Übungsblatt Nr. 11, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$. (Die Elemente von $\mathbb{F}_{11}$ werden also durch ihre kleinsten nicht-negativen Restklassenvertreter beschrieben.)	
	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 10 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	__________
	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	__________
	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	__________
	$\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$	__________
	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	__________
2	Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}.	
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
3	Es sei σ die folgende Permutation von 9 Punkten: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. In den folgenden Fragen ist jeweils ein Produkt von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable i anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit das Produkt gleich σ ist.	
	$(1\,2)\,(2\,5)\,(3\,9)\,(i\,6)\,(7\,8)\,(9\,6)\,(1\,6)$	__________
	$(i\,2)\,(3\,7)\,(2\,5)\,(1\,6)\,(1\,7)\,(3\,9)\,(8\,9)$	__________
	$(1\,2)\,(1\,3)\,(2\,5)\,(i\,8)\,(8\,7)\,(7\,6)\,(3\,6)$	__________
	$(4\,5)\,(1\,5)\,(9\,8)\,(3\,8)\,(6\,2)\,(8\,7)\,(2\,4)\,(7\,i)\,(1\,4)$	__________
	$(9\,8)\,(2\,5)\,(3\,8)\,(1\,8)\,(8\,7)\,(5\,7)\,(6\,i)$	__________

4	Es sei K ein Körper und $M, N \in K^{n \times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Einträge der Matrix M seien mit $m_{i,j}$ für $(1 \leq i, j \leq n)$ bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?	
	Sind zwei Zeilen von N gleich, so ist $\det N = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist M eine untere Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante von M gleich dem Produkt der Diagonalelemente.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $m_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$, dann ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M auch entweder 0 oder 1.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gilt $(\det M) \cdot (\det N) = \det(M \cdot N)$.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

5 Sei für einen kommutativen Ring R die Abbildung $D: \ R^{n \times n} \to R$, durch die folgende Formel gegeben:

$$D((a_{ij})) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Abbildung multilinear ist (siehe Punkt (3.8)(1) und den Beweis von Satz 3.11 aus der Vorlesung).

(ii) Wie ändert sich die Determinante bei den einzelnen elementaren Umformungen einer Matrix?

6 Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass für beliebige Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Bemerkung: Diese Determinante heißt **Vandermonde'sche Determinante**.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 18. Januar 2002, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.