbar. (c) A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn $n = 1$ ist.
83	Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix geschrieben werden kann. *(5 Punkte)*

Abgabe bis spätestens am Donnerstag, dem 22. Juli 2010, um 10 Uhr am Zettelkasten. Lösungen der Aufgaben werden Donnerstag online veröffentlicht und in der Fragestunde besprochen.
Bitte geben Sie diese Hausaufgabe nur ab, falls Ihnen noch Punkte zur Klausurzulassung fehlen, um den Korrekturaufwand für die Hilfskräfte minimal zu halten.

zu a)

$$\det(A_a) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(0-1) - 1(0-a)$$

$$= \underline{\underline{1+a}}$$

zu b)

$$1+a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a \neq -1}}$$

zu c)

$$1+a = 1 \qquad \text{und} \qquad 1+a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \qquad \qquad \Leftrightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a \in \{0, -2\}}}$$

zu d)

$$CP(A_{-1}) = \det(A_{-1} - \lambda E)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda[(-1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1] + 1[1 + 1(-1-\lambda)]$$

$$= -\lambda(-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2-1) + (1-1-\lambda)$$

$$= -\lambda(-3-\lambda+\lambda^2) - \lambda$$

$$= 3\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda$$

$$= \underline{\underline{-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda}}$$ ist das charakteristische Polynom der Matrix A_{-1}.

Aufgabe 74, Seite 2/9

Eigenwerte:

$$-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\cdot(-\lambda^2+\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_A=0 \quad \vee \quad -\lambda^2+\lambda+2=0 \;|:(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{B/C}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_B=2 \quad \text{und} \quad \lambda_C=-1$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$ und $\lambda_3=2$. Da jeder Eigenwert genau einmal vorkommt hat jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1. Mit Hilfe der Eigenwerte kann man nun das charakteristische Polynom auch in Linearfaktoren angeben:

Exponent = algebr. Viel.

$$p(\lambda)=(\lambda+1)^1\cdot\lambda^1\cdot(\lambda-2)^1\cdot(-1)$$

Eigenwerte: $\longrightarrow$ $\lambda=-1$ $\quad\lambda=0$ $\quad\lambda=2$

Test für λ's: $\longrightarrow 0 \quad \longrightarrow 0 \quad \longrightarrow 0$

Algebraische Vielfachheit vom Eigenwert 2 ist 1, also: $a_{A_{-1}}(2)=1$, algebraische Vielfachheit vom Eigenwert 0 ist 1, also: $a_{A_{-1}}(0)=1$ und algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 ist 1, also: $a_{A_{-1}}(-1)=1$.

Man muß $p(\lambda)$ schließlich noch mit -1 multiplizieren, weil bei der Berechnung der Eigenwerte durch -1 geteilt wurde.

Den Schritt sozusagen rückgängig machen. Der Exponent eines jeden Linearfaktors repräsentiert dabei auch die algebraische Vielfachheit des jeweiligen Eigenwertes. Es empfiehlt sich die -1 schließlich mit einem der Linearfaktoren zu multiplizieren. Das ist möglich bei Linearfaktoren mit Exponent 1 (= algebraische Vielfachheit 1), hier in diesem Fall kommen also alle drei Linearfaktoren in Frage.

Möglichkeit 1: $p(\lambda)=(-\lambda-1)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)$

Möglichkeit 2: $p(\lambda)=(\lambda+1)\cdot(-\lambda)\cdot(\lambda-2)$

Möglichkeit 3: $p(\lambda)=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(-\lambda+2)$

Probe, Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned}
&(-\lambda-1)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)\\
&=(-\lambda^2-\lambda)\cdot(\lambda-2)\\
&=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda^2+2\lambda\\
&=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda \overset{!}{=\!=} CP(A_{-1})=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda
\end{aligned}$$

Probe, Möglichkeit 2:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+1)\cdot(-\lambda)\cdot(\lambda-2)\\
&=(-\lambda^2-\lambda)\cdot(\lambda-2)\\
&=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda^2+2\lambda\\
&=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda \overset{!}{=\!=} CP(A_{-1})=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda
\end{aligned}$$

Probe, Möglichkeit 3:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(-\lambda+2)\\
&=(\lambda^2+\lambda)\cdot(-\lambda+2)\\
&=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda^2+2\lambda\\
&=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda \overset{!}{=\!=} CP(A_{-1})=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda
\end{aligned}$$

