

# 1. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 88/89)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

## Aufgabe 1.

Man berechne die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper  $\mathbf{Z}_2$ . 4 Punkte

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & & & + & x_3 & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

## Aufgabe 2.

Es sei  $\mathcal{V} = \text{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  der Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbf{R}$  nach  $\mathbf{R}$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathcal{V}$  sind Teilräume? (Begründung!)

1.  $M_1 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(1) = f(-1)\}$  2 Punkte

2.  $M_2 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(1) \cdot f(0) = 0\}$  3 Punkte

3.  $M_3 = \{f \in \mathcal{V} \mid f(x) = f(x + \pi) \text{ für alle } x \in \mathbf{R}\}$  2 Punkte

## Aufgabe 3.

Es sei  $\mathcal{V} = \mathbf{R}^4$  und  $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

1. Man berechne eine Basis von  $M$  und ergänze sie zu einer Basis von  $\mathcal{V}$ . 4 Punkte

2. Man gebe eine Basis von  $\mathcal{V}/M$  an. 2 Punkte

## Aufgabe 4.

Man bestimme die Dimension des Durchschnitts der folgenden Teilräume  $T_1$  und  $T_2$  von  $\mathbf{Z}_3^4$ . 4 Punkte

$$T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

## Aufgabe 5.

Man bestimme die Dimension der folgenden Vektorräume über den angegebenen Körpern.

1.  $K = \mathbf{Q}$ ,  $\mathcal{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbf{Q}^{2 \times 2}$  2 Punkte

2.  $K = \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{V} = \text{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  1 Punkt

3.  $K$  ein Körper mit 9 Elementen,  $\mathcal{V} = \text{Abb}(K, K)$  3 Punkte

**Aufgabe 6.**

Sei  $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  die lineare Abbildung mit  $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z \\ x - y - z \end{pmatrix}$ . Man bestimme

alle Elemente von  $\mathbf{R}^3$ , die durch  $\varphi$  auf  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  abgebildet werden. 3 Punkte

**Aufgabe 7.**

Es sei  $\mathcal{V} = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle \leq \text{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  mit  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$  und  $f_3(x) = x^3$  für alle  $x \in \mathbf{R}$ . Es ist  $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  (dies ist nicht zu zeigen!).

Für  $f \in \mathcal{V}$  sei  $\varphi(f) \in \mathcal{V}$  mit  $\varphi(f)(x) = f(x+1) - f(x-1)$  für alle  $x \in \mathbf{R}$ .

1. Man zeige, daß die so definierte Abbildung  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  linear ist. 4 Punkte

Auch für den Fall, daß man Teil ?? dieser Aufgabe nicht gelöst hat, behandle man die folgenden Punkte:

2. Man berechne die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ . 3 Punkte

3. Man bestimme eine Basis von  $\text{Kern}\varphi$  2 Punkte

4. Man bestimme die Dimension von  $\text{Bild}\varphi$ . 1 Punkt

**Aufgabe 8.**

Es sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathbf{Q}$ -Vektorraum der Dimension 3,  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  und

$\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$  mit  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Weiter sei  $\mathcal{B}' = (B'_1, B'_2, B'_3)$  mit  $B'_1 = -B_1 + B_2$ ,

$B'_2 = B_1 + B_2$  und  $B'_3 = B_2 + B_3$ .

Man weise nach, daß  $\mathcal{B}'$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  ist und bestimme  ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$ . 6 Punkte

**Aufgabe 9.**

Wieviele invertierbare  $3 \times 3$ -Matrizen gibt es über dem Körper  $\mathbf{Z}_2$ ? 4 Punkte

**Aufgabe 10.**

Es sei  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum,  $\mathcal{T}$  ein Teilraum von  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{T} \neq 0$  und  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{V}$  so daß  $(X_1 + \mathcal{T}, X_2 + \mathcal{T}, \dots, X_n + \mathcal{T})$  eine Basis von  $\mathcal{V}/\mathcal{T}$  ist.

1. Ist  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ ? 2 Punkte

2. Ist  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  linear unabhängig in  $\mathcal{V}$ ? 2 Punkte

3. Ist  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{V}$ ? 1 Punkt

## 2. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 88/89)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

### Aufgabe 1.

6 Punkte

Es sei  $\mathcal{V}$  ein 4-dimensionaler  $\mathbf{Q}$ -Vektorraum,  $\mathcal{T}_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathcal{V}$  und

$\mathcal{T}_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathcal{V}$ . Man bestimme Basen von  $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$  und  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ .

### Aufgabe 2.

3 Punkte

Es seien  $\pi$  und  $\sigma$  die durch  $\frac{i \parallel 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7}{i\pi \parallel 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 1 \mid 7 \mid 6}$ ,  $\frac{i \parallel 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7}{i\sigma \parallel 7 \mid 5 \mid 3 \mid 4 \mid 2 \mid 6 \mid 1}$  gegebenen Permutationen auf 7 Ziffern. Man schreibe  $\pi$  und  $\sigma$  als Produkt ziffernfremder Zyklen und berechne  $\pi^{11}$  und  $\sigma^{-1} \cdot \pi \cdot \sigma$  sowie das Vorzeichen von  $\pi$  und  $\sigma$ .

### Aufgabe 3.

4 Punkte

Es sei  $\pi$  eine Permutation auf  $n$  Ziffern,  $K$  ein Körper und  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n \times n}$  mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq i\pi \\ 1 & \text{falls } j = i\pi \end{cases}.$$

Man zeige mit Hilfe der Summen-Produktformel für Determinanten, daß  $\det A = \varepsilon(\pi)$  gilt, wobei  $\varepsilon(\pi)$  das Vorzeichen der Permutation  $\pi$  ist.

### Aufgabe 4.

3 Punkte

Es sei  $K$  ein Körper,  $n$  eine natürliche Zahl und  $A \in K^{n \times n}$  mit  $A \cdot A^{tr} = I_n$  (Einheitsmatrix). Man zeige:  $\det A \in \{1, -1\}$ .

### Aufgabe 5.

4 Punkte

Man berechne die Determinante der folