LINEARE ABBILDUNGEN / MATRIZEN

Wir betrachten 2 Vektorräume V und W:

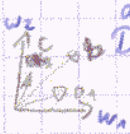
BASIS VEKTOREN

V (3-dimensional): $x = x_1 \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} v_3 \end{pmatrix}$

Jedem Basisvektor aus V wird ein Bildvektor in W zugeordnet: $f(v_1), \dots, f(v_3)$.

BASISVEKTOREN

W (2-dimensional): $y = y_1 \begin{pmatrix} w_1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} w_2 \end{pmatrix}$



Wollen wir nun das Bild von x (also $f(x)$), dann ersetzen wir einfach $v_1, \dots, v_3$ durch deren Bilder. Die Koeffizienten bleiben gleich. (das ist ja linear! :-))

Nun wollen wir diese Bilder der Basisvektoren von V in der Basis von W darstellen:

$f(v_1) = a_1 w_1 + a_2 w_2$

$\begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{21} \\ w_{1} \end{bmatrix}$ · $f(v_2) = b_1 w_1 + b_2 w_2$

$f(v_3) = c_1 w_1 + c_2 w_2$

"w_1-Anteil"

Das bunte hier sind also dann die Koeffizienten vor den Bildern der Basisvektoren von V

Und die stehen in der Abb. Matrix in den Spalten!!! *6*

a, b und c (unsere ausgesuchten Vektoren, die Bilder von v_1, v_2, v_3 also) sind nun praktisch einfach ~~...~~ mit den Basisvektoren vom w dargestellt.

Anders ausgedrückt: unsere schöne Abbildungsmatrix $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

denn die Spalten hier werden ja einfach "gekippt"!

... ist nix anderes als: In den Spalten stehen die Koeffizienten, die man vor den jeweiligen Basisvektor aus W packen muß, um unseren ausgesuchten Bildvektor eben in diesem W darzustellen.

Diese Abb. Matrix muß man jetzt vor die Matrix (~~aus~~ die aus Vektoren besteht!! (oder halt 1 Vektor)) stellen, die man abbilden will.

[Jede Spalte der abzubildenden Matrix ist dann 1 abzubildender Vektor!!!]

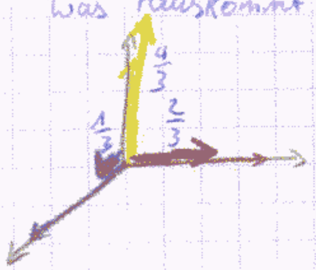
$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = [$ STOP! nehmen wir erstmal nur 1 Vektor:

x-Anteil von w_1 $\rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ ← "x-Anteil"

Ist das denn jetzt auch das Bild des 1. Basisvektors ??? Ja, bezüglich d. Basis von W!!!

$a_1 v_{11} + b_1 v_{21} + c_1 v_{31}$ ← was iss'n das ???

Wir bilden hier 1 Vektor aus V auf einen in W ab; das was rauskommt ist dann ein Vektor i.d. Basis von W dargestellt.

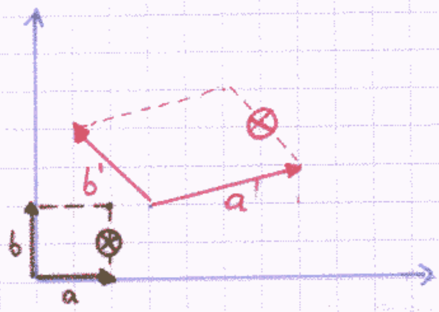


$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$ ← zusammengeschustert x-Anteil ~~vom~~ in Basis W (noch in Standardbasis!)

Y-Anteil

der Vektor, den wir abbilden wollen

LINEARE ABBILDUNG



$V \to W$ (hier $V = W$)

Hier haben wir ein Koordinatensystem, welches von den beiden Basisvektoren a und b aufgespannt wird.
Jeder Punkt läßt sich in dieser Basis darstellen z.B. $\otimes = a + \frac{1}{2} b$.

Bei einer LINEAREN ABBILDUNG bilden wir nun jeden Basisvektor auf einen neuen ↗ ab.
Das BILD jedes Punktes ist dann einfach die alten Koeffizienten · die neuen Vektoren:

VORHER: $\otimes = a + \frac{1}{2} b$

JETZT: $\otimes = a' + \frac{1}{2} b'$

Um die Abbildung zu definieren schreibt man auf, wie die neuen Basisvektoren in der Basis des Zielraumes aussehen (hier bleiben wir im gleichen Raum, also wie man hier die neuen Vektoren in der alten Basis ausdrückt):

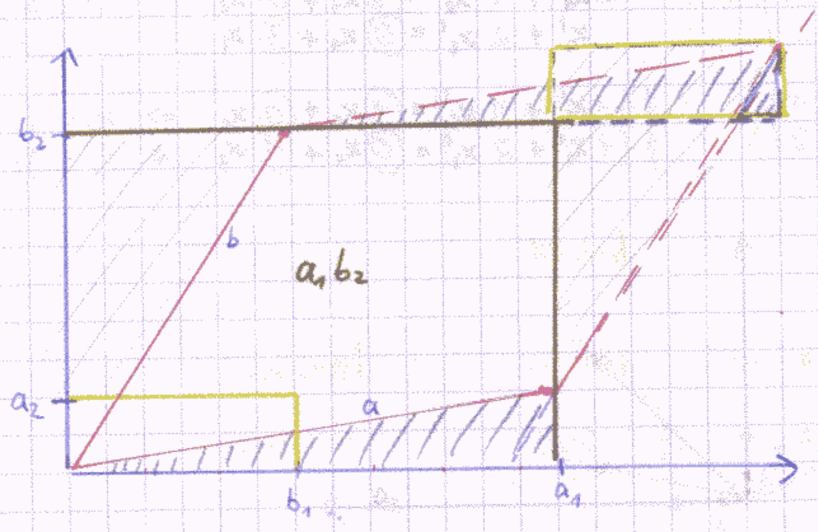
$$a' = 2 \cdot a + \frac{1}{2} b$$
$$b' = -a + b$$