Multipliziert man alle drei Möglichkeiten aus erhält man immer $CP(A_{-1})=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda$!

zu e,

Eigenvektoren:

$$(A_{-1}-\lambda E)v=0$$

$$\lambda:=\lambda_1=-1 \quad \text{einsetzen}$$

$$(A_{-1}+1E)v=0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-3) \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ \leftarrow + \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array} \Longrightarrow \begin{aligned} x+y&=0\\ z&=0\end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x&=-y\\ z&=0\end{aligned}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = y\cdot\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{Eig_{A_{-1}}(-1)=\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)}},$$

$\dim(Eig_{A_{-1}}(-1))=\dim(Ker(A_{-1}+1E))=$ geometrische Vielfachheit, also die Dimension des Kerns ist $g_{A_{-1}}(-1)=1$.

Analog für λ_2:

$(A_{-1} - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_2 = 0$

einsetzen

$(A_{-1} + 0E)v = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 1 \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = -3z \\ y = z \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen stehen)

hier geht's weiter

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Eig}_{A_{-1}}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim(\mathrm{Eig}_{A_{-1}}(0)) = \dim(\mathrm{Ker}(A_{-1} + 0E)) =$ geometrische Vielfachheit, also die Dimension des Kerns ist $g_{A_{-1}}(0) = 1$.

Analog für λ_3:

$(A_{-1} - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_3 = 2$

einsetzen

$(A_{-1} - 2E)v = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ |\cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

nächste Seite geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:3 \\ |:(-3) \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + \frac{1}{3} z = 0 \\ y - \frac{1}{3} z = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben links vom Gleichheitszeichen stehen)

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} z \\ y = \frac{1}{3} z \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wähle $z = 3$ um die Brüche loszuwerden und erhalte den dritten Eigenvektor: $\underline{\underline{\mathrm{Eig}_{A_{-1}}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}}$

$\dim(\mathrm{Eig}_{A_{-1}}(2)) = \dim(\mathrm{Ker}(A_{-1} - 2E)) =$ geometrische Vielfachheit, also die Dimension des Kerns ist $g_{A_{-1}}(2) = 1$.

<u>zu f_1</u>

$$\begin{aligned}
CP(A_a) &= \det(A_a - \lambda E) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ | \cdot \lambda \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda & -1+2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1+2\lambda-\lambda^2 \\ a-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1+2\lambda-\lambda^2 \\ a-\lambda & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (1+\lambda) \cdot 1 - (a-\lambda) \cdot (-1 + 2\lambda - \lambda^2)$$

$$= 1 + \lambda - (-a + 2a\lambda - a\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3)$$

Aufgabe 74, Seite 6/9

$$= 1 + \lambda + a - 2a\lambda + a\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda^2 - 2a\lambda + 1 + a$$
$$= \underline{\underline{-\lambda^3 + (2+a)\cdot\lambda^2 - 2a\lambda + (1+a)}}$$

Zu g_1

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Kern}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid\cdot(-1) \quad \mid\cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = -3z \\ y = z \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{L}(A_{-1}, 0) = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{Q} \right\}$$

Probe:

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \checkmark$$

OK

Aufgabe 74, Seite 7/9

zu h)

Aus den vorhergehenden gelösten Aufgabenpunkten wissen wir u. a. das Folgendes gilt:

$$a_{A_{-1}}(-1) = 1 \stackrel{!}{=} 1 = g_{A_{-1}}(-1)$$

$$a_{A_{-1}}(0) = 1 \stackrel{!}{=} 1 = g_{A_{-1}}(0)$$

$$a_{A_{-1}}(2) = 1 \stackrel{!}{=} 1 = g_{A_{-1}}(2)$$

Das sieht also sehr gut aus und man kann die Diagonalmatrix bestimmen:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmung T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | \cdot 1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \leftarrow + \\ \leftarrow + & \\ | \cdot 2 & | \cdot (-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ | \cdot (-2) \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ | \cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ | \cdot 1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} | : 3 \\ | : (-2) \\ | : 6 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{matrix}}_{T^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 74, Seite 8/9

$$D = T^{-1} \cdot A_{-1} \cdot T$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

← Wie man erkennt stehen die Eigenwerte auf den Diagonalen.

