Aufgabenblatt 5

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 17 Mai 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 14 Mai 2007 23:31:00 CEST

Das Aufgabenblatt ist in dieser Woche etwas verkürzt, es gibt nur drei online Aufgaben und eine schriftlich abzugebende Aufgabe. Der Grund dafür ist, daß in den Tutorien am Montag, dem 21. Mai 2007, als Klausur-Vorbereitung eine **Mini-Zwischenklausur** angeboten werden wird. Diese dauert 45 Minuten und die darin erzielten Punkte werden Ihnen als Bonus-Punkte zu den schriftlichen Punkten gutgeschrieben.
Beachten Sie auch den auf Mittwoch, 18 Uhr, **vorgezogenen Abgabetermin** für die schriftliche Aufgabe wegen Himmelfahrt!

34	Sind die folgenden Teilmengen der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume linear unabhängig?	
	$\{x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(5x), x \mapsto \sin(7x)\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(-1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$, wobei $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$ für $i \in \mathbb{N}$ und $f_i(n) = 0$ für $i,n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(1,1,1),(0,1,1),(-3,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{1, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$	◯ Ja / ◯ Nein
35	Sei V ein Vektorraum mit endlicher Dimension und seien $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:	
	Ist X ein Erzeugendensystem von V, so ist auch Y ein Erzeugendensystem von V.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X linear unabhängig, so ist auch Y linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$ gibt, die eine Basis von $\langle Y \rangle$ ist, so ist X eine Basis von $\langle X \rangle$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X linear abhängig, so ist auch Y linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist Y eine Basis von V, so ist auch X eine Basis von V.	◯ Ja / ◯ Nein
36	Es seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ gegeben: $$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -39 \\ 2 & -5 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & -5 & -32 \end{pmatrix}$$ Berechnen Sie jeweils den Rang der angegebenen Matrix.	
	Welchen Rang hat $C^t - A^tB^t$?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ nicht definiert
	Welche Dimension hat $\mathbb{L}(BA - C, 0)$?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ nicht definiert
	Welchen Rang hat $BA + C$?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ nicht definiert

	Welchen Rang hat A?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ nicht definiert
	Welche Dimension hat $\mathbb{L}(BA+C, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ nicht definiert

Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.

37 Sei $K = \mathbb{Z}_2$ und

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 8}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathbb{L}_0(H)$ den Nullraum von H, d.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}(H,0)$.

a) $\mathbb{L}_0(H)$ und $\mathrm{SR}(H^t)$ sind Unterräume welches K^n bzw. $K^{1\times m}$?
b) Welche Dimension hat $\mathbb{L}_0(H)$?
c) Wieviele Elemente hat $\mathbb{L}_0(H)$?
d) Bestimmen Sie möglichst effektiv eine Basis von $\mathbb{L}_0(H)$.
e) Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{L}_0(H)$ an.

Die folgende Aufgabe ist als freiwillige Vorbereitung auf die Mini-Zwischenklausur gedacht. Bitte überlegen Sie sich die Lösung, aber geben Sie Ihre schriftliche Bearbeitung **nicht ab.**

38 Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension.

(i) Zeigen Sie, dass jedes endliche Erzeugendensystem $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ von V eine Teilmenge besitzt, die eine Basis von V ist.

(ii) Geben Sie ein Verfahren (Algorithmus) an, mit dem explizit aus einem n-Tupel von Zeilen aus $K^{1\times m}$ eine Basis des Raums gewählt werden kann, der von den Zeilen aufgespannt wird.

(iii) Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Wählen Sie aus der Menge

$$M := \{(1,0,3,2,1), (3,2,-1,-2,1), (1,2,-7,-6,-1), (2,2,2,2,2)\} \subseteq \mathbb{Q}^{1\times 5}$$

eine Teilmenge aus, die eine Basis von $\langle M\rangle$ ist.

Die Abgabe der schriftlichen Aufgabe ist bis **Mittwoch**, 16. Mai 2007, um **18 Uhr** möglich, und die Abgabe der online Aufgaben bis Donnerstag, 17. Mai 2007, um 8 Uhr.