Jetzt will ich Punkt $\otimes$ erreichen:

$1 \cdot a' + \frac{1}{2} \cdot b'$, wie vorher, eben nur mit neuen Basisvektoren.

DETERMINANTE - grafisch motiviert

Die Determinante ist der Flächeninhalt des abgebildeten Parallelogramms aus den beiden abgebildeten Vektoren:



$$|A = a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Die Teile, die im roten Viereck gegenüber dem schwarzen Viereck $a_1 b_2$ fehlen, werden außen ja wieder angesetzt, aber nicht ganz: dem unteren Teil fehlt die kleine Ecke rechts unten, dem rechten Teil fehlt das Dreiek oben. Außerdem überschneiden sich die Ansätze in der Mitte, werden also 2x angesetzt, wir müssen also 1x wieder abziehen.

Zusammen ergibt das dann das gelbe Rechteck. qed.

(Beweisen läßt sich das übrigens mittels ✶ Skalarprodukt, denn es gilt:

$$A^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$
)

BEISPIEL:

$$\underset{V}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{W}{\begin{pmatrix} x_1 + \quad 2x_3 \\ -x_1 + x_2 \quad - \end{pmatrix}}$$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$.

$$B_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unsere Abb. Matrix ist hier ganz einfach, weil wir in V die Standardbasis haben:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$ Abbildungsmatrix:

Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren von V, (dargestellt in B_w!)

↑ diese Matrix stellt noch nicht in B_w dar, sondern erstmal auch in W in der Einheitsbasis.

d.h.: $$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ← Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren (der Standardbasis von B)

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↑ noch in Standardbasis!!

Basiswechsel: jetzt müssen die Vektoren der jetzigen Abbildungsmatrix in der neuen (B_w) ausdrücken:

Bild des 1. Basisvektors aus V (noch i.d. ~~Einh.-Vektor~~ Stand. Basis) → $$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← durch probieren oder LGS:

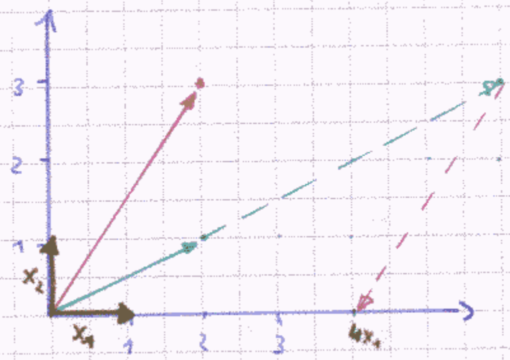
$$\left| \begin{matrix} 1 = -2x + 1y \\ -1 = 0x + 1y \end{matrix} \right|$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

UMKEHRABBILDUNG / INVERSE MATRIX V2



Wir suchen nun zum LGS der Abbildung die Umkehrabbildung:

$$\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 1x_1 + 3x_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdot 2 \; \oplus$$

$$\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + 2x_2 \\ x_1' - 2x_2' = -4x_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \cdot 2 \; \oplus$$

$$\begin{array}{l} 3x_1' - 2x_2' = 4x_1 \\ 1x_1' - 2x_2' = -4x_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x_1' & -2x_2' \\ -1x_1' & 2x_2' \end{pmatrix} \begin{array}{l} = 1x_1 \\ = 1x_2 \end{array} \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Bei $3 \cdot \nearrow - 1 \cdot \uparrow$ kommt man auf $4 \cdot \vec{x_1}$. Es stehen also weiterhin die Koeffizienten in den Spalten, die man vor die Vektoren $\nearrow$ und $\uparrow$ packen muß, um auf $\vec{x_1}$ oder $\vec{x_2}$ zu kommen.

Allgemein gilt:

A

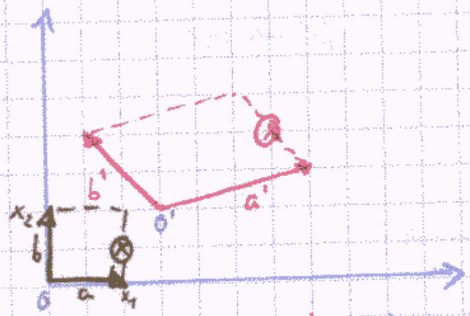
$$\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \cdot(-a_2) \\ \oplus \; \cdot(+a_1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c:c} 1 & \\ a_2 & -a_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} a_1 & b_1 \\ & a_1b_2 - a_2b_1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \cdot \det A \\ \cdot b_1 \end{array} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = \det A$$

$$\left(\quad\right) \vdots \left(\quad\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A' = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A}}$$

Um einen beliebigen Punkt ⊗ auf ⊗ abzubilden,
muß ich dessen „a-Anteil" (hier = x-Koordinate) auf a' gehen:



anschließend den b-Anteil auf b': et voilà, ich bin am neuen Punkt.
also:

$$\otimes = \text{a-Anteil} \cdot \vec{a}' + \text{b-Anteil} \cdot \vec{b}' + \vec{c}$$