zu i,

Zuerst A_{-1} transponieren und dann rechnen:

$$A_{-1}^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot 1 \\ \leftarrow + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Bild}(A_{-1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 74, Seite 9/9

zu j,

Bestimmung A_0^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot(-1)\\ \\ \leftarrow +\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 1&0&3&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow +\\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-3)\\ \leftarrow +\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&-1&-3&1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&-3&1\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} -1&-3&1\\ 1&1&0\\ 0&1&0\end{array}}_{A_0^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \quad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1&-3&1\\ 1&1&0\\ 0&1&0\end{pmatrix}$$

Bestimmung A_{-2}^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&-1&1&0&0\\ 0&-2&1&0&1&0\\ 1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot 2 \quad |\cdot(-1)\\ \leftarrow +\\ \leftarrow +\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&-1&1&0&0\\ 0&0&-1&2&1&0\\ 1&0&3&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow +\\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 3\\ \leftarrow +\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&0&-1&-1&0\\ 0&0&-1&2&1&0\\ 1&0&0&5&3&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |\cdot(-1)\\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&0&-1&-1&0\\ 0&0&1&-2&-1&0\\ 1&0&0&5&3&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&5&3&1\\ 0&1&0&-1&-1&0\\ 0&0&1&-2&-1&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 5&3&1\\ -1&-1&0\\ -2&-1&0\end{array}}_{A_{-2}^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \quad A_{-2}^{-1} = \begin{pmatrix} 5&3&1\\ -1&-1&0\\ -2&-1&0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 75, Seite 1/3

$\mathbb{F}_3$ bedeutet:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & \\ \cdots & -5 & -2 & 1 & 4 & 7 & \cdots \\ & -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & \end{array}$$

gesucht: $\mathrm{Sol}(A,b) = s + \mathrm{Sol}(A,0)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

1-ter Lösungsweg:

Die eingekreisten "1"-en sind die Pivotelemente, jetzt fügt man eine weitere Zeile hinzu die in der vierten Spalte eine "1" und im b-Teil den Parameter P stehen hat.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

nächste Seite geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0+0\cdot p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0+(-1)\cdot p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1+0\cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0+1\cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1+0\cdot p \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0+0\cdot p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0+2\cdot p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2+0\cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0+1\cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+0\cdot p \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Sol}(A,b) = s + \mathrm{Sol}(A,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für b:

$$A \cdot s = \underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{=}{\overset{\mathbb{F}_3}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b \checkmark$$

Mul. $\underline{\underline{\text{OK}}}$ mögl.

Probe für Kern:

$$\underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{=}{\overset{\mathbb{F}_3}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Mu. $\underline{\underline{\text{OK}}}$ mögl.

2-ter Lösungsweg:

Wir nehmen die obige Matrix mit den eingekreisten "1"-en und kennzeichnen jede Spalte mit einem Buchstaben:

Aufgabe 75, Seite 3/3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & s & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y + s &= 0 \\ z &= -1 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x &= 0 + 0s \\ y &= 0 + 2s \\ z &= 2 + 0s \\ t &= 2 + 0s \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Sol}(A, b) = s + \mathrm{Sol}(A, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zu a,

Mit $w_1 = x$ und den inneren Produkten

wegen

$$\langle y, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+3\cdot0\cdot1 = 3$$

Koeffizientenvektor des gegebenen Skalarprodukts

und

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 6 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = y - \frac{\langle y, w_1\rangle^+}{\langle w_1, w_1\rangle^+}\cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{6}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/2\\2/2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}}}.$$

weiter ist

$$\langle z, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\langle z, w_2\rangle^+ = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

Nicht kürzen, macht sich nachher beim normieren bezahlt!

$$\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2\rangle^+ = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{6}{4} \quad \text{womit}$$

$$w_3 = z - \frac{\langle z, w_1\rangle^+}{\langle w_1, w_1\rangle^+} w_1 - \frac{\langle z, w_2\rangle^+}{\langle w_2, w_2\rangle^+} w_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/6 \\ -2/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Mit $\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3 \rangle^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{6}{9}$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2, 3$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2 und w_3:

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{4}}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{9}}} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$.

