Übungsblatt Nr. 9, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ gegeben: $$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad und \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -39 \\ 2 & -5 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & -5 & -32 \end{pmatrix}$$ Berechnen Sie jeweils den Rang der angegebenen Matrix.	
	$C^t - A^t B^t$	__________
	C	__________
	$AC^t + B^t$	__________
	A	__________
	$BA - C$	__________
2	Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?	
	Wenn es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	$Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b) - 1$ ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann gibt es $c \in K^{m\times 1}$, so dass $Ax = c$ unlösbar ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $c = 0$ hat $Ax = c$ mindestens $\|n - m\|$ (Absolutbetrag) Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.	
	Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{3\times 2}$ vom Rang 1 ist und $q = 2$.	__________
	Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 17$.	__________
	Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^3 für $q = 5$.	__________
	K^2 für $q = 13$.	__________
	Die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen in $K^{2\times 2}$ für $q = 3$.	__________
4	Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper K. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Der Spaltenrang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Zeilenraums.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $0 \neq c \in K$ und eine Matrix A haben A und $c \cdot A$ den gleichen Rang.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Spaltenraums.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist gleich der Differenz der Anzahl der Unbekannten und dem Rang der Matrix A.	◯ Ja / ◯ Nein

	Es sei A eine quadratische Matrix. Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix $-A$ invertierbar ist.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

5 Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Dabei sei V endlich-dimensional und W nicht der Nullvektorraum.

(i) Zeigen Sie, dass ein Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ (mit $n \in \mathbb{N}$) von Vektoren aus V genau dann eine geordnete Basis von V ist, wenn folgendes gilt: Zu jedem Tupel $(w_1, \dots, w_n)$ von Vektoren aus W gibt es genau eine lineare Abbildung φ von V nach W mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(ii) Sei K nun ein endlicher Körper mit q Elementen und $\dim_K V = n$. Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Basen von V.

(iii) Sei K wie in (ii). Bestimmen Sie $|GL_n(K)|$.

6 Sei K ein Körper, $A \in K^{k \times m}$ und $B \in K^{m \times n}$.

(i) Sei $m = 1$. Berechnen Sie rang$(A \cdot B)$.

(ii) Zeigen Sie: rang$(A \cdot B) \leq \min\{$rang A, rang $B\}$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel an, in dem rang$(A \cdot B) < \min\{$rang A, rang $B\}$ ist.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 21. Dezember 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.