Übungsblatt Nr. 14, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Das Minimalpolynom einer Matrix zerfällt in Linearfaktoren.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist Minimalpolynom einer Matrix.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist $X - 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das konstante Polynom 1.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Ist $K = \mathbb{C}$ und $A^4 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Falls A und A^2 linear abhängig sind, dann ist A diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das charakteristische Polynom von A ist ein Teiler des Minimalpolynoms.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $A^2 = A$, dann ist A diagonalisierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes Polynom ist charakteristisches Polynom einer Matrix.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Bilinearformen.	
	Eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *nicht ausgeartet*, falls es zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein $w \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $(v,w) \neq 0$. Gibt es für $n = 2$ nicht ausgeartete Bilinearformen, so dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $(v,v) = 0$ gilt?	◯ Ja / ◯ Nein
	Bilden die Sesquilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ einen $\mathbb{C}$-Vektoraum der Dimension $2n$?.	◯ Ja / ◯ Nein
	Gibt es injektive Bilinearformen?	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist für $v \in \mathbb{C}^n$ die Abbildung $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $w \longmapsto \langle w, v\rangle$ linear?	◯ Ja / ◯ Nein
	Besteht das Bild des Standard-Skalarproduktes $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ genau aus den nicht-negativen reellen Zahlen?	◯ Ja / ◯ Nein
4	Tragen Sie die gefragten Zahlen in die vorgesehenen Felder ein.	
	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_{17}^{4\times 4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	
	Sei $M = \begin{pmatrix} -22 & 6 & 12 & 3 \\ -56 & 16 & 28 & 7 \\ -32 & 8 & 18 & 4 \\ 48 & -12 & -24 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$. Teilen Sie das charakteristische Polynom von M durch das Minimalpolynom von M und geben sie eine Nullstelle des Ergebnisses an.	
	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wieviele $a \in \mathbb{R}$ gibt es, so dass der Rang von $aE_3 - M$ kleiner als drei ist?	
	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$ haben genau zwei Eigenwerte in $\mathbb{F}_2$?	

	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1 \\ 2 & -2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Setzen Sie $3 \in \mathbb{Q}$ in das charakteristische Polynom von M ein und geben Sie das (gekürzte) Ergebnis an.	____________

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

5 Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Mit $\chi_A \in K[X]$ sei das charakteristische Polynom von A bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) Wenn $a \in K$ ist und die Dimension $\dim_K(V(a, A)) = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$ ist, dann gilt $(X - a)^m \mid \chi_A$.

(ii) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt und für alle Nullstellen a von χ_A gilt, dass die Dimension $\dim_K(V(a, A))$ gleich der Vielfachheit von a als Nullstelle von χ_A ist.

6 Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Weiter sei $\beta : V\times V \to K$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\beta(v + v', v + v') + \beta(v - v', v - v') = 2 \cdot (\beta(v, v) + \beta(v', v'))$ für alle $v, v' \in V$.

(ii) Ist $K = \mathbb{R}$, so gilt $\beta(v, v') = \frac{1}{2} (\beta(v + v', v + v') - \beta(v, v) - \beta(v', v'))$ für alle $v, v' \in V$.

(iii) Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $\beta(v, v') = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \beta\left(v + i^k \cdot v', v + i^k \cdot v'\right)$ für alle $v, v' \in V$.

(iv) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, für die $\beta(v_j, v_k) = \delta_{j,k}$ (Kronecker-Delta) für $1 \leq j, k \leq n$ gilt, dann gilt:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \beta(v, v_k) \cdot v_k \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Bemerkung: Die Formel in (i) wird **Parallelogrammidentität** und die Formeln in (ii) und (iii) werden **Polarisationsidentität** genannt.
Was hat die Formel in (i) mit Parallelogrammen zu tun?

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 8. Februar 2002, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.