Aufgabe 76, Seite 3/3

zu b,

Bestimmung $\|u\|$:

$$\|u\| = \sqrt{\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}} = \sqrt{1+4+9} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

Bestimmung $\|v-w\|$:

$$\|v-w\| = \sqrt{\left[\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]} = \sqrt{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{4+1+1}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{6}}}$$

Bestimmung $\|v+w\|$:

$$\|v+w\| = \sqrt{\left[\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]} = \sqrt{\begin{pmatrix}-2\\-7\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-7\\3\end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{4+49+9}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{62}}}$$

Bestimmung (v,w):

$$(v,w) = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix} = 0\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)+1\cdot 2 = \underline{\underline{14}}$$

Aufgabe 77, Seite 1/3

zu a)

Vorüberlegung:

$$\varphi: \mathbb{Q}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A + A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ d & d \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b+c & 2b+d \\ d & d \end{bmatrix}$$

"Neue" Basis

Alte Basis

E_{11} einsetzen

ergibt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

1-te Spalte

"Neue" Basis

Alte Basis

E_{12} einsetzen

ergibt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2-te Spalte

"Neue" Basis

Alte Basis

E_{21} einsetzen

ergibt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

3-te Spalte

Aufgabe 77, Seite 2/3

Alte Basis $\downarrow$ E_{22} einsetzen

"Neue" Basis: E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}

$$\varphi\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\end{array}$$

4-te Spalte

Es ergibt sich schließlich die Abbildungsmatrise:

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

zu b)

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-1)\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ |:2\\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow + \\ |\cdot(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rang}(\varphi)=\underline{\underline{3}}.$$

zu c)

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Suche nach Kern, also:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&2&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}\\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-1)\end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ |:2\\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow + \\ |\cdot(-1)\\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array} \Longrightarrow \begin{aligned} a+c&=0\\ b&=0\\ d&=0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 77, Seite 3/3

$$\Longleftrightarrow \quad a = -c \quad (\Longleftrightarrow c = -a)$$
$$b = 0$$
$$d = 0$$

Fließt hier mit ein. Man kann also c durch $-a$ ausdrücken und somit die freie Variable c rausschmeißen!

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zu d)

φ erst transponieren und dann rechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | : 2 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (-1) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1 \; 0 \; 0 \; 0} \\ \boxed{0 \; 1 \; 0 \; 0} \\ \boxed{0 \; 0 \; 1 \; 1} \\ 0 \; 0 \; 0 \; 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Bild}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Standardskalarprodukt

gegeben: $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

wobei $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

gesucht:

a) Charakteristisches Polynom
b) $\det(B)$
c) Inverse von B, also B^{-1}
d) Orthonormalbasis von B

Lösung

zu a)

$$
\begin{aligned}
CP(B) &= \det(B - \lambda E) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot [(1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 8] + 2 \cdot [8 - 4\cdot(1-\lambda)] \\
&= (2-\lambda)\cdot(-\lambda + \lambda^2 - 8) + 2 \cdot (8 - 4 + 4\lambda) \\
&= (2-\lambda)\cdot(-8 - \lambda + \lambda^2) + 16 - 8 + 8\lambda \\
&= -16 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 8\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + 8 + 8\lambda \\
&= \underline{\underline{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 14\lambda - 8}}
\end{aligned}
$$

zu b)

$$\det(B) = \underline{\underline{-8}}$$

Zusatzaufgabe 1/2, Seite 2/3

zu c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ |\cdot(-4) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ |\cdot 2 \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ + \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ |:(-4) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{matrix}}_{B^{-1}}$$

zu d)

Mit $w_1 = b_1$ und den inneren Produkten

$$\langle b_2, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 16 \quad \text{und} \quad \|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

ist

$$w_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{16}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

weiter ist

$$\langle b_3, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8,$$

$$\langle b_3, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{und}$$

$$\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{womit}$$

$$w_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle b_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{folgt.}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Mit $\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 8$ und $\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2, 3$

führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2 und w_3

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis $V = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Bestimme eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$ (mit Standardskalarprodukt):

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Bestimme das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ von $\mathcal{U}$.

(c) Sei $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Berechne die orthogonale Projektion $\Pi_{\mathcal{U}^\perp}(v)$ von v auf $\mathcal{U}^\perp$.

(d) Sei $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Berechne die orthogonale Projektion $\Pi_{\mathcal{U}}(v)$ von v auf $\mathcal{U}$.

(e) Berechnen Sie den Abstand zwischen v und $\mathcal{U}$.

