Übungsblatt Nr. 7, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W **linear** ist.	
	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f - f$	◯ Ja / ◯ Nein
	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 3x$	◯ Ja / ◯ Nein
	$K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^2$	◯ Ja / ◯ Nein
	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$	◯ Ja / ◯ Nein
	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1, 2) \cdot M$	◯ Ja / ◯ Nein
2	Welche der folgenden Aussagen über lineare Abbildungen sind wahr?	
	Es gibt eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, die kein $\mathbb{F}_2$-Homomorphismus ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist die Verkettung zweier Abbildungen zwischen K-Vektorräumen linear, dann ist mindestens eine der beiden Abbildungen linear.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jeder $\mathbb{R}$-Homomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist injektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt zwei lineare Abbildungen, deren Verkettung zwar definiert aber nicht linear ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung ist linear.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es seien A und B Matrizen über einem Körper K, so dass $A \cdot B$ definiert ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
	Die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von B.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gilt $A \cdot B^t = (B \cdot A^t)^t$, falls die rechte Seite definiert ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $A \cdot (A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t = A$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Zeile von $A \cdot B$ liegt im Zeilenraum von B.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Spalten von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von A.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen?	
	$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^t\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist beschränkt}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		
5	Es seien K ein Körper und M und N zwei Matrizen aus $K^{m\times n}$. Zeigen Sie: (i) Wenn N aus M durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht, dann ist der Zeilenraum von M gleich dem Zeilenraum von N. (ii) Wenn M in Zeilenstufenform ist und N aus M hervorgeht, indem eine Zeile, in der nicht nur Nullen stehen, mit 0 multipliziert wird, dann ist der Zeilenraum von M verschieden vom Zeilenraum von N.	

6	Sei K ein Körper. Wir betrachten die Menge $K^{\mathbb{N}_0}$ der Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach K. Für $f, g \in K^{\mathbb{N}_0}$ und $a \in K$ definieren wir: $$\begin{aligned} f+g: \quad & \mathbb{N}_0 \longrightarrow K, \quad n \mapsto f(n)+g(n) \\ a \cdot f: \quad & \mathbb{N}_0 \longrightarrow K, \quad n \mapsto af(n) \end{aligned}$$ Wir bezeichnen mit $K^{(\mathbb{N}_0)}$ die Teilmenge der Abbildungen $f \in K^{\mathbb{N}_0}$, für die es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) \neq 0$ gibt. Schließlich definieren wir für $f, g \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ die Verknüpfung $f \star g \in K^{(\mathbb{N}_0)}$, so dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(f \star g)(n) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}_0, a+b=n} f(a)g(b)$. (i) Zeigen Sie, dass $K^{\mathbb{N}_0}$ bezüglich der oben angegebenen Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist. (ii) Zeigen Sie, dass $K^{(\mathbb{N}_0)}$ ein Untervektorraum von $K^{\mathbb{N}_0}$ ist, der nicht von endlich vielen Elementen erzeugt wird. (iii) Zeigen Sie, dass $\star$ tatsächlich eine Verknüpfung auf $K^{(\mathbb{N}_0)}$ definiert. Für welches Element, das wir mit X^0 bezeichnen wollen, gilt $X^0 \star f = f$ für alle $f \in K^{(\mathbb{N}_0)}$? (iv) Sei $X : \mathbb{N}_0 \longrightarrow K$ die Abbildung mit $1 \mapsto 1$ und $n \mapsto 0$ für $n \neq 1$. Beginnend mit dem Element X^0 aus Teil (iii) definieren wir $X^i \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ rekursiv als $X^{i-1} \star X$ für $i > 0$. Zeigen Sie, dass jedes $f \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ eine eindeutige Linearkombination von $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$ ist. (v) Zeigen Sie, dass $(K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \star)$ ein Ring ist. **Anmerkung:** Der Ring $K^{(\mathbb{N}_0)}$ wird oft mit $K[X]$ bezeichnet und heißt *Polynomring* über K.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 7. Dezember 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.