Aufgabenblatt 6

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 24 Mai 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Di 22 Mai 2007 11:20:19 CEST

39	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	$\mathrm{Ker}\,(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathrm{Im}\,(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Im}\,\psi$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathrm{Ker}\,(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Im}\,(\varphi \circ \psi)$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathrm{Ker}\,(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathrm{Im}\,(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$	◯ Ja / ◯ Nein
40	Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?	
	Für alle $c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $c = 0$ hat $Ax = c$ mindestens $\lvert n-m\rvert$ (Absolutbetrag) Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	$Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{rang}(A)+1 = \mathrm{rang}(A,b)$ ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls $m = n$ ist und $Ax = 0$ nicht eindeutig lösbar ist, dann ist $Ax = c$ für alle $c \in K^{m\times 1}$ unlösbar.	◯ Ja / ◯ Nein
41	Es seien K ein Körper, V und W endlich-erzeugte Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Wenn es eine Basis $(b_1,\dots,b_n)$ von V gibt, so dass $(\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n))$ eine Basis von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1,b_2) linear unabhängig und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1),\varphi(b_2))$ linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1),\varphi(b_2))$ linear unabhängig, dann ist (b_1,b_2) linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist (b_1,b_2,b_3) eine Basis von V, dann ist $(\varphi(b_1),\varphi(b_2),\varphi(b_3))$ eine Basis von W.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn φ surjektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	◯ Ja / ◯ Nein
42	Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.	
	Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{2\times 3}$ vom Rang 2 ist und $q = 3$.	________
	Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 13$.	________
	K^2 für $q = 13$.	________
	Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^3 für $q = 5$.	________
	Die Menge der linearen Abbildungen $K^2 \to K^2$, die nicht bijektiv sind, für $q = 3$.	________

Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

43 Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen (ggf. unter Verwendung der Aussagen der jeweils vorhergehenden Aufgabenteile, egal ob Sie diese bewiesen haben oder nicht) :

a) Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$\dim_K < v_1, \ldots, v_n > \leq n.$$

Falls Sie hierzu Teil i) von Aufgabe 38 verwenden möchten, dann schreiben Sie an dieser Stelle bitte Ihre Lösung zu Teil i) von Aufgabe 38 mit auf.

b) Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$\dim_K < v_1, \ldots, v_n > = n \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n) \text{ linear unabhängig.}$$

c) Ist $K = \mathbb{Z}_2$, so gilt für alle $v, w \in V \setminus \{\mathfrak{o}\}$:

$$(v, w) \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow v = w.$$

d) Ist $\dim_K V = n$, so gilt für alle $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$:

$$(v_1, \ldots, v_{n+1}) \text{ ist linear abhängig.}$$

44 Es sei $K = \mathbb{Z}_2$ und sei C der von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum von $\mathbb{Z}_2^5$. (Damit ist C also der kleinste lineare Code, der die oben genannten Vektoren als Codewörter enthält.)

a) Bestimmen Sie eine Basis von C.

b) Schreiben Sie C als Nullraum $\mathbb{L}_0(H)$ einer Matrix H, wobei H kleinstmögliche Zeilenzahl haben soll. (Damit ist H also Kontrollmatrix von C.)

c) Kann man mit dem Code C alle 1-fachen Fehler erkennen? Geben Sie ggf. einen 1-fachen Fehlervektor an, der nicht erkannt wird.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 24. Mai 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift “LA I für Inf.”. Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.