Übungsblatt Nr. 5, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?	
	Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für jede Menge M gibt es mindestens eine Relation auf M, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 512 verschiedene Relationen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge M sind genau dann gleich, wenn jede Äquivalenzklasse bezüglich der ersten Relation auch eine Äquivalenzklasse bezüglich der zweiten ist.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$ und neutralem Element 1.	
	Falls für $g \in G$ gilt $(g^{-1})^{-1} = g$, so ist $g = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $g \in G$ ist die Abbildung $r_g : \ G \to G,\, h \mapsto hg$ ein Isomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Gruppe mit genau n Elementen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn für $a, g \in G$ die Gleichung $ag = g$ gilt, so ist $a = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	G ist genau dann abelsch, wenn G kommutativ ist.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Das neutrale Element von G und H sei jeweils mit 1 bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Aus $x = y \in G$ folgt $\varphi(x) = \varphi(y)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Gilt für zwei Elemente $x, y \in G$, dass $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1$ ist, so ist entweder $x = 1$ oder $y = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist φ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Abbildung $\psi : G \to H$, für die $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ für alle $x \in G$ gilt, ist ein Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $x = \varphi(1)$, so folgt $x = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Seien M und N Mengen, $\mathcal{P}$ eine Partition von M und $g : \ M \to N$ eine Abbildung.	
	Falls g surjektiv ist, so gibt es eine Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen die Fasern von g sind.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls M endlich ist, gibt eine Abbildung $f : \ M \to M$, so dass die Partition $\mathcal{P}$ genau aus den nicht-leeren Fasern von f besteht.	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(x, y) \in M \times M \mid$ es gibt mindestens ein $C \in \mathcal{P}$ mit $\{x, y\} \subseteq C\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Fasern von g zu zwei Elementen von N sind entweder gleich oder ihr Durchschnitt ist die leere Menge.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls M endlich ist, hat $\mathcal{P}$ höchstens soviele Elemente wie M.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

5	Es sei G eine Gruppe. Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq G$ eine **Untergruppe von** G, wenn sie bezüglich der Multiplikation von G eine Gruppe ist. Zeigen Sie: (i) Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn folgende Aussage gilt: *Für alle* $a \in U$ *und* $b \in U$, *gilt* $a \cdot b^{-1} \in U$. Sei nun H eine weitere Gruppe und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: (ii) Es gilt $\varphi(1) = 1$. (iii) Es ist $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ für alle $x \in G$. (iv) Die Menge $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.
6	Seien L, M und N Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. (i) Für bijektive Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ sind auch $g \circ f$ und f^{-1} bijektiv. (ii) Die Gruppen S_M und S_N der Bijektionen von M nach M beziehungsweise N nach N sind genau dann isomorph, wenn es eine Bijektion $f : M \to N$ gibt. (iii) Wenn M genau m Elemente hat, dann hat die Gruppe S_M genau $m!$ Elemente.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 23. November 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.