Aufgabenblatt 2

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 26 Apr 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 23 Apr 2007 21:40:29 CEST

16	Wir betrachten das lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$: $\begin{array}{cccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 0 \end{array}$	
	Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - 1 \end{pmatrix}$ keine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn es eine von der Nulllösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ Lösungen sind, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}$ eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
17	Die folgenden Aussagen beziehen sich auf lineare Gleichungssysteme über einem **beliebigen** Körper. Welche sind wahr?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem, das eine Lösung hat, hat unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem über einem Körper K, das mehr Unbekannte als Gleichungen hat, hat unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt keine linearen Gleichungssysteme mit genau einer Lösung, die mehr Gleichungen als Unbekannte haben.	◯ Ja / ◯ Nein

	Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen, in dem mindestens $m-1$ der Koeffizienten gleich 0 sind, hat eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
18	Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Das neutrale Element von G und H sei jeweils mit 1 bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Die Abbildung $\psi : G \to H$, für die $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ für alle $x \in G$ gilt, ist ein Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Aus $\varphi(x) = \varphi(y) \in H$ folgt $x = y$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Gilt für zwei Elemente $x, y \in G$, dass $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1$ ist, so ist $x \cdot y = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $\varphi(x) = 1$, so folgt $x = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist φ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
19	Sei R ein beliebiger Ring mit Nullelement 0 und Einselement 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Sind $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$, dann ist $a \cdot b \neq 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $a \in R$ mit $a^2 = a$ dann ist $a = 1$ oder $a = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	R hat genau dann nur ein Element, wenn $0 = 1$ gilt.	◯ Ja / ◯ Nein
	Eine Aussage, die für jeden kommutativen Ring gilt, gilt auch für jeden Körper.	◯ Ja / ◯ Nein
	Hat R mehr als zwei Elemente dann gibt es ein $a \in R$ mit $0 \cdot a \neq 0$.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

20 a) Wir betrachten das inhomogene LGS über $\mathbb{Z}_7$ mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A,b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Bringen Sie die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus zunächst auf Normalform. Bestimmen Sie anhand der errechneten Normalform die Lösungsmenge und geben Sie diese in der für inhomogene Systeme üblichen Form $s + \mathbb{L}_0$ an.

b) Wir betrachten das inhomogene LGS über $\mathbb{R}$ mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A,b) := \left(\begin{array}{cc|c} a & a^2 & 1 \\ -1 & -1 & -a \\ 1 & a & a \end{array}\right)$$

und beliebiger Konstante $a \in \mathbb{R}$. Bringen Sie (A,b) auf Zeilenstufenform. Tip : Gehen Sie dabei am besten so vor, daß keine Fallunterscheidung für a erforderlich wird, keine Brüche auftreten, und die endgültige Form für alle Werte von a Zeilenstufenform hat!
Machen Sie anhand dieser Zeilenstufenform die Lösbarkeitsentscheidung für das inhomogene LGS in Abhängigkeit von a. Geben Sie an, für welche Werte von a das inhomogene LGS lösbar ist und für welche Werte von a es freie Unbekannte gibt.

21	a) Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: $$\text{Für alle } a,b \in G \text{ gibt es genau ein } x \in G \text{ mit } a \cdot x = b.$$ b) Seien G und H zwei Gruppen und sei e das neutrale Element von G und e' das neutrale Element von H. Zeigen Sie, daß für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gilt: $$\varphi(e) = e'.$$ c) Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und sei M eine beliebige Menge. Wir betrachten die Menge $$G^M := \{f : M \to G\}$$ aller Abbildungen von M nach G. Für alle $f,g \in G^M$ definieren wir $f * g \in G^M$ folgendermaßen: $$(f*g)(x) := f(x) \cdot g(x) \text{ für alle } x \in M.$$ Zeigen Sie, daß $(G^M,*)$ eine Gruppe ist. d) Sei R ein kommutativer Ring und sei R^* die Einheitengruppe von R. Zeigen Sie: $$1 \neq 0 \Longleftrightarrow 0 \notin R^*.$$

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 26. April 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift “LA I für Inf.”. Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.