Aufgabenblatt 9

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 21 Jun 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Di 19 Jun 2007 11:17:13 CEST

Dieses Blatt geht in die Wertung ein.

58 Seien U, V und W drei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_4)$ Basis von U, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_5)$ Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_4)$ Basis von W. Die linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ und $\psi : U \to V$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned}
\psi(u_1) &= 3v_2 - 4v_1 + 2v_5 - v_3, \\
\psi(u_2) &= v_4 + v_1 - 3v_3 - 4v_5 - v_2, \\
\psi(u_3) &= -2v_1 + 2v_2 - v_4 + 3v_5, \\
\psi(u_4) &= 2v_3 - v_2 + v_4,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5) &= (\lambda_1 - \lambda_3)w_1 + (2(\lambda_4 + \lambda_5) - 3\lambda_3)w_2 \\
&\quad + (\lambda_1 + 2(\lambda_4 + \lambda_2))w_3 - (\lambda_4 + 3(\lambda_5 - \lambda_2) - 4\lambda_3)w_4.
\end{aligned}$$

Der Eintrag von ${}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{A}}(\psi)$ in der 3. Zeile und der 3. Spalte lautet	____________
Die 2. Komponente des Koordinatenvektors von $\psi(3u_2 - u_1 + 2u_4 + 3u_3)$ bzgl. $\mathcal{B}$ lautet	____________
Der Eintrag von ${}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}(\varphi)$ in der 4. Zeile und der 4. Spalte lautet	____________
Der Eintrag von ${}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{A}}(\varphi \circ \psi)$ in der 4. Zeile und der 4. Spalte lautet	____________
Die 2. Komponente des Koordinatenvektors von $\varphi \circ \psi(3u_1 - 3u_3 - 4u_4 - 2u_2)$ bzgl. $\mathcal{C}$ lautet	____________

59 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$. (Die Elemente von $\mathbb{Z}_{11}$ sind durch ihre kleinsten nicht-negativen Vertreter zu beschreiben, also z.B. 7 anstatt -4, usw.)

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	____________
$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	____________
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	____________
$\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$	____________

	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	______________
60	Es sei K ein Körper und $M, N \in K^{n \times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Einträge der Matrix M seien mit $m_{i,j}$ für $(1 \leq i, j \leq n)$ bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?	
	Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M in der Menge $\{0, 1, -1\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist M eine untere Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante von M gleich dem Produkt der Diagonalelemente.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist eine Zeile von N das Negative einer anderen Zeile von N, dann ist $\det N = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gilt $(\det M) + (\det \mathrm{N}) = \det(M + N)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $m_{i,j} = 0$ für $i + j \leq n$, dann ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$.	◯ Ja / ◯ Nein
61	Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $1 \leq \dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Der Nullvektor ist genau dann Eigenvektor von φ, wenn φ die Nullabbildung ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Linearkombination von zwei Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert, die ungleich Null ist, ist ein Eigenvektor.	◯ Ja / ◯ Nein
	φ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt einen Endomorphismus φ, der keinen Eigenvektor besitzt.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es einen Endomorphismus von V mit Eigenwert a.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		
62	Gegeben sei die Matrix $$A = \begin{pmatrix} 2a & 2 & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß A für jedes $a \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, und berechnen Sie mit Hilfe der Adjunktenformel die inverse Matrix A^{-1}.	
Da die nächste Aufgabe etwas länger ist, gibt es dafür wieder 12 Punkte.		

63	Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_5)$ Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_4)$ Basis von W. Die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ sei gegeben durch $$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= w_1 - w_2 + w_3, \\ \varphi(v_2) &= 4w_1 - w_2 + 2w_4, \\ \varphi(v_3) &= 2w_2 - w_3, \\ \varphi(v_4) &= 3w_1 + w_4, \\ \varphi(v_5) &= w_2 + w_3 + w_4. \end{aligned}$$ a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ an und berechnen Sie $$\varphi(4v_1 + 4v_2 + 4v_3 - 6v_4 + v_5).$$ b) Berechnen Sie Ker φ und Def φ. c) Berechnen Sie Im φ und Rg φ. *Mit "Berechnung" von* Ker φ *und* Im φ *ist gemeint, eine Basis anzugeben.* d) Geben Sie alle $v \in V$ an mit $\varphi(v) = 2w_1 + w_2 - w_3 + w_4$. e) Ist φ surjektiv? (Begründung!)

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 21. Juni 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift "LA I für Inf.". Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.