# Aufgabenblatt 4

## Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 10 Mai 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Do 03 Mai 2007 23:48:53 CEST

| | | |
|---|---|---|
| 22 | Mit $E_n$ sei jeweils die $n$-reihige Einheitsmatrix bezeichnet und mit $0_n$ die $n$-reihige Nullmatrix. Sind die folgenden Aussagen über Matrizen richtig? | |
| | Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = E_2$, so ist $A = \pm E_2$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = E_3$ und $n > 1$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Ist $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mit $A^6 = E_{100}$ und $A^{10} = E_{100}$, dann ist auch $A^2 = E_{100}$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $A \cdot B = E_m$, so ist $B \cdot A = E_n$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und gilt $A \cdot B \cdot A = A$, so ist $B \cdot A = E_n$. | ○ Ja / ○ Nein |
| 23 | Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen? | |
| | $U := \left\{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist beschränkt}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $U := \left\{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$ | ○ Ja / ○ Nein |
| 24 | Es seien $A$ und $B$ Matrizen über einem Körper $K$, so dass $A \cdot B$ definiert ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? | |
| | Jede Spalte von $A \cdot B$ liegt im Spaltenraum von $A$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von $A$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Es gilt $A^t \cdot B = (B^t \cdot A)^t$, falls die linke Seite definiert ist. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Die Spalten von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von $B$. | ○ Ja / ○ Nein |
| | Sind $A$ und $B$ in $GL_n(K)$, dann gilt $(A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t \cdot B = B$. | ○ Ja / ○ Nein |
| 25 | Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ **linear** ist. | |
| | $K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^3$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1,2) \cdot M$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 2x + 1$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ | ○ Ja / ○ Nein |
| | $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f - f$ | ○ Ja / ○ Nein |
| Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. | | |
| 26 | a) Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$. <br> b) Bestimmen Sie alle Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. | |

| | |
|---|---|
| 27 | Sei $K$ ein Körper und seien $V,W$ zwei $K$-Vektorräume.<br><br>a) Sei $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:<br><br>$$<< M >>=< M > .$$<br><br>b) Sei $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie:<br><br>Ist $M \cup \{v\}$ linear abhängig, dann ist $v \in < M >$.<br><br>c) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:<br><br>Im $\varphi$ ist ein Untervektorraum von $W$.<br><br>d) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:<br><br>$\varphi$ ist injektiv, genau dann wenn Ker $\varphi = \{\mathfrak{o}\}$. |

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 10. Mai 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift “LA I für Inf.”. Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.