Übungsblatt Nr. 4, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es sei $$(A,b) := \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$ die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ und $\frac{13}{5} \neq a \in \mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.	
	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die erste Komponente der Lösung?	________
	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die zweite Komponente der Lösung?	________
	Wenn $a = 3$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	________
	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	________
	Wenn $a = 4$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	________
2	Die Definitionen zur folgenden Aufgabe werden am Montag, dem 12.11.2001 in der Vorlesung behandelt. Welche der folgenden Relationen R sind Äquivalenzrelationen?	
	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a - b = 1\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R = \{(A,B) \in$ Pot$(\mathbb{N}) \times$ Pot$(\mathbb{N})$ |es gibt eine bijektive Abbildung von A nach $B\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b = 1\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b$ ist durch 6 teilbar$\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Die folgenden Aussagen beziehen sich auf lineare Gleichungssysteme über einem **beliebigen** Körper. Welche sind wahr?	
	Es gibt keine linearen Gleichungssysteme mit genau einer Lösung, die mehr Gleichungen als Unbekannte haben.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mehr als zwei Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Lösung eines linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$, dessen Koeffizienten alle positiv sind, enthält nur positive Zahlen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen, in dem mindestens $m-1$ der Koeffizienten gleich 0 sind, hat eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Berechnen Sie für die folgenden Matrizen mit Einträgen aus den reellen Zahlen jeweils eine Zeilenstufenform und geben Sie an, wieviele *Nullzeilen* das Ergebnis hat.	
	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 10 & -19 & -10 & -25 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	________
	$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	________

	$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}$ (magisches Quadrat)	__________________
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	__________________
	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	__________________

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

5 Es sei $K = \{0, 1\}$ ein Körper mit zwei Elementen (siehe Vorlesung). Lösen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem über K mit der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus und dokumentieren Sie genau, was Sie tun!
Wieviele Elemente hat die Lösungsmenge?

6 Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bereits bewiesene Ergebnisse dürfen Sie natürlich im Folgenden verwenden.

(i) Ist L die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten über einem Körper K und $s \in K^n$ eine Lösung, dann gilt

$$L = \{s + u \mid u \in L_0\},$$

wobei L_0 die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems ist. (Hierbei ist, wie in der Vorlesung, $s + u$ komponentenweise definiert.)

(ii) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K hat genau dann unendlich viele Lösungen, wenn das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

(iii) Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem über einem Körper K, das mehr Unbekannte als Gleichungen hat, hat unendlich viele Lösungen.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 16. November 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.