Übungsblatt Nr. 8, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es seien K ein Körper, V und W endlich-erzeugte Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. In dieser Aufgabe steht das Wort „Basis“ immer für „geordnete Basis“. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Wenn für jede Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gilt, dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basis von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basis von W.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig, dann ist (b_1, b_2) linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhängig und φ injektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn φ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Sind die folgenden Teilmengen der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume linear unabhängig?	
	$\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$ für $i \in \mathbb{N}$ und $f_i(n) = 0$ für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(-1, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(2, 2, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(5x), x \mapsto \sin(7x)\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	◯ Ja / ◯ Nein
	Bild $\varphi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	◯ Ja / ◯ Nein
	Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	◯ Ja / ◯ Nein
	Bild $\psi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	◯ Ja / ◯ Nein
	Kern $\varphi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	◯ Ja / ◯ Nein
4	Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:	
	Wenn X eine Basis von $\langle X \rangle$ ist, so gibt es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$, die eine Basis von $\langle Y \rangle$ ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X linear unabhängig, so ist auch Y linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X ein Erzeugendensystem von V, so ist auch Y ein Erzeugendensystem von V.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X eine Basis von V, so ist auch Y eine Basis von V.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist X linear abhängig, so ist auch Y linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

5	Es sei K ein Körper und V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum. (i) Zeigen Sie, dass jedes endliche Erzeugendensystem $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ von V eine Teilmenge besitzt, die eine Basis von V ist. (ii) Geben Sie ein Verfahren (Algorithmus) an, mit dem explizit aus einem n-Tupel von Zeilen aus $K^{1\times m}$ eine Basis des Raums gewählt werden kann, der von den Zeilen aufgespannt wird. (iii) Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Wählen Sie aus der Menge $$M := \{(1,0,3,2,1), (3,2,-1,-2,1), (1,2,-7,-6,-1), (2,2,2,2,2)\} \subseteq \mathbb{Q}^{1\times 5}$$ eine Teilmenge aus, die eine Basis von $\langle M \rangle$ ist.
6	Es sei K ein Körper und V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum. Weiter seien U und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie: (i) Es gilt $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$ genau dann, wenn für jede geordnete Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U und jede geordnete Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W das Tupel $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von V ist. (ii) Es gilt: $$\dim_K(U + W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W).$$ **Hinweis:** Zählen Sie Vektoren in geeigneten Basen.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 14. Dezember 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.