# Aufgabenblatt 7

## Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 07 Jun 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 04 Jun 2007 19:03:50 CEST

| | | |
|---|---|---|
| 45 | Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper $K$. Sind die folgenden Aussagen wahr? | |
| | Wenn $A$ und $B$ multiplizierbar sind, dann ist der Rang von $AB$ gleich dem Maximum der Ränge von $A$ und $B$. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Eine invertierbare $n \times n$-Matrix hat den Rang $n$. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Eine $n \times n$-Matrix mit vollem Rang läßt sich durch elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen in die Einheitsmatrix überführen. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Spaltenraums. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Wenn $A$ und $B$ addierbar sind, dann ist der Rang von $A+B$ gleich dem Minimum der Ränge von $A$ und $B$. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| 46 | Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der $2\times 2$-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der $2\times 3$-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung: $$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 3}.$$ Weiter seien die geordneten Basen $$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$ von $V$ und $$\mathcal{C} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$ von $W$ gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ von $\varphi$ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an. | |
| | Der Eintrag in der 3. Spalte und der 2. Zeile von ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ lautet | __________ |
| | Der Eintrag in der 4. Spalte und der 4. Zeile von ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ lautet | __________ |
| | Der Eintrag in der 2. Spalte und der 2. Zeile von ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ lautet | __________ |
| | Der Eintrag in der 4. Spalte und der 5. Zeile von ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ lautet | __________ |
| | Der Eintrag in der 1. Spalte und der 3. Zeile von ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ lautet | __________ |
| 47 | Seien $V$ und $W$ Vektorräume über einem Körper $K$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von $V$ und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen von $W$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Es gilt ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}_W}^{\mathcal{C}'}\, {}^{\mathcal{C}'}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}\, {}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}_V}^{\mathcal{B}'}$. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Jede Basiswechselmatrix von $W$ ist quadratisch und invertierbar. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Jede Matrix $T \in K^{n\times n}$ ist Basiswechselmatrix von $V$. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Falls $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus den gleichen Elementen von $V$ gebildet werden, so sind alle Einträge der zugehörigen Basiswechselmatrix von $V$ entweder 0 oder 1. | ◯ Ja / ◯ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| | Es gibt eine invertierbare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, so dass ${}^{\mathcal{B}}M_\psi^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}'}M_\psi^{\mathcal{B}'}$ ist. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| 48 | Es seien $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper $K$ und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $V$ und $\mathcal{C} := (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von $W$ und ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$ die Matrix von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. | |
| | Ist $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, v_3, \dots, v_n)$, dann erhält man ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}'}$ aus ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Ist $\mathcal{B}' = (v_1, v_2 - v_1, v_3, \dots, v_n)$, dann erhält man ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}'}$ aus ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$, indem man die zweite Spalte zur ersten addiert. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Ist $\mathcal{B}' = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$, dann erhält man ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}'}$ aus ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$, indem man dieselben Spalten in umgekehrter Reihenfolge schreibt. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Ist $\mathcal{C}' = (w_2, w_1, w_3, \dots, w_m)$, dann erhält man ${}^{\mathcal{C}'}M_\varphi^{\mathcal{B}}$ aus ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht. | ◯ Ja / ◯ Nein |
| | Ist $\mathcal{C}' = (w_1 + w_2, w_2, w_3, \dots, w_m)$, dann erhält man ${}^{\mathcal{C}'}M_\varphi^{\mathcal{B}}$ aus ${}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}}$, indem man die erste Zeile von der zweiten subtrahiert. | ◯ Ja / ◯ Nein |

Nun sollen Sie in der folgenden Aufgabe doch eine $4 \times 4$-Matrix invertieren. Dafür wird diese Aufgabe auch als Bonusaufgabe gewertet (für die online Punkte).

49 Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix und geben Sie die verlangten Einträge an:

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -9 \\ -7 & 2 & 3 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

| | |
|---|---|
| Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $A^{-1}$ lautet | ____________ |
| Der Eintrag in der 2. Zeile und der 4. Spalte von $A^{-1}$ lautet | ____________ |
| Der Eintrag in der 4. Zeile und der 3. Spalte von $A^{-1}$ lautet | ____________ |
| Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von $A^{-1}$ lautet | ____________ |
| Der Eintrag in der 4. Zeile und der 1. Spalte von $A^{-1}$ lautet | ____________ |

Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

50 Sei $K$ ein Körper.

a) Sei $D = (d_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $d_{ij} = 0$ für alle $1 \le j < i \le n$. Zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung: $D$ ist genau dann invertierbar, wenn $d_{ii} \neq 0$ ist für alle $1 \le i \le n$.

b) Sei $A \in K^{m\times n}$. ($A$ ist also nicht notwendig quadratisch!) Zeigen Sie: die Abbildung

$$\varphi_A : K^n \to K^m, \quad x \mapsto Ax$$

ist genau dann surjektiv, wenn es $B \in K^{n\times m}$ gibt mit $AB = E_m$.

Da die folgende Aufgabe etwas aufwendiger ist als üblich, gibt es dafür 12 Punkte.

| | |
|---|---|
| 51 | Es sei $V = \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq 4$, d.h. $$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}\},$$ ausgestattet mit der Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^4)$.<br>a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}' = (p_0, \ldots, p_4)$ mit $p_0 := 1$ und $$p_i := \frac{1}{i!}x(x-1)\cdots(x-i+1) \quad \text{für } i = 1, \ldots, 4$$ ebenfalls eine Basis von $V$ ist.<br>b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$ und ${}^{\mathcal{B}'}T^{\mathcal{B}}$ an.<br>c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$.<br>d) Sei $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die "Ableitungsabbildung", d.h. $\varphi(f) = f'$ ist die Ableitung von $f$. Bestimmen Sie $M_\varphi^{\mathcal{B}'}$, die Matrix von $\varphi$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$. |

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 7. Juni 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift "LA I für Inf.". Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.