Übungsblatt Nr. 3, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es sei K ein beliebiger Körper. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Es sei $0 \neq a \in K$ und $b \in K$. Dann hat die Gleichung $ax = b$ in K eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jeder Körper hat nur endlich viele Elemente.	◯ Ja / ◯ Nein
	In jedem Körper K gilt $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ für beliebige $a, b, c, d \in K$.	◯ Ja / ◯ Nein
	In jedem Körper ist $1 + 1 \neq 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gilt $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ für beliebige $a, b, c \in K$.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme wahr?	
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Nullspalte ist in der Lösungsmenge jedes beliebigen linearen Gleichungssystems.	◯ Ja / ◯ Nein
	Zwei lineare Gleichungssysteme haben genau dann dieselbe Lösungsmenge, wenn das eine aus dem anderen durch **genau eine** elementare Zeilenumformung hervorgeht.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt keine linearen Gleichungssysteme mit genau einer Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.	
	$a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$	◯ Ja / ◯ Nein
	A ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 11x_3 = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Matrix A hat 3 Zeilen und zwei Spalten.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Die Koeffizienten der Matrizen in den folgenden Aufgaben seien alle aus $\mathbb{R}$.	
	Sei A in Zeilenstufenform und seien die i-te und j-te Zeile für $i \neq j$ verschieden. Vertauscht man die i-te und j-te Zeile, so erhält man eine Matrix, die keine Zeilenstufenform hat.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit einer Nullzeile bringen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform und habe A eine Nullzeile. Dann hat das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.	◯ Ja / ◯ Nein

	Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

5 Es sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, verwenden Sie **nur** die Körperaxiome oder Aufgabenteile, die sie bereits bewiesen haben.

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$.

(ii) Gilt $a + b = 0$ mit $a, b \in K$, so ist $b = -a$.

(iii) $-a = (-1) \cdot a$ für alle $a \in K$.

(iv) $-(-a) = a$ für alle $a \in K$.

(v) Gilt $a \cdot b = 1$ mit $a, b \in K$, so ist $b = a^{-1}$.

(vi) Sei $0 \neq a \in K$. Dann ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

(vii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a + b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 0$.

(viii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a \cdot b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 1$.

(ix) Ist $a \cdot b = 0$ mit $a, b \in K$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$ (oder beides).

(x) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

6 Beantworten Sie die folgenden Fragen durch einen Beweis oder ein Beispiel (mit Begründung!).

(i) Gibt es ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0 \text{ oder } y = 0 \right\}?$$

(ii) Gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}?$$

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 9. November 2001, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.