← in diesem Fall noch eine Verschiebung, kommt bei reiner lin. Abb. jedoch nicht vor.

$$\begin{cases} \otimes_1 = \text{a-Anteil} \cdot a_1' + \text{b-Anteil} \cdot b_1' & \mid \text{a-Anteil} = x_1 \\ \otimes_2 = \text{a-Anteil} \cdot a_2' + \text{b-Anteil} \cdot b_2' & \mid \text{b-Anteil} = x_2 \end{cases}$$

Dieses System (dasselbe in Koordinatenschreibweise) stellt also jeden beliebigen Punkt dar: $\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$ ist hierbei das Bild des 1. Original-Basisvektors, dargestellt in dieser Original-Basis.

$\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}$ ist jetzt unsere „Abbildungsmatrix":

in den Spalten stehen die Bilder der Basisvektoren, dargestellt in der Ausgangsbasis.

In der 1. Zeile steht: $x_1 \cdot a_1' + x_2 \cdot b_1' = z_1$

x_1: x-Anteil des Ausgangspunktes
a_1': x-Anteil des neuen „x-Vektors"
x_2: y-Anteil des Ausgangspunktes
b_1': x-Anteil des neuen „y-Vektors"

logisch, da der neue y-Vektor auch eine x-Richtung besitzt, muß diese verhältnismäßig so weit berücksichtigt werden, wie der Ausgangspunkt in y-Richtung „ragte".

VERKETTETE ABBILDUNGEN

$$x'' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1'' = a_1 (\quad x_1' \quad) + b_1 (\quad x_2' \quad) \qquad x_1' = u_1 x_1 + v_1 x_2$$

$$x_2'' = a_2 (\quad x_1' \quad) + b_2 (\quad x_2' \quad) \qquad x_2' = u_2 x_1 + v_2 x_2$$

$$x_1'' = a_1 (u_1 x_1 + v_1 x_2) + b_1 (u_2 x_1 + v_2 x_2)$$

$$x_2'' = a_2 (u_1 x_1 + v_1 x_2) + b_2 (u_2 x_1 + v_2 x_2)$$

$$x_1'' = x_1 (a_1 u_1 + b_1 u_2) + x_2 (a_1 v_1 + b_1 v_2)$$

$$x_2'' = x_1 (a_2 u_1 + b_2 u_2) + x_2 (a_2 v_1 + b_2 v_2)$$

Dies entspricht der bekannten Matrix-Multiplikation, bei der die Spalten der 2. Matrix „gekippt" und auf die Zeilen der 1. Matrix gelegt werden, und dann komponentenweise multipliziert und das ganze zusammengezählt wird. Das Ergebnis kommt dann in das Kreuzungsfeld der Zeile und Spalte, die wir bearbeitet haben.

1. Matrix

2. Matrix

UMKEHRABBILDUNG / INVERSE MATRIX V1 (schlechtes Beispiel)

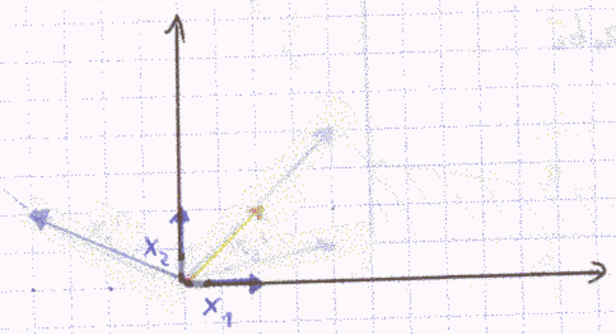
$$\begin{array}{cccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot x_1' & \cdot x_2' \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad \begin{aligned} x_1' &= -2\,x_1 + 1\,x_2 \\ x_2' &= 1\,x_1 + 1\,x_2 \end{aligned} \qquad \cdot 2 \ \oplus$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1' &= -2\,x_1 + 1\,x_2 \\ x_1' + 2\,x_2' &= 0\,x_1 + 3\,x_2 \end{aligned} \qquad \cdot 3 \ \ominus$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1' + -2\,x_2' &= -6\,x_1 + 0\,x_2 \\ x_1' + 2\,x_2' &= 0\,x_1 + 3\,x_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &|:(-6) \\ &|:(3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{3}(-1\,x_1' + 1\,x_2') &= 1\,x_1 + 0\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{1}{3}(-x_1' + x_2') \\ \tfrac{1}{3}(1\,x_1' + 2\,x_2') &= 0\,x_1 + 1\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \tfrac{1}{3}(x_1' + 2x_2') \end{aligned}$$



Wie kehre ich diese Abbildung um??

Nun, bisher haben wir ↖ und ↗ in den Basisvektoren dargestellt.

Jetzt ist es andersrum: wir müssen x_1 und x_2 in den abgebildeten Vektoren ↑ und ↗ darstellen. Dazu lösen wir das LGS (rechts) auf nach ~~Die Inverse~~ x_1 und x_2 (d.h. vor x_1 und x_2 einmal oben und einmal unten eine 1 packen.) Links ist dasselbe, nur einfacher geschrieben (als Matrizen).

