Aufgabenblatt 11

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 05 Jul 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Sa 14 Jul 2007 18:29:50 CEST

Dieses Blatt geht nicht mehr in die Wertung ein, wird aber noch korrigiert und am 8.7.2007, dem letzten Tutoriumstermin, nachbesprochen. Der Inhalt dieses Blattes ist klausurrelevant.		
70	Berechnen Sie jeweils für das angegebene Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ und die Matrix $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Matrix $f(M)$ und geben Sie den geforderten Eintrag an.	
	Was ist für $f = X^2 - 3X + 2$ und $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ der $(2,1)$-Eintrag von $f(M)$?	________
	Was ist für $f = X^{10} - X$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ der $(1,1)$-Eintrag von $f(M)$?	________
	Was ist für $f = X^3 - 2X^2 - 14X + 3$, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(M)$?	________
	Was ist für $f = X \cdot (X-2)^2$ und $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ der $(2,1)$-Eintrag von $f(M)$?	________
	Was ist für $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ der $(1,1)$-Eintrag von $f(M)$?	________
71	Gegeben sei der Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ mit $$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$	
	Wie lautet der zweithöchste Koeffizient von χ_φ?	________
	Wieviele verschiedene Eigenwerte hat A?	________
	Was ist die Vielfachheit des Eigenwertes 2 von φ?	________
	Was ist die Summe der Dimensionen aller Eigenräume von φ?	________
	Gibt es einen φ-invarianten Unterraum von $\mathbb{R}^4$ der Dimension 2?	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist φ diagonalisierbar?	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

72	a) Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton: Es existiert ein Polynom $0 \neq f(x) \in K[x]$ mit $\deg f \leq n^2$, für das $f(A) = 0 \in K^{n\times n}$ ist. b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton das Inverse der Matrix $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$
73	Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ sei definiert durch die Rekursionsgleichung $$a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3}$$ für alle $n \geq 3$, und durch die Anfangsglieder $$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$ Berechnen Sie mit Methoden der linearen Algebra eine allgemeine Formel für a_n. *Hinweis: Um Brüche in der Rechnung zu vermeiden, denken Sie daran, daß sie Eigenvektoren mit einem geeigneten Skalar multiplizieren können, bevor Sie damit weiterrechnen. Bei der Inversenbildung lassen sich Brüche mit der Adjunktenformel vermeiden (bzw. leicht "rausziehen"). Zur Verifikation Ihrer Rechnung sei hier schon mal das Ergebnis verraten:* $$a_n = (-1)^{n+1} + ((-1)^n - 1)\sqrt{2}^{n-3} + ((-1)^n + 1)\sqrt{2}^{n-2}.$$

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 5. Juli 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift "LA I für Inf.". Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.