Übungsblatt Nr. 6, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = (x_{ij})$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie `Q` an (für *Quatsch*) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.	
	$X = ADB - 4C^2$	◯ Q / ◯ 79 / ◯ 18
	$X = D^3B - C$	◯ Q / ◯ 326 / ◯ 388
	$X = CAD + A$	◯ Q / ◯ 180 / ◯ 62
	$X = CAC$	◯ Q / ◯ -97 / ◯ 188
	$X = 7BA - 193D^2$	◯ Q / ◯ 0 / ◯ 1
2	Rechnen Sie jeweils in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und kreuzen Sie einen Vertreter der Ergebnisrestklasse an.	
	Es sei $n = 15$. Was ist $\overline{3} \cdot \overline{5}$?	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 3
	Es sei $n = 9$. Was ist $\overline{4444}^{4445}$?	◯ 4 / ◯ 7 / ◯ 1
	Was ist die letzte Dezimalziffer von 2^{100}?	◯ 1 / ◯ 3 / ◯ 6
	Es sei $n = 101$. Was ist $\overline{3}^{101}$?	◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 99
	Es sei $n = 37$. Was ist $\overline{17}^{2}$?	◯ 10 / ◯ 20 / ◯ 30
3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe. Mit φ sei die Eulersche Phi-Funktion bezeichnet.	
	Ist $\overline{527}$ in $\mathbb{Z}/1147\mathbb{Z}$ invertierbar?	◯ Ja / ◯ Nein
	Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Ist es richtig, dass genau dann $\varphi(n) = n - 1$ gilt, wenn n eine Primzahl ist?	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (multiplikativ) invertierbar. Ist dann auch a^2 invertierbar?	◯ Ja / ◯ Nein
	Was ist $\varphi(36)$?	◯ 8 / ◯ 10 / ◯ 12
	Welche der folgenden Zahlen ist in $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ ein Vertreter für das (multiplikative) Inverse von $\overline{16}$?	◯ 7 / ◯ 8 / ◯ 9
4	Sei R ein beliebiger Ring mit Nullelement 0 und Einselement 1.	
	Eine Aussage, die für jeden Ring gilt, gilt auch für jeden Körper.	◯ Ja / ◯ Nein
	R hat genau dann nur ein Element, wenn $0 = 1$ gilt.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt einen Ringisomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	R ist ein Körper, wenn R mindestens zwei Elemente hat, R kommutativ ist und es zu jedem Element $0 \neq r \in R$ ein $s \in R$ mit $rs = 1$ gibt.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper, wenn es keine Nullteiler gibt (das heißt, wenn es keine $x, y \neq \overline{0}$ mit $xy = \overline{0}$ gibt).	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

5	In dieser Aufgabe sei R ein kommutativer Ring, in dem $0 \neq 1$ gilt. Wir betrachten die Menge $R^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R. Sie bildet mit komponentenweiser Addition und Matrizenmultiplikation einen Ring (siehe Vorlesung nächste Woche). Ein **Nullteiler** in einem Ring ist ein Element $x \neq 0$, zu dem ein Element $y \neq 0$ existiert mit $x \cdot y = 0$. (i) Zeigen Sie, dass im Fall $n = 2$ ein Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$ genau dann eine Einheit in $R^{2\times 2}$ ist, wenn $ad - bc$ eine Einheit in R ist. (ii) Wieviele Elemente hat $GL_2(\mathbb{F}_2)$, die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen? (iii) Der Ring $R^{n\times n}$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ. (iv) Der Ring $R^{n\times n}$ hat für $n \geq 2$ Nullteiler.
6	Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. (i) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}$. (ii) Welche Untergruppen sind ineinander enthalten? (iii) Wieviele endliche Untergruppen gibt es? (iv) Welche Untergruppen sind *maximal*, das heisst welche Untergruppen sind echte Untergruppen $M \subsetneqq \mathbb{Z}$, so dass es keine echte Zwischengruppe $M \subsetneqq N \subsetneqq \mathbb{Z}$ gibt?

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 30. November 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.