Die Ergebnismatrix (Umkehrabbildung!) ist nun so zu interpretieren:

a) ZEILEN: $\frac{1}{3}(-1 \cdot$ ↖ $+ 1 \cdot$ ↗$) = \vec{x_1}$

b) SPALTEN: (Mist, hier identisch...) ← Zufall

EIGENRÄUME / EIGENVEKTOREN / EIGENWERTE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

Eigenvektoren sind Vektoren, die bei der Abbildung ihre Richtung nicht ändern.
Da bei uns lin. Abb. ja keine Verschiebungen beinhalten, sind Eigenvektoren also alle Vektoren, bei denen die Abbildung nur eine Streckung um einen bestimmten Faktor bewirkt.
(dieser Faktor heißt übrigens „Eigenwert".)

Also, auf welche Vektoren trifft das nun zu? —
Rechnen wir es aus: (λ ist der Streckfaktor):

$$\alpha : v' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \qquad v' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung soll nun der Streckung des Vektors mit einem Faktor λ gleichkommen, also v_1 und v_2 sollen durch die Abb. beide mit λ multipliziert werden:

$$a_1 v_1 + b_1 v_2 = \lambda v_1$$
$$a_2 v_1 + b_2 v_2 = \lambda v_2$$

Das lösen wir zuerst nach dem Eigenwert λ auf:

$$\left| \begin{matrix} (a_1 - \lambda) v_1 + b_1 v_2 = 0 \\ a_2 v_1 + (b_2 - \lambda) v_2 = 0 \end{matrix} \right| \hat{=} \det. \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

NR

$$\left| \begin{matrix} a + bc = 0 \\ b + d = 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \cdot d \\ \cdot c \end{matrix}$$
$$\left| \begin{matrix} a + c = 0 \\ ad - bc = 0 \end{matrix} \right|$$

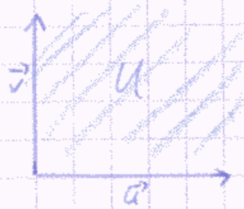
$$(a_1 - \lambda) \cdot (b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda (a_1 + b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \leftarrow \text{„Charakteristisches Polynom"}$$

... denn immer wenn $\det = 0$ gibt es eine eindeutige Lösung des LGS.
Die Lösungen dieser Gleichung sind die „Eigenwerte".
Dann setzt man λ ins LGS ein und hat den Eigenvektor.

Trivialerweise ist ja das Vielfache eines Eigenvektors auch wieder ein Eigenvektor.

$$A(r\vec{u}) = r(A\vec{u}) = r(\lambda\vec{u}) = \lambda(r\vec{u})$$

Da also alle Summen von Eigen-Vektoren und auch deren Vielfache Eigenvektoren sind, bilden diese einen Unterraum von V:



$\Leftarrow$ jeder Punkt in U ist durch LK von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erreichbar.

BEISPIEL 1: (Matrix mit 2 Eigenwerten)
(d.h. charakt. Polynom hat 2 Nullstellen):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \lambda v_1 \\ 2v_1 &= \lambda v_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\cancel{= (\lambda-1)(\lambda-0)} \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{vmatrix} v_1 + v_2 = 2v_1 \\ 2v_1 = 2v_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

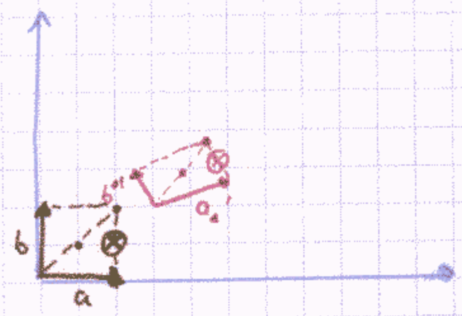
$$v_1 + v_2 = -1v_1 \rightarrow 2v_1 + v_2 = 0$$

$$\cancel{v_2 = 0}$$

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{2v_1 + v_2 = 0} \Rightarrow v_2 = -2v_1$$

LINEARE ABBILDUNG



Jeder Punkt im Koordinatensystem, welches aus (in diesem Fall im 2-dim.) 2 Basisvektoren aufgespannt ist, lässt sich in dieser Basis darstellen, so z.B. $\otimes = a + \frac{1}{4} b$.

Bei einer LINEAREN ABBILDUNG werden nun die Basisvektoren auf neue ↗ „abgebildet". Jeder Punkt behält nun die Koeffizienten vor den Basisvektoren, aber diese werden jetzt gegen die neue ersetzt.

VORHER: $\otimes = a + \frac{1}{4} b$

JETZT: $\otimes = a' + \frac{1}{4} b'$

Dabei schreibt man auf, wie die „neuen" Basisvektoren in der alten Basis dargestellt werden:

$$a' = a + \frac{1}{4} b$$
$$b' = -\frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b$$

Also nochmal: wir haben die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

~~Die~~ Das charakteristische Polynom, dessen Lösungen λ (also die Nullstellen) die Eigenwerte λ sind, hat hier die Form:

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

dieses „absolute Glied" ist die Determinante der Abbildung: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Diese muß ja $\neq 0$ sein (da nur dann das LGS eindeutig lösbar war.)

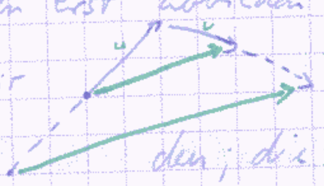
Daher <u>muß</u> $\lambda \neq 0$ sein, damit die Gleichung $= 0$ werden kann.

MAUNZ!

