Klausur, 02.08.2010

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2010, Dr. F. Lübeck

Name: Savas Gürcebe **Matrikelnummer:** ____________

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi((v_1, \ldots, v_n)^t) = (w_1, \ldots, w_n)^t$ mit $w_1 = 0$ und $w_i = v_{i-1}$ für alle $2 \leq i \leq n$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ. *(1 + 1 Punkte)*

$\chi_\varphi = \boxed{}$ $\mu_\varphi = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{}$ *(1 Punkt)*

(c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)*

2 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

3	Es sei $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(A) = XAX$ für alle $A \in V$. (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(4 Punkte)* $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (b) Was ist der Rang von φ? $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{1}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
4	Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben. (a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)* $$x = (0, 0, 1)^t, \quad y = (2, 0, -1)^t, \quad z = (-1, 2, -3)^t$$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$. $$\mathcal{O} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ (b) Gegeben seien $u = (1, 1, 1)^t$ und $v = (-1, 1, 0)^t$ aus $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Koordinatenvektoren von u und v bezüglich $\mathcal{O}$ an: $\kappa_{\mathcal{O}}(u) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$ und $\kappa_{\mathcal{O}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$. *(2 + 2 Punkte)*

Name: Savas Gürcebe Matrikelnummer: ____________

5 Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{1-a}$ *(1 Punkt)*

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{a \neq 1}$ *(1 Punkt)*

(c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A_a invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{a \in \{0,2\}}$ *(1 Punkt)*

(d) Es sei $a = 1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1. $\boxed{0,1,-3}$ *(2 Punkte)*

(e) Es sei $a = 1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_1 an. *(3 Punkte)*

(f) Es sei $a = 1$. Geben Sie das charakteristische Polynom von A_1 als Produkt von Linearfaktoren an.

(g) Geben Sie das charakteristische Polynom von A_a in Abhängigkeit von a an!

(h) Es sei $a = 1$. Bestimmen Sie die Diagonalmatrix $D = T^{-1} \cdot A_1 \cdot T$.

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

6 Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ ist, wenn es Vektoren $u, v \in K^n$ gibt mit $A = uv^t$. *(5 Punkte)*

7 Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(A) \leq n/2$ ist. *(5 Punkte)*

8 Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ invertierbar und sei $U \leq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass U auch φ^{-1}-invariant ist. *(5 Punkte)*

9 Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^n = 0$ und $A^j \neq 0$ für $j < n$. Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen ist. Zeigen Sie weiter, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $n = 1$ ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2, Seite 1

$\mathbb{F}_2$ bedeutet:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & \\ \ldots & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & \ldots \end{array}$$

gesucht: $Sol(A,b) = s + Sol(A,0)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \;|\cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \;|\cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1-ter Lösungsweg:

Die eingekreisten "1"-en sind die Pivotelemente, jetzt fügt man zwei weitere Zeilen hinzu, von dem eine Zeile eine "1" in der 4-ten Spalte und im b-Teil den Parameter P bzw. die zweite Zeile eine "1" in der 5-ten Spalte und im b-Teil den Parameter Q hat.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \;|\cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1+P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \;|\cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1+P+Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0+0\cdot P+0\cdot Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+0\cdot P+1\cdot Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1+1\cdot P+1\cdot Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0+1\cdot P+0\cdot Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0+0\cdot P+1\cdot Q \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow Sol(A,b) = s + Sol(A,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 2, Seite 2 (letzte Seite)

Probe für b:

$$A\cdot s = \underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{=}{\overset{\mathbb{F}_2}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \checkmark$$

OK

Probe für Kern:

$$\underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{=}{\overset{\mathbb{F}_2}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{=}{\overset{\mathbb{F}_2}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

2-ter Lösungsweg:

Wir nehmen die obige Matrix mit den eingekreisten "1"-en und kennzeichnen jede Spalte mit einem Buchstaben:

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & s & t & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y + t &= 1 \\ z + s + t &= 1 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 0 + 0\cdot s + 0\cdot t \\ y &= 1 + 0\cdot s + 1\cdot t \\ z &= 1 + 1\cdot s + 1\cdot t \end{aligned}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Sol}(A,b) = s + \mathrm{Sol}(A,0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

