Übungsblatt Nr. 2, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Die folgenden Abbildungen seien gegeben. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lvert\{p \in \mathbb{N} \mid\ p \text{ Primzahl}, p \leq x\}\rvert$ $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto 4x$ $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \{10, 23, 19, 1\}$, $x \mapsto 1$	
	Es gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Wertebereich von $h \circ g$ ist $\mathbb{Z}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Bild von $h \circ g$ enthält genau ein Element.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Komposition $g \circ h$ ist definiert.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Faser $(h \circ g \circ f)^{-1}(\{1\})$ ist $\mathbb{R}$.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Gelten die folgenden Aussagen für alle Abbildungen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$?	
	Das Urbild $g^{-1}(\{1, 2, 3\})$ ist $\mathbb{Q}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls jede Faser von f genau ein Element besitzt, so ist f bijektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Bild von g ist $\{1, 2, 3\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Wertebereich von g ist $\mathbb{Q}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{Z}$.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Sei (LGS) das lineare Gleichungssytem über $\mathbb{R}$: $\begin{array}{cccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + \ldots + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + \ldots + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + \ldots + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array}$	
	Die x_i sind die Unbekannten des (LGS).	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $b_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann gibt es eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ die Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \mathbb{Z}$, dann besteht auch jede Lösung aus Zahlen in $\mathbb{Z}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $m < n$ ist, dann gibt es unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Koeffizienten des (LGS) sind die x_i.	◯ Ja / ◯ Nein
4	In den folgenden Aufgaben sei K ein beliebiger Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1.	
	Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $a \in K$, $a \neq 0$, ist die Abbildung $K \longrightarrow K$, $x \mapsto ax$, bijektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für alle $a \in K$ gilt $-(-a) - a = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für alle $a \in K$ gilt $0 \cdot a = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für alle $a, b, c \in K$ ist $(a + 0 - c)(b + 1) = b(a + b - c) + a - b^2 - c$.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

5	Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen den Mengen M und N. Zeigen Sie die folgenden Aussagen. (a) f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$. (b) Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$, dann ist f surjektiv. (c) Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$, dann ist f injektiv.
6	Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $$\begin{array}{rrrcl} 5x_1 & +6x_2 & +(a+15)x_3 & = & 7 \\ -x_1 & & +(a-3)x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +(a+2)x_2 & +7x_3 & = & 4 \end{array}$$ über den reellen Zahlen (a) keine, (b) genau eine, (c) genau zwei oder (d) unendlich viele Lösungen?

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 2. November 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.