Ach ja: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Eigenvektoren (also Vektoren, die durch die Abbildung nur gestreckt werden), so ist auch deren Summe ein Eigenvektor:

Die gleiche Abbildung A kann man ja auf die Summe von 2 Vektoren anwenden, oder auf jeden Vektor einzeln und die Ergebnisse addieren – das ist dasselbe.

Hier ist die Abbildung ja für beide Vektoren eine Streckung statt (sogar dieselbe). Also ist es wirklich egal, ob wir beide Vektoren erst abbilden und dann die Resultierende bilden, oder ob wir erst die Resultierende bilden und dann abbilden, die Abbildung ist ja dieselbe Streckung.



ALSO: $\vec{u} + \vec{v}$ auch ~~e~~ Eigenvektor !

Eigenvektor

Basisergänzungssatz:

$V = \langle X \rangle$ K-Vektorraum

$X \subseteq V$ Erzeugendensystem

$L \subseteq V$ l.u. $\Rightarrow$ dann gibt es $Y \subseteq X$ sodaß $L \cup Y = B$ Basis von V ist.

Folgerung: - Jeder Vektorraum hat eine Basis.

- Jedes Erzeugendensystem von V (K-Vektorraum) enthält eine Basis von V.

[Wähle in Satz 1 $L = \emptyset$]

Bemerkung 2: Satz 1 und Folgerung kann ohne Lemma von Zorn nur für $|X| < \infty$ bzw. für endlich erzeugte Vektorräume bewiesen werden.

Beispiel: $V = K^{2\times 2}$
K Körper.

$X = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ... $\langle X \rangle = V$

$L = \left\{ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

L ist l.u., denn $\underline{0} = s \cdot E_2 + t A = \begin{bmatrix} s+t & t \\ 0 & s \end{bmatrix} \overset{\text{nur für}}{\Rightarrow} s = t = 0$ erfüllt.

$L \cup \{E_{11}\}$ l.u. denn $\underline{0} = s_1 E_2 + s_2 A + s_3 E_{11} = \begin{bmatrix} s_1+s_2+s_3 & s_2 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}$ nur für alle $= 0$

$L \cup \{E_{11}\} \cup \{E_{12}\}$ l.a. denn $0 = 1A - E_{11} - E_{12}$

$L \cup \{E_{11}\} \cup \{E_{21}\}$ l.u.

$L \cup \{E_{11}, E_{21}\} \cup \{E_{22}\}$ l.a. denn $\underline{0} = E_2 - E_{11} - E_{22}$

$\Rightarrow B = L \cup Y = \{E_2, A, E_{11}, E_{21}\}$ ist Basis.

$B' = \{E\ \ A\ \ E\ \ E\ \}$ Basis

BEISPIEL 2: 1 Eigenwert

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + \overbrace{(a_1 b_2 - b_1 a_2)}^{det} = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5$$

$$3v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$$

$$(3 - \lambda) v_1 = -2v_2$$

MERKE: $(a_1 - \lambda) v_1 = -b_1 v_2$

$$-2v_1 = -2v_2$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL 3: kein Eigenwert.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} \Rightarrow$ keine LSG. $\Rightarrow$ kein Eigenwert.

§ 6 Austauschsatz und Dimension

V sei K-Vektorraum.

Satz 1: (Austauschsatz von Steinitz):

Seien B und B' Basen von V.

Dann gibt es zu jedem $v \in B$ ein $v' \in B'$ mit

$B'' = (B \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ ist Basis von V.

Beweis: Sei $v \in B$ dann ist $B \setminus \{v\}$ kein Erzeugendensystem von V (nach Satz 1 § 4).

Nach Bem. 3 § 5 gibt es $v' \in B'$ mit $v' \notin \langle B \setminus \{v\} \rangle$

[Sonst wäre $B' \subseteq \langle B \setminus \{v\} \rangle$ und deshalb $V = \langle B \setminus \{v\} \rangle$]

Beh: $B'' := (B \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ ist Basis von V.

- B l.u.: Sei $0 = sv' + s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n$ mit $v_1, \ldots, v_n \in B \setminus \{v\}$ paarweise verschieden. und $s_1 \ldots s_n \in K$

1.) $s = 0$, da sonst $v' = -\frac{s_1}{s} v_1 + \ldots + \frac{-s_n}{s} v_n \in \langle B \setminus \{v\} \rangle$ $\lightning$

$0 = s_1 v_1 + \ldots + s_n v_1 \Rightarrow s_1 = \ldots = s_n = 0$, weil $B \setminus \{v\}$ l.u.

- $\langle B'' \rangle = V$; nach Bem. 3 § 5 genügt es zu zeigen $B \subseteq \langle B'' \rangle$, genügt zu zeigen $v \in \langle B'' \rangle$

Da $V = \langle B \rangle$ gibt es $v_1, \ldots, v_n \in B \setminus \{v\}$ paarweise verschieden und $s_1, \ldots, s_n \in K$, $s \in K$ mit $v' = s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n + sv$

da $v' \notin \langle R \setminus \{v\} \rangle$, muß $s \neq 0$ sein.

Also $v = \frac{1}{s} v' + \frac{-s_1}{s} v_1 + \ldots + \frac{-s_n}{s} v_n \in \langle B'' \rangle$

2.

A(2|1) A'(2|12)

B(1|2) B'(6|13)

C(2|3) C'(4|24)

$x_1' = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1$

$x_2' = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2$

$2 = 2a_1 + 1b_1 + c_1$

$6 = 1a_1 +$

3 Vektorräume

! Vektorraumaxiome !

