Übungsblatt Nr. 10, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung: $$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M\cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}.$$ Weiter seien die geordneten Basen $$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$ von V und $$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$ von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.	
	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet	________________
	Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet	________________
	Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet	________________
	Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet	________________
	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet	________________
2	Es seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $v_1 = v_2$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) = 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen von W. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Falls $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus den gleichen Elementen von V gebildet werden, so sind alle Einträge der zugehörigen Basiswechselmatrix von V entweder 0 oder 1.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gilt $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}}(\varphi) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Basiswechselmatrix von W ist quadratisch und invertierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt eine invertierbare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\psi)$ ist.	◯ Ja / ◯ Nein

	Jede Matrix $T \in K^{n\times n}$ ist Basiswechselmatrix von V.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} := (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.	
	Ist $\mathcal{B}' = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man dieselben Spalten in umgekehrter Reihenfolge schreibt.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $\mathcal{C}' = (w_1 + w_2, w_2, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die erste Zeile von der zweiten subtrahiert.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $\mathcal{B}' = (v_1, v_2 - v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die erste Spalte von der zweiten subtrahiert.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $\mathcal{C}' = (w_2, w_1, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		
5	Sei K ein Körper und seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $r \leq \min\{\dim_K(V), \dim_K(W)\}$, sowie (geordnete) Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W, so dass die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die folgende Block-Form hat: $\left(\begin{array}{c\|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$	
6	Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit Basen $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ beziehungsweise $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, für die gilt: $\begin{array}{rcl} \varphi(b_1) & = & c_1 - c_2 \\ \varphi(b_2) & = & c_2 - c_3 \\ \varphi(b_3) & = & c_3 - c_4 \\ \varphi(b_4) & = & \sqrt{5}c_1 - \sqrt{5}c_2 + c_4 - c_5 \\ \varphi(b_5) & = & -\sqrt{5}c_1 + \sqrt{5}c_2 + c_5 \end{array}$ Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung φ^{-1} bezüglich der oben angegebenen Basen.	
Hier ist noch eine Weihnachtsaufgabe. Ihre Bearbeitung gibt keine Punkte. Aber hier haben Sie die Möglichkeit, den bisherigen Vorlesungsstoff mal besonders praxisnah zu verwenden.		

7	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. (i) (LR-**Zerlegung**) Zeigen Sie, dass die Matrix A in der Form $A = LR$ geschrieben werden kann, wobei $L, R \in K^{n\times n}$ sind, L eine untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist, und die Diagonaleinträge von L alle gleich Eins sind. (Tipp: Denken Sie an eine eingeschränkte Menge von Zeilenumformungen.) (ii) Mein alter programmierbarer Taschenrechner (TI59) konnte zu einer Matrix aus reellen Fließkommazahlen wie in (i) die LR-Zerlegung ausrechnen und damit die gegebene Matrix invertieren. Hierbei wurden nur etwa $n^2 + n + 5$ Speicherplätze für Zahlen benötigt, die Zerlegung wurde also fast „in place“ gemacht. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der dies ermöglicht. (Der Rechner hatte 100 Speicherplätze und konnte 9×9-Matrizen in 12 Minuten invertieren.)
Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 11. Januar 2002, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.	