Aufgabe 3, Seite 1

Vorüberlegung:

$$\varphi : V \longrightarrow V, \quad \varphi(A) = XAX$$

$$\Longrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+c & a+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu a,

gegeben Basis $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\Longrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

1-te Spalte (Weil auf der linken Seite der Blockmatrise die 4x4-Einheitsmatrise steht und somit also hier nichts zu rechnen gibt)

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

2-te Spalte

Aufgabe 3, Seite 2 (letzte Seite)

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

3-te Spalte

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

4-te Spalte

Insgesamt ergibt sich also $\Longrightarrow$ $$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rang}(\varphi) = \dim(\text{Im}\,\varphi) = \underline{\underline{1}}.$$

Zu c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdot P + (-1) \cdot Q + 0 \cdot R \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \cdot P + 0 \cdot Q + 0 \cdot R \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdot P + 1 \cdot Q + 0 \cdot R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdot P + 0 \cdot Q + 1 \cdot R \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Ker}\,\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zu a,

Mit $w_1 = x$ und den inneren Produkten

$$\langle y, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Koeffizientenvektor des gegebenen Skalarprodukts

Es handelt sich hier nicht um den Standardskalarprodukt, daher dieses Hinweissymbol

$$= 2\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1$$
$$= -1 \text{ und}$$

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$= 1 \text{ ist}$$

$$w_2 = y - \frac{\langle y, w_1\rangle^+}{\langle w_1, w_1\rangle^+}\cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{-1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}}$$ Zunächst der 2-te Orthogonalbasisvektor

Weiter ist

$$\langle z, w_1\rangle^+ = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -3,$$

$$\langle z, w_2\rangle^+ = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -4 \text{ und}$$

$$\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2\rangle^+ = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 8 \text{ womit}$$

$$w_3 = z - \frac{\langle z, w_1 \rangle^+}{\langle w_1, w_1 \rangle^+} \cdot w_1 - \frac{\langle z, w_2 \rangle^+}{\langle w_2, w_2 \rangle^+} \cdot w_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{-3}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$ folgt.

Zunächst der 3-te und zugleich der letzte Orthogonalbasisvektor

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Mit

$$\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3 \rangle^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2, 3$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2 und w_3

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ und

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ auf die

Aufgabe 4, Seite 3 (letzte Seite)

Orthonormalbasis ONB $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Zu b,

Bestimmung $K_0(u)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \sqrt{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow K_0(u) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

Bestimmung $K_0(v)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \sqrt{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow K_0(v) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe 5, Seite 1

zu a)

$$\det(A_a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a+4 & -2a \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2a - 3) - 1 \cdot [2a - 1 \cdot (-a + 4)]$$

$$= 2a - 3 - (2a + a - 4)$$

$$= 2a - 3 - (3a - 4)$$

$$= 2a - 3 - 3a + 4$$

$$= \underline{\underline{1 - a}}$$

zu b)

$$1 - a \neq 0 \quad | + a$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \neq 1$$

zu c)

$$1 - a = 1 \qquad \text{und} \qquad 1 - a = -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad -a = 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad -a = -2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad a = 2$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{a \in \{0, 2\}}}$$

Aufgabe 5, Seite 2

zu d)

$$CP(A_a) = \det(A_a - \lambda E)$$

$$CP(A_a) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$CP(A_a) = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a-\lambda \end{vmatrix}$$

1-ter Lösungsweg:

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (2a+\lambda) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 4-3a-\lambda & 3-2a-\lambda-2a\lambda-\lambda^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4-3a-\lambda & 3-2a-\lambda-2a\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \left[(1-\lambda)\cdot(3-2a-\lambda-2a\lambda-\lambda^2) - (4-3a-\lambda)\right]$$

$$= (-1) \cdot \left[3-2a-\lambda-2a\lambda-\lambda^2-3\lambda+2a\lambda+\lambda^2+2a\lambda^2+\lambda^3-4+3a+\lambda\right]$$

$$= (-1) \cdot \left[-1+a-3\lambda+2a\lambda^2+\lambda^3\right]$$

$$= 1-a+3\lambda-2a\lambda^2-\lambda^3$$

$$\Longrightarrow \boxed{CP(A_a) = -\lambda^3 - 2a\lambda^2 + 3\lambda + (1-a)}$$

$$\xRightarrow{\text{Falls } a=1} \underline{\underline{CP(A_1) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda}}$$

Aufgabe 5, Seite 3

$$CP(A_1) = det(A_1 - \lambda E)$$

$$CP(A_1) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$CP(A_1) = det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

2-ter Lösungsweg:

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} |\cdot(1+\lambda) \; |\cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \\ 3\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda^2 & 1 \\ 3\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [-\lambda^2 \cdot (-2-\lambda) - 3\lambda]$$

$$= (-1) \cdot (2\lambda^2 + \lambda^3 - 3\lambda)$$

$$= -2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda$$

$$\Longrightarrow CP(A_1) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda$$

Eigenwerte:

$$\Longrightarrow \lambda \cdot (-\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \; |:(-1)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{2/3} = -1 \pm \sqrt{4}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{2/3} = -1 \pm 2$$

$$\Longrightarrow \lambda_2 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_3 = -3$$

Somit sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -3$ die Eigenwerte der Matrix A_1. Nun kann Aufgabenpunkt (f) gelöst werden:

$$p(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \cdot (-1)$$

Hier muß noch mit (-1) multipliziert werden, da auf der vorherigen Seite durch (-1) geteilt wurde um die p-q-Formel anwenden zu können.

$$\boxed{p(\lambda) = (-\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3)}$$

Probe:

$$\begin{aligned} & (-\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \\ = \; & (-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 3\lambda - \lambda - 3) \\ = \; & (-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda - 3) \\ = \; & -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda \end{aligned}$$

Wie man sieht erhält man nach dem ausmultiplizieren der Linearfaktoren das charakteristische Polynom wie unter

$$CP(A_1) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda.$$

zu e)

Eigenvektoren:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A_1 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = 0$$

einsetzen

$$(A_1 - 0 \cdot E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \quad |\cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \\ + \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen stehen)

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= -y \\ z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{Eig_{A_1}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

Aufgabe 5, Seite 5

Analog für λ_2:

$$(A_1 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_2 = 1$$

einsetzen

$$(A_1 - 1 \cdot E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \quad |\cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} x - z = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (stehen immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathcal{E}ig_{A_1}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Analog für λ_3:

$$(A_1 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_3 = -3$$

einsetzen

$$(A_1 + 3 \cdot E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot 4 \quad |\cdot 3 \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \end{array}$$

$\longrightarrow$ nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 5, Seite 6

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 9 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -18 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :9 \\ :9 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x - \frac{1}{9} z = 0 \\ y + \frac{4}{9} z = 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$x = \frac{1}{9} z$$

$$y = -\frac{4}{9} z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1/9 \\ -4/9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wähle $z = 9$ um die Brüche loszuwerden und erhalte:

$$\mathrm{Eig}_{A_1}(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \text{Eigenvektoren insgesamt: } \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

zu g)

Wurde schon auf Seite 2 (Lösung zu (d)) in der vorletzten Zeile angegeben: $\boxed{CP(A_a) = -\lambda^3 - 2a\lambda^2 + 3\lambda + (1-a)}$

Aufgabe 5, Seite 7

zu h_1

Es gilt: $D = T^{-1} \cdot A_1 \cdot T$.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmung T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ | \cdot 1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot 4 \\ | \cdot 3 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & -12 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ | \cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | : 3 \\ | : 4 \\ | : 12 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/12 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/12 & 1/12 \end{matrix}}_{T^{-1}}$$

$$\Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/12 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5, Seite 8 (letzte Seite)

$$D = T^{-1} \cdot A_1 \cdot T$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -27 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

← Die Eigenwerte stehen auf der Diagonalen.