3.1 Definition und Verknüpfungen

Körper $\underbrace{K}_{\text{Skalare}}$ → K-Vektorraum $\underbrace{V}_{\text{Vektoren:}}$

für 2 Vektoren

Diese Gesetze müssen gelten

$\oplus$	Asso +	$u+(v+w)=(u+v)+w$
	Kommut	$u+v=v+u$
	0	$v+0=v$
	$-$	$v+(-v)=0$
$k\cdot v$ (Skalar, Vektor)	Distri. S	$(k+h)\cdot v = k\cdot v + h\cdot v$
	Asso •	$(k\cdot h)\cdot v = k\cdot(h\cdot v)$
	1 neutral	$1\cdot v = v$
	Distri. V	$k\cdot(v+w) = k\cdot v + k\cdot v$

man kann sagen:

$V = K \times K \times K \ldots$

Vektoren sind also Arrays aus Körpern (z. B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...)

[man darf also bei Vektoren und Skalaren beliebig ausklammern, umklammern, und die 1 ist auch neutral.]

Nullvektor 0 eindeutig:

Kommutativität der Addition:

$$v=0' \;\; v + 0 = v \qquad\qquad v + 0' = v \;\; v=0$$

$$0' + 0 = 0' \;\; \overset{=}{\Longleftrightarrow} \;\; 0 + 0' = 0 \qquad \Rightarrow \quad 0 = 0'$$

Negativer Vektor $-v$ eindeutig.

einsetzen

$\cancel{0 + (-v) = 0}$ $\qquad\qquad$ $\cancel{v + v^* = 0}$

$$\left(v + (-v) = 0 \qquad\qquad v + v^* = 0 \right)$$

v'
$= 0 + v'$
$= (-v+v) + v'$
$= -v + (v + v')$
$= -v + 0$
$= -v$

Assoziativität der Addition

1.) $v + (-v) = 0$ $\quad$ negativ neutrales Element
2.) $\quad$ Ass. $\oplus$

Vektoren

Bemerkung 3: Sei U Teilraum von V und $X \subseteq V$.

Wenn $X \subseteq U$, dann $\langle X \rangle \leq U$.

"aus" ("Teilmenge von") Teilraum von

Insbesondere: $\langle X \rangle = V \Rightarrow X \subseteq U \Rightarrow U = V$

Lemma 2: Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

1.) man kann zu einem der Vektoren ein Vielfaches eines anderen addieren.

2.) man kann einen der Vektoren mit $s \neq 0$ multiplizieren.

3.) man kann den Nullvektor hinzufügen.

Unter all diesen Maßnahmen bleibt das Erzeugendensystem gleich!

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

oft lassen sich Vektoren zu 0 ändern, wenn man s-mal andere addiert.

Sobald das nicht mehr geht haben wir nur noch l.u. Vektoren und damit <u>eine</u> Basis.

852

3.2.5 : unendliche Folgen

V_∞ : Folge mit Elementen alle $\neq 0$ endlich,
der Rest bis zur Unendlichkeit (und noch viiiel weiter)
mit Nullen aufgefüllt.

wie immer wird das ganze erst ein Vektorraum, indem man festlegt:
Addition und skalare Multiplikation: komponentenweise [AusM:k]

⚠ Attenzione (mit doppelt Käse und Oliven):
Die Vektorräume dieser unendlichen Folgen sind $\neq K^n$, da sie
unendlich sind. K^n ← endlich, daher $V_\infty \notin K^n$!!!

3.2.6 : Vektorräume von Funktionen:

Ein Vektorraum ist ja einfach nur ein Array von mehreren skalaren Mengen.
Genau das ist aber eine Funktion: skalare Menge A ↦ skal. Menge B :

- Wir können nun verschiedene „Vektorräume" bilden, die jeweils alle Funktionen enthalten, die eine bestimmte Eigenschaft haben

a) alle Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) " | F ist stetig

c) " | F ist n-mal diff'bar (iss'n Beispiel..)

da das bei Vektorräumen immer so ist, gilt auch hier: [AuSM:K] (s.o.)

das kennen wir ja von Funktionen: $f(r) + g(r) = (f+g)(r)$ (naja, is nich grad anschaulich, aber egal...)

$a \cdot f(r) = (a \cdot f)(r)$

3.2.7. Lösungen eines LGS

alle Lösungspaare (a,b) des LGS bilden auch einen Vektorraum, denn

$\boxed{\text{paarweise geordnete Skalare sind ein Vektorraum !!!}}$

3.2.9: Körper als Vektorräume

$K \subseteq L$: K ist Teilkörper = Unterkörper von L. [L ist Erweiterung von K]

Beispiele: $K \subseteq K$ (logisch, "trivial" (Christoph, schlag mich. ;-))

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ [$\subseteq \mathbb{H}$]

$F_2 \subseteq F_4$

Der Witz der Erweiterung ist nun:

~~zu~~ den „größeren" Körper L (der K umfaßt) kann man oft als

$K \times K$ [$\times K \times K \ldots$] darstellen.

Beispiele: a) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, man muß nur die „Multiplikation zweier Elemente" neu definieren durch:

1. Komponente →

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

2. Komponente →

3.2 Beispiele von Vektorräumen:

Der Vektorraum der...

3.2.1: Geometrie:

wie bekannt. Addition: Vektoren aneinander hängen.

Multiplikation: (mit Skalar): Vektor verlängern.

→ nicht nötig!

