Übungsblatt Nr. 13, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}\, V$ und $1 \leq \dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Ist 1 einziger Eigenwert, so ist φ die Identität.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt ein Element $a \in K$, das nicht Eigenwert eines Endomorphismus von V ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls $K = \mathbb{R}$ und $n = 5$ ist, so hat φ einen Eigenwert.	◯ Ja / ◯ Nein
	φ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei $K = \mathbb{C}$. Falls mit jedem Eigenwert a von φ auch $2a$ ein Eigenwert von φ ist, dann ist $\varphi = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und χ_φ sein charakteristisches Polynom. Außerdem sei $B \in K^{n \times n}$ und χ_B ihr charakteristisches Polynom. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Wenn φ bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes normierte Polynom vom Grad n ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat die Menge der Nullstellen von χ_B genau n Elemente.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $\chi_\varphi = \chi_A$, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = v$.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?	
	Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ($n \geq 2$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n \times 1}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat.	◯ Ja / ◯ Nein
	Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = TA$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Begleitmatrix eines Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad größer als 1 ist diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen über Eigenvektoren richtig?	
	Jede Linearkombination von zwei Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert ist ein Eigenvektor.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Nullvektor ist Eigenvektor von φ.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Endomorphismus φ hat mindestens einen Eigenvektor.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Summe zweier Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten ist ein Eigenvektor von φ.	◯ Ja / ◯ Nein

	Wenn die Dimension von V gleich $n \geq 2$ ist und ein linear unabhängiges $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von Eigenvektoren von φ existiert, dann gibt es auch ein linear unabhängiges n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von φ.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		
5	Gegeben sei die Matrix $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$ Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenräume von A.	
6	Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen, so dass A genau n verschiedene Eigenwerte hat und $AB = BA$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ gibt, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ beide Diagonalgestalt haben.	
Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 1. Februar 2002, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.		