(f) Berechnen Sie den Abstand zwischen v und $\mathcal{U}^\perp$.

Lösung

Zu a,

Mit $w_1 = u_1$ und den inneren Produkten

$$\langle u_2, w_1 \rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{und}$$

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}}.$$

weiter ist

$$\langle u_3, w_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1,$$

$$\langle u_3, w_2\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{und}$$

$$\|w_2\| = \langle w_2, w_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{womit}$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

weiter ist

$$\langle u_4, w_1\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 2,$$

$$\langle u_4, w_2\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle u_4, w_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \quad \text{und}$$

$$\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \quad \text{womit}$$

$$w_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle u_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/5 \\ 0 \\ 0 \\ 14/5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^5$.

Mit $\|w_4\|^2 = \langle w_4, w_4 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \frac{105}{25}$

und $\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2, 3, 4$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2, w_3 und w_4

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$v_4 = \frac{1}{\|w_4\|} \cdot w_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{105}{25}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$ auf die

Orthonormalbasis $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

zu b)

$$U^{\perp} = \{ X = (X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4 \; X_5)^{tr} \in \mathbb{R}^5 \mid \langle X, u_1 \rangle = 0, \langle X, u_2 \rangle = 0, \langle X, u_3 \rangle = 0, \langle X, u_4 \rangle = 0 \}$$

Also:

$\langle X, u_1 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 = 0$

$\langle X, u_2 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 = 0$

$\langle X, u_3 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 2 \cdot X_5 = 0$

$\langle X, u_4 \rangle = 0: \quad 2 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 + 3 \cdot X_5 = 0$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad | \cdot (-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-1) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ + \\ | \cdot 1 \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ + \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-1) \\ | : 2 \end{array} \Longrightarrow$$

nächste Seite geht's weiter

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ | \cdot 2 \\ | \cdot (-2) \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ | \cdot (-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ | : 2 \\ \\ \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (-1/2) \cdot P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \cdot P \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbb{L}(U^{\perp}, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Berechnet wurde also der Kern der Matrix $U^{\perp}$. Da sollte man wissen das jedes Vielfache der Lösung des Kerns auch eine gültige Lösung darstellt. Es empfiehlt sich hier den Lösungsvektor mit -2 zu multiplizieren um mehr positive als negative Vorzeichen zu bekommen aber in erster Linie natürlich um den Bruch loszuwerden:

$$\mathbb{L}(U^{\perp}, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dies ist nun das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ von U.

wegen Aufgabenpunkt (c) muß $U^\perp$ normiert werden, also sei nun $u^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \|u^\perp\| = \sqrt{\langle u^\perp, u^\perp \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{ONB}(V^\perp) = \{ v_1^\perp \} = \frac{1}{\|u^\perp\|} \cdot u^\perp = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}.$$

zu c)

$$\pi_{U^\perp}(v) = \langle v, v_1^\perp \rangle \, v_1^\perp$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{21} \cdot (4+1-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}}}.$$

Zusatzaufgabe 2/2, Seite 7/7

zu d,

$$\pi_U(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \langle v, v_3 \rangle v_3 + \langle v, v_4 \rangle v_4$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\10\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\10\\1\end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot (1) \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot (1+2) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{105} \cdot (-2+10+1) \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\10\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3/5\\0\\0\\6/5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-18/105\\0\\90/105\\9/105\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3/5\\1\\0\\6/5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-6/35\\0\\30/35\\3/35\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\3/7\\1\\6/7\\9/7\end{pmatrix}}}.$$

zu e,

$$d(v, U) = \| \pi_{U^\perp}(v) \| = \sqrt{\begin{pmatrix}0\\4/7\\0\\1/7\\-2/7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\4/7\\0\\1/7\\-2/7\end{pmatrix}} = \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{7}}}$$

zu f,

$$d(v, U^\perp) = \| \pi_U(v) \| = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\3/7\\1\\6/7\\9/7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3/7\\1\\6/7\\9/7\end{pmatrix}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{224}}{7}}}$$

Aufgabe 1. Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{a+1}$

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{a \neq -1}$

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{a \in \{0, -2\}}$

(d) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_{-1}.

Es ist $\chi_{A_{-1}} = X(X+1)(X-2)$, also sind die Eigenwerte $\boxed{0, -1, 2}$

(e) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_{-1}.

