Übungsblatt Nr. 12, Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Für Matrikelnummer: 100000

1	Es sei K ein beliebiger Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jedes Polynom $0 \neq f \in K[X]$ hat nur endlich viele Nullstellen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Zwei verschiedene normierte Polynome in $K[X]$ vom Grad 1 sind teilerfremd.	◯ Ja / ◯ Nein
	In $K[X]$ gibt es irreduzible Polynome.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es sei $0 \neq a \in K$. Dann gilt: Zwei Polynome $f, g \in K[X]$ sind genau dann teilerfremd in $K[X]$, wenn es Elemente $\lambda, \mu \in K[X]$ gibt mit $\lambda f + \mu g = a$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jedes Polynom hat eine Nullstelle in K.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über Polynome richtig?	
	In $\mathbb{F}_2[X]$ ist $(X^2 + X + 1) \cdot (X^2 + X)$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von $X^4 + X$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Bild von $Y^2 - 2Y - 15$ unter dem Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{Q}[Y] \to \mathbb{Q}, Y \mapsto 2$ ist 0.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Polynom $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.	◯ Ja / ◯ Nein
	Teilt man in $\mathbb{F}_2[X]$ das Polynom X^4+X^3+X+1 mit Rest durch X^2+X+1, so bleibt als Rest 1.	◯ Ja / ◯ Nein
	Das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K^*$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist A eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann auch A^{-1}.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sind zwei Spalten von A linear abhängig, dann ist $\det(A) = 0$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $A \cdot \tilde{A} \neq 0$ ist ($\tilde{A}$ ist die zu A komplementäre Matrix).	◯ Ja / ◯ Nein
	Es sei $K = \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist $a_{ij} \notin \mathbb{Q}$ für ein Paar (i, j), dann ist auch $\det(A) \notin \mathbb{Q}$.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Sind alle $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, dann gilt: $A^{-1} = \left(\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\right)$ mit gewissen $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $c_{ij} \mid \det(A)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}^{n \times n}$, wenn $\det(A) \in \{1, -1\}$ ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar und $A^t = A^{-1}$. Dann ist $\det(A) = 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $\det(A) \in \{1, -1\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ invertierbar.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.		

5	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $0 \neq f \in K[X]$ mit $\deg(f) \leq n^2$, für das $f(A) = 0 \in K^{n\times n}$ ist.
6	Es sei K ein Körper und $\mathcal{P}(K)$ die Menge der Polynomfunktionen, also $$\mathcal{P}(K) := \left\{ f : K \to K, k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \;\middle|\; \text{für ein } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und gewisse } a_i \in K, 0 \leq i \leq n \right\}.$$ Zeigen Sie: (i) $\mathcal{P}(K)$ mit dem üblichen, punktweisen Produkt $(f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k)$ für $f, g \in \mathcal{P}(K)$ und $k \in K$ ist eine K-Algebra. (ii) Es existiert ein surjektiver K-Algebren-Homomorphismus $\alpha : K[X] \to \mathcal{P}(K)$. (iii) Der Homomorphismus α ist genau dann bijektiv, wenn K unendlich viele Elemente enthält.

Abgabe bis spätestens am Freitag, dem 25. Januar 2002, um 12 Uhr im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik.