Aufgabenblatt 10

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 28 Jun 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 25 Jun 2007 18:19:21 CEST

Dieses Blatt ist das letzte, das in die Wertung eingeht. Insgesamt wurden 200 online Punkte vergeben (davon 5 als Bonuspunkte) und 160 schriftliche Punkte (ohne die Mini-Klausur). Für die Klausurzulassung sind also mindestens 98 online Punkte und 80 schriftliche Punkte notwendig.

64	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $A \in K^{n\times n}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $A \cdot \tilde{A}^t \neq 0$ ist ($\tilde{A}$ ist die zu A komplementäre Matrix).	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist A eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann auch A^{-1}.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es sei $K = \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist $a_{ij} \notin \mathbb{Q}$ für ein Paar (i, j), dann ist auch $\det(A) \notin \mathbb{Q}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K^*$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind zwei Zeilen von A linear abhängig, dann ist $\det(A) = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
65	Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen über Eigenvektoren richtig?	
	Ist 1 einziger Eigenwert, so ist φ die Identität.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls mit jedem Eigenwert a von φ auch $2a$ ein Eigenwert von φ ist, dann ist $\varphi = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn die Dimension von V gleich $n \geq 2$ ist und ein linear unabhängiges $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von Eigenvektoren von φ existiert, dann gibt es auch ein linear unabhängiges n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von φ.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Summe zweier Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten ist ein Eigenvektor von φ.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls $n = 5$ ist, so hat φ einen Eigenwert.	◯ Ja / ◯ Nein
66	Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Weiter seien $B \in K^{n\times n}$ und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit den entsprechenden charakteristischen Polynomen $\chi_B(x)$ und $\chi_\varphi(x)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat $\chi_B(x)$ mindestens eine Nullstelle.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls die Summe der Koeffizienten von $\chi_\varphi(x)$ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = v$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der konstante Koeffizient von $\chi_B(x)$ ist gleich $-\det(B)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_\varphi(x) = \chi_A(x)$, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_\varphi^\mathcal{B} = A$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn φ bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
67	Es sei K ein Körper. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?	
	Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ($n \geq 2$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n\times 1}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat.	◯ Ja / ◯ Nein

	Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = TA$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$, deren charakteristisches Polynom Grad n und paarweise verschiedene Koeffizienten hat, ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

68

a) Geben Sie ein Beispiel eines Endomorphismus eines 6-dimensionalen Vektorraumes an, der keine Eigenwerte hat.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung, daß der Endomorphismus in Ihrem Beispiel keine Eigenwerte hat.

c) Geben Sie — soweit möglich — eine geometrische Interpretation oder Begründung Ihres Beispiels an.

69

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$. Der Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ habe die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -1 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

bzgl. einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V.

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von φ.

b) Berechnen Sie alle Eigenräume von φ.

Mit "Berechnung"der Eigenräume ist gemeint, jeweils eine Basis anzugeben.

c) Ist φ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Im Fall der Diagonalisierbarkeit ist eine Basis $\mathcal{C}$ von V anzugeben, so daß die Abbildungsmatrix von φ bzgl. $\mathcal{C}$ eine Diagonalmatrix ist.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 28. Juni 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift "LA I für Inf.". Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.