3.2.2.: K^n (Beispiel: R^n)

z.B. $V = K^3 = K \times K \times K = \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_{1,2,3} \in K\}$ obda(chlos)

ein Vektor ist also: n ~~Vektoren~~ Elemente jeweils aus K.

also $V = \begin{pmatrix} \text{Skalar } 1 \\ \text{Skalar } 2 \\ \text{Skalar } 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}}_{\text{aus } K \text{ jeweils.}}$

Addition: komponentenweise. $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1+l_1 \\ k_2+l_2 \\ k_3+l_3 \end{pmatrix}$

skalare Multiplikation: komponentenweise. $s \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot k_1 \\ s \cdot k_2 \\ s \cdot k_3 \end{pmatrix}$

3.2.3.: m×n-Matrizen

Vektorraum aller Matrizen einer Größe. (alle Elemente aus K): $\boxed{K^{m \times n}}$

[Schreibweise: $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ $(a_{ij} \in K)$]

Addition und skalare Multiplikation: komponentenweise.

Beispiele: - $K = R$: wie bekannt. (z.B. $R^{2 \times 2}$)

- $K = F_2$: binäre Matrizen.

3.2.4.: alle unendlichen Folgen

V = Vektorraum aller endlosen Folgen von Elementen aus K. $(a_1, a_2, \ldots \ldots)$

Addition und skalare Multiplikation: komponentenweise. wie immer. :-)

Koeffizientenvergleich:

hat man eine LK aus <u>l.u.</u> Vektoren, so sind die Skalare eindeutig.

<u>BEWEIS:</u> $k_1 v_1 + k_2 v_2 = l_1 v_1 + l_2 v_2$

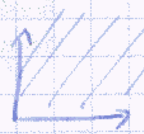
$(k_1 - l_1) v_1 + (k_2 - l_2) v_2 = 0$ l.u. $\Leftrightarrow$ Skalare $= 0 \Leftrightarrow k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$

Erzeugnis $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

= <u>alle</u> aus dieser Vektorenmenge $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bildbaren LK'en.

also $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_2 v_n$ für k_1 bis k_n <u>beliebig</u>.

$\langle \quad \rangle$ ist nun ein K-Vektorraum. $(\leq V)$

Beispiel: $\langle \uparrow, \longrightarrow \rangle$ = 

man muß nun zeigen: die VR-Axiome sind erfüllt.

$\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = V \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von V

Eine Menge von Vektoren heißt Erzeugendensystem von V, wenn man mit einer Linearkombination aus ihnen <u>jeden</u> bel. Vektor aus V darstellen kann.

<u>Basis</u> = kleinstmögliches Erzeugendensystem (d.h. alle Vektoren l.u.)

(Festlegung: Basis vom Nullvektorraum $V = \{0\}$ ist $\{\}$.)

<u>Eindeutigkeit der Basis:</u> Basis geg. $\Rightarrow$ Vektor v läßt sich nur mit eindeutigen Faktoren vor den Basisvektoren darstellen.

Grund: wegen $v - v = 0$

$k_1 v_1 \dots$ $h_1 v_1 \dots$

<u>geg</u>: Basisvektoren sind alle l.u. $\Rightarrow 0$ läßt sich nur mit allen Faktoren $= 0$ darstellen

$\Rightarrow k_i - h_i = 0 \Rightarrow k_i = h_i$.

3.2.8. Teilmengen einer Menge

X : Menge aus Skalaren (z.B. $\{1,2,3\}$

V : Vektorraum. Die Vektoren sind nun alle bildbaren Kombinationen aus den Elementen von X.
(= „die Teilmengen von X")

$\Rightarrow V = \{\emptyset, (1), (2)(3)(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)(2,3)(3,2), (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)\}$

(falsch! wir suchen Teil-MENGEN, dürfen also nicht auf die Reihenfolge achten!!)

$V = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\Uparrow$ ← Anzahl der Elemente

$2^n = 8$ Möglichkeiten.

[Grund: neues Element dazu → jedes Element kann man nochmal mit dem neuen schreiben.]

"Mächtigkeit der Potenzmenge" (Satz 1.4)

Addition: alle Zahlen, die in nur einer Menge auftreten.

$$\{2,3\} + \{1,2\} = \{1,3\}$$

("symmetrische Differenz" $Y \triangle Z := (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$)

Multiplikation im Beispiel für $K = \mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$

wir definieren einfach: $1 \cdot Y = Y$
$0 \cdot Y = \emptyset$

$\Rightarrow$ erst durch $K = \mathbb{F}_2$ ham wir nen Vektorraum, denn:

$\emptyset \triangleq \{\}$

$Y + Y \triangleq \{\}$ (siehe Def. der Addition)

18.1.00

EIGENVEKTOREN

Wir haben z.B. folgende Matrix: (also Abbildungsmatrix):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diese können wir ja mit einem Vektor multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\underline{\text{aber}} \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

Rein zufällig haben wir jetzt einen Vektor erwischt, der durch diese Abbildung (also Multiplikation mit der Abb. Matrix) nur um einen festen Faktor verändert wurde.

Wir finden (durch probieren) noch 2 weitere solche "Eigenvektoren", die durch die Mult. mit der Matrix nur um einen Faktor („Eigenwert") geändert werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1 \quad -1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1 \quad +1 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert → $\lambda = 1$ $\qquad\qquad$ $\lambda = -1$

<u>Jetzt kommt der Clou:</u>

Bei einer linearen Abbildung (also der Mult. mit einer Matrix) stehen ja in der abzubildenden Matrix die Vektoren, die wir abbilden wollen. In der abgebildeten Matrix stehen dann die Bilder dieser Vektoren.

