Aufgabenblatt 8

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Do 14 Jun 2007 08:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Fr 08 Jun 2007 17:24:47 CEST

Dieses Blatt geht in die Wertung ein.

52 Es sei K ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n$ und $A, B \in K^{n\times n}$. Wie üblich bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor im Vektorraum K^n, bei dem eine Eins in der j-ten Zeile steht und sonst Nullen. Sind die folgenden Aussagen richtig?

A ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten von A eine Basis von K^n bilden.	◯ Ja / ◯ Nein
A ist invertierbar genau dann wenn $\varphi_{A^t} : K^n \to K^n$ injektiv ist.	◯ Ja / ◯ Nein
Wenn AB invertierbar ist, dann sind sowohl A als auch B invertierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
Sei A invertierbar und s_j bezeichne die j-te Spalte von A^{-1}. Für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ ist s_j eine Lösung von $Ax = e_j$.	◯ Ja / ◯ Nein
A ist invertierbar genau dann wenn $A^t e_j \neq 0$ ist für alle $j = 1,\dots,n$.	◯ Ja / ◯ Nein

53 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+i & 2+i & 3+i \\ 1-i & 2-i & 3-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. (Es bezeichnet i wie üblich $\sqrt{-1}$.)
Berechnen Sie die Matrix $2 \cdot A^{-1}$ und geben Sie die verlangten Einträge an. (Ja, Sie haben richtig gelesen, die Einträge der Inversen von A sollen **verdoppelt** werden!) Real- und Imaginärteil sind reelle Zahlen, d.h. i wird beim Imaginärteil nicht mit angegeben. Alle Antworten sind ganze Zahlen.

Der Imaginärteil des Eintrags in der 2. Zeile und 2. Spalte von $2A^{-1}$ lautet	__________
Der Realteil des Eintrags in der 1. Zeile und 1. Spalte von $2A^{-1}$ lautet	__________
Der Imaginärteil des Eintrags in der 2. Zeile und 2. Spalte von $2A^{-1}$ lautet	__________
Der Realteil des Eintrags in der 1. Zeile und 2. Spalte von $2A^{-1}$ lautet	__________
Der Imaginärteil des Eintrags in der 2. Zeile und 3. Spalte von $2A^{-1}$ lautet	__________

54 Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1

Die folgende online-Aufgabe ist eine Wiederholung über lineare Unabhängigkeit.

55	Es seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $v_1 = v_2$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		
56	Gegeben sei die Matrix $$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$ a) Berechnen Sie eine LU-Zerlegung von A bei der auf der Diagonalen von U nur Einsen stehen. b) Benutzen Sie Ihre LU-Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ nacheinander für die folgenden beiden Werte von b zu lösen: $$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$	

57 Wir bezeichnen mit γ die lineare Abbildung

$$\gamma := \varphi_G : \quad \mathbb{Z}_2^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^7, \quad v \longmapsto Gv,$$

wobei

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{7\times 4}.$$

Bemerkung : G ist eine Generatormatrix für den Hamming-Code (vgl. Beispiel (2.55) aus der Vorlesung), und daher kann γ als Codierungsabbildung auf Seite des Senders aufgefasst werden.

a) Woran erkennt man, daß γ injektiv ist?

Wir wollen nun eine Matrix B über $\mathbb{Z}_2$ bestimmen, so dass für die Abbildung

$$\delta := \varphi_B : \quad \mathbb{Z}_2^7 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^4, \quad c \longmapsto Bc$$

folgendes gilt:

$$\delta \circ \gamma(v) = v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Bemerkung : Eine solche Abbildung δ kann als Decodierungsabbildung auf Seite des Empfängers aufgefasst werden. (Die Decodierungsabbildung hat nichts mit der Fehlerkorrektur zu tun, sondern wird nach einer evtl. nötigen Fehlerkorrektur angewendet. Insbesondere hat die Matrix B nichts mit der Kontrollmatrix H zu tun.)

b) Welche “Größe” (d.h. wieviele Zeilen und Spalten) muß B haben?

c) Bestimmen Sie ein B durch Lösen eines geeigneten Gleichungssystems (vgl. Satz (2.75)).

d) Benutzen Sie Ihre Matrix B, um das Gleichungssystem $Gv = c$ nacheinander für die folgenden beiden Werte von c zu lösen:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 14. Juni 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift “LA I für Inf.”. Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.