Der Eigenraum von A_{-1} zum Eigenwert λ ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A_{-1} - \lambda E_3)x = 0$. Damit ist

$$\boxed{E_0(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,\ E_{-1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,\ E_2(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.}$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ergebnis: } \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}$$

Aufgabe 3. Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie den Rang von φ. $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{3}$

(c) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an.

$$\boxed{\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.}$$

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie aus

$$x = (1, 1, 1)^t, \quad y = (1, 1, 0)^t, \quad z = (1, 0, 0)^t$$

mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$$

(b) Gegeben seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\kappa_{\mathcal{O}}(u) = (-1, 2, 3)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(v) = (0, -3, 1)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(w) = (-2, -4, 2)^t.$$

Bestimmen Sie

$||u|| = \boxed{\sqrt{14}}$, $||v - w|| = \boxed{\sqrt{6}}$, $||v + w|| = \boxed{\sqrt{62}}$, $(v, w) = \boxed{14}$.

Aufgabe 5. Betrachten Sie den von $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, und $f_3 : x \mapsto \cos x$ erzeugten Untervektorraum V von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Es bezeichne $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die Ableitung, d.h. $\varphi(\sin x) = \cos x$ und $\varphi(\cos x) = -\sin x$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ.

$$\chi_\varphi = \boxed{X(X^2+1)} \qquad \mu_\varphi = \boxed{X(X^2+1)}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{0}$

(c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an.

$$\boxed{E_0(\varphi) = \langle f_1 \rangle}$$

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $0 \neq v \in V$ ein linear unabhängiges 2-Tupel (u, w) gibt mit $v = u + w$.

Beweis: Da $\dim_K V \geq 2$ ist, existiert ein $v' \in V$, sodass das 2-Tupel (v, v') linear unabhängig ist. Damit ist auch das 2-Tupel $(v - v', v')$ linear unabhängig, und wir haben $v = (v - v') + v'$. Folglich wählen wir $u = v - v'$ und $w = v'$.

Aufgabe 7. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit L werde der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A bezeichnet (also $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$). Weiter bezeichne $L^\perp$ den Orthogonalraum von L bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$ (also $L^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in L\}$). Zeigen Sie, dass $L^\perp$ gleich dem Spaltenraum von A^t ist.

Beweis: Es ist $Av = 0$ für alle $v \in L$. Damit ist $\langle z^t, v \rangle = 0$ und z^t ist eine Spalte von A^t für jede Zeile z von A. Es folgt $SR(A^t) \subseteq L^\perp$. Weiter ist $V = L \oplus L^\perp$ und $\dim_K V = \dim_K L + \mathrm{Rang}(A)$. Also ist $\dim_K L^\perp = \mathrm{Rang}(A) = \dim_K SR(A^t)$.

Aufgabe 8. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist.

Beweis: Es ist $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$.

Aufgabe 9. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ mit $(A - E_n)^n = 0$ und $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$. Zeigen Sie: *(2+1+1 Punkte)*

(a) A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen.

> **Beweis:** Es ist $\mu_A \mid (X-1)^n$ und da $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$ ist, folgt $\mu_A = (X-1)^n$. Da $\deg \chi_A = n$ ist, ist $\mu_A = \chi_A$, d.h. χ_A zerfällt in Linearfaktoren. Also ist A trigonalisierbar und alle Eigenwerte sind 1.

(b) A ist invertierbar.

> **Beweis:** Nach (a) ist A ähnlich zu einer invertierbaren Matrix, also ist A selbst invertierbar.

(c) A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn $n = 1$ ist.

> **Beweis:** Das Minimalpolynom zerfällt nach (a) genau dann in paarweise verschiedene Linearfaktoren, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 10. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix geschrieben werden kann.

> **Beweis:** Zur Existenz: Es ist $A = \frac{1}{2}[(A + A^t) + (A - A^t)]$. Dabei ist $\frac{1}{2}(A + A^t)$ symmetrisch und $\frac{1}{2}(A - A^t)$ schiefsymmetrisch.
> Zur Eindeutigkeit: Es sei $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Matrix B sei symmetrisch und C sei schiefsymmetrisch mit $A = B + C$. Dann ist $M := B - \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}(A - A^t) - C$ eine simultan symmetrische und schiefsymmetrische Matrix. D.h. wir haben $M = M^t = -M$, und damit ist $M = 0$.