In der Abbildungsmatrix stehen in den Spalten immer die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren: wenn wir nämlich die Basisvektoren abbilden, bekommen wir ja die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

l.u. = linear unabhängig
l.a. = " abhängig
LK = Linearkombination

3.3: Elementare Theorie der Vektorräume

3.3.1: Basis

Vektoren aus V: $v_1, v_2, v_3, \ldots$

Linearkombination: = Summe aus beliebig vielen mit bel. Skalaren multiplizierten Vektoren

wir erinnern uns: doppelt Käse + Oliven! :-) [z.B. $s \cdot v_1 + t \cdot v_2$]

⚠ Attenzione bei unendlich großen Mengen von Vektoren (also z.B. alle Vektoren im $\mathbb{R}3$):

Eine Linearkombination muß hier aus endlich vielen Vektoren (dieser unendlichen Menge) aufgebaut sein!!!

linear unabhängig: (mehrere Vektoren):

anschaulich: kein Vektor läßt sich als Linearkombination von andern darstellen.

Def: den Nullvektor kann man nur als Linearkombination der Vektoren darstellen, wenn alle Skalarfaktoren gleich 0 sind.

linear abhängig:

anschaulich: mind. 1 Vektor läßt sich als Lin. komb. von anderen darstellen.

Def: Nullvektor kann mit mind. 1 Skalar $\neq 0$ als Lin. Komb. dargestellt werden.

Sonderfall unendliche Mengen:

es ex. lin. abh. Teilmenge $\Rightarrow$ lin. abh.

keine Teilmenge lin. abh. $\Rightarrow$ lin. unabh.

Ein einzelner Vektor l.a.: Nur der Nullvektor (denn $k \cdot 0 = 0$ für k bel. !!)

Mehrere Vektoren l.a.:

$k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0$ nach Vorr.

Beweis von "l.a. anschaulich": 1) Vektor $k_i v_i$ mit $k_i \neq 0$ auf 0-Seite bringen

2) durch k_i teilen

$\Rightarrow$ "$v_i = \ldots$"

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 1v_2 \\ 4v_1 - 1v_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = \lambda v_1$$
$$4v_1 - v_2 = \lambda v_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & \lambda v_1 \\ 4 & -1 & \lambda v_2 \end{array}\right) \quad \underbrace{v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{l.a., weil:}}$$

$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist LK von davor.

$$\left| \begin{array}{l} (2-\lambda) v_1 + v_2 = 0 \\ 4v_1 + (-1-\lambda) v_2 = 0 \end{array} \right.$$

besitzt eine Lösung $\Leftrightarrow$ hier sind die Zeilen l.a.

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \cdot 4 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda = -2 \Rightarrow \begin{array}{l} 4v_1 + 1v_2 = 0 \\ 4v_1 + 1v_2 = 0 \end{array} \qquad v_2 = -4v_1 \qquad \mathbb{L} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \mathbb{L} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2$$
$$= a_1 b_2 - \lambda(a_1 + b_2) - b_1 a_2 + \lambda^2$$
$$= \lambda^2 - \lambda(a_1 + b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad \checkmark \quad = 0$$

charakteristisches Polynom. λ Lösungen = Eigenwerte

858

Anzahl der Vektoren eines endlichen Vektorraums

logisch: ein Vektorraum ist K^n, also $K \times K [\times K \times \dots]$

Wenn K q Elemente hat, haben wir also genau q^n Kombinationsmöglichkeiten, also q^n Vektoren

[da wegen der Eindeutigkeitseigenschaft jeder Vektor eindeutig darstellbar ist.]

es geht hier übrigens um die Kombinationsmöglichkeiten der Faktoren vor den Vektoren.

$$\boxed{|V| = q^n}$$

← Anzahl der Vektoren der Basis.

Anzahl der Vektoren in V

Anzahl der Elemente in K

Basisergänzungssatz

Basis = maximale l.u. Menge. (+ 1 Vektor aus V dazu ⇒ $B \cup \{v\}$ l.a.)

Vektoren

Basis ⇒ l.u. (klar) ⇒ maximal ⇒

Beweisidee: mit den Vektoren der Basis läßt sich ja jeder Vektor in V darstellen. Also auch v.
Wenn wir nun v zu unserer Basis hinzunehmen, können wir den Nullvektor als Differenz von v und der Basis-Linearkombination darstellen.
Das ist nicht mehr die triviale Darstellung des Nullvektors, also sind die Vektoren l.a.

Vektoren l.u. maximal ⇒ (nach Def.) Basis: • l.u. • Erzeugendensystem

Beweisidee: zu zeigen: B max. l.u. Menge von Vektoren ⇒ B Erzeugendensystem.

Ließe sich nämlich der beliebige Vektor v nicht als Lin. Komb. von B darstellen, wäre $B \cup \{v\}$ auch noch eine l.u. Basis. Unser B war aber schon maximal.

EIGENWERTE (formal)

Quelle: Lipschutz

Abbildungsmatrix

$$f(X) = AX$$

Spaltenvektor

$$f\left(\begin{pmatrix} X \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \end{pmatrix}$$

bildet $E \to E$ ab, beides also in Standardbasis.

$\Rightarrow$ neue Basis $\begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} u_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} X' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \end{pmatrix}$$

in der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$$