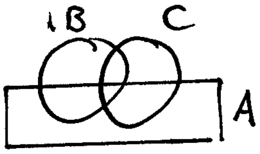
LA, WS 2001, Prof. Hiß

Scheinklausur 1. Teil, 14. 12. 2001

Lösungsideen von Klaus Richler (klaus@kridder.de)

1.1 JA



1.2 JA,

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow B \text{ liegt in } A \text{ oder ist } \emptyset \\ \Rightarrow B = \emptyset \end{array}$$

1.3 NEIN:

$A \cap C = \emptyset$

2.1 JA: jedes Element hat einen eindeutigen Partner.

2.2 NEIN: Pot({1,2,3}) hat mehr als 3 Elemente, damit wird nicht der ganze Zielraum abgedeckt.

2.3 JA: Jedes Element hat ein anderes Bild. man kann jedes Bild erreichen ($\sqrt{}$!)

3.1 JA:

3.2 NEIN: $f(2,2)=0$ gilt z.B. auch.

3.3 JA: Man kann jedes Element durch beliebig viele Tupel erreichen.

4.1 JA: auch die leere Menge ist eine Menge.

4.2 JA: $\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{array}$ hier muss man in jedem Fall mind. n-m (also 2) Variablen setzen.

4.3 NEIN: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$ „ist nicht Untervektorraum"

5.1 JA $U \cap W \neq U \Rightarrow U \not\subseteq W \Rightarrow$ U liegt (zumindest teilweise) außerhalb von W $\Rightarrow W \neq U + W$.

5.2 NEIN z.B. 2 Ebenen im R3. Die Kombination 2er Vektoren muß dann nicht unbedingt wieder in einer der Ebenen liegen. (Abgeschlossenheit ist aber Voraussetzung für Untervektorraum!

5.3 JA $\subseteq$ bedeutet „Teilmenge". Da beides Untervektorräume sind (also beide abgeschlossen), ist W UVR von U, wenn es Teilmenge ist.

6.1 JA klar.

6.2 NEIN $|\{(12)(3)(4), (12)(34)\}| = 2 \neq 8.$

6.3 JA JA, denn da Abb. surjektiv gibt es keine nicht-leeren Fasern.

7.1 JA: $K^{m \times n} \cdot K^{n \times m} = K^{m \times m}$

bei Matrixmultiplikation immer die äußeren Buchstaben betrachten!

7.2 JA: $K^{16 \times 1} \cdot K^{1 \times 17} = K^{16 \times 17}$ Zeilen Spalten

7.3 NEIN: z.B. $A = B$.

8.1 JA: Bild (Erzeugnis (Vektoren)) = Erzeugnis (Bild (Vektoren))

8.2 NEIN: z.B. Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: l.u. Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ können auf die gleichen Vektoren in $\mathbb{R}^2$ abbilden.

8.3 JA: ~~Es~~ ist die Definition einer geordneten Basis, daß kein Element doppelt vorkommt.

8.4 NEIN: Es gilt "≤" (jeder ~~W~~ Vektor hat ein anderes Bild")

9.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} - \\ \\ \oplus \\ \oplus \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = x_3 + 1 \\ \Rightarrow x_2 = x_3 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ L.U. Lösungsvektoren:

$$
\begin{pmatrix} p+1 \\ p \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{Raum, der durch beide Vektoren aufgespannt wird.}}
$$

10.

z.z: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

IA: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV: sei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ q.e.d.

6

11.

Z.z: $\left.\begin{array}{l} v_1 \neq v_2 \\ \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (v_1, v_2)$ l.u.

Seien (v_1, v_2) l.a.

$\left.\begin{array}{l} v_1, v_2 \text{ l.a.} \\ v_1 \neq v_2 \\ v_1, v_2 \neq 0 \end{array}\right\} v_1 = a \cdot v_2 \quad \text{mit} \quad a \neq 0, a \neq 1$

l.a. $\rightarrow \quad v_1 - a \cdot v_2 = 0$ $\quad | 0 \rightarrow 0$

$\Rightarrow \varphi(v_1 - a \cdot v_2) = 0$ $\quad$ | Linearität

$\Rightarrow \varphi(v_1) - a \cdot \varphi(v_2) = 0$ $\quad | \varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ n. V.

$\Rightarrow \varphi(v_1) - a \cdot \varphi(v_1) = 0$

$\Rightarrow a = 1 \quad \Rightarrow$ ↯ Widerspruch!

Behauptung widerlegt

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ l.u.

12.

$A \to A + A^T \qquad \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$

(i) z.z.: $\varphi(s \cdot A + B) = s \cdot \varphi(A) + \varphi(B)$

$$\varphi\left(s \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = s \cdot \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} sa_1 + b_1 & sa_2 + b_2 \\ sa_3 + b_3 & sa_4 + b_4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 & sa_2 + sa_3 \\ sa_2 + sa_3 & 2a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 & b_2 + b_3 \\ b_2 + b_3 & 2b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(sa_1 + b_1) & sa_2 + b_2 + sa_3 + b_3 \\ sa_2 + b_2 + sa_3 + b_3 & 2(sa_4 + b_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2sa_1 + 2b_1 & sa_2 + sa_3 + b_2 + b_3 \\ sa_2 + sa_3 + b_2 + b_3 & 2sa_4 + 2b_4 \end{pmatrix}$$

q.e.d.

(ii) $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} b+c = 0 \\ 2a = 0 \\ 2d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ d = 0 \\ b = -c \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}$$

q.e.d.

(iii) $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ Dies sind genau alle Matrizen mit $A = A^T$, da alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen sogar identisch sind.

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}.$$

13. (nur Ansatz)

(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$, da wir genau 2 l.u. Basisvektoren haben.

(ii)
(iii)

		Ring	Körper	Gruppe	
⊕	Neutrales El.	X	X	X	$a \cdot x = x$
	Inverses El.	X	X	X	$a \cdot x = x^{-1}$
	Kommutativ	X	X	abelsch	$xy = yx$
	Assoziativ	X	X	X	$(xy)z = x(yz)$
⊙	Neutrales El.	X	X		
	Inverses El.		X		
	Kommutativ	( )	X		
	Assoziativ	X	X		

Zeige diese Punkte.

⊕/⊙ Distributiv

Verknüpfung in V Verknüpfung in W

(iv)

Gruppenhomomorphismus:	$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
Ringhomomorphismus zusätzlich:	$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
	$\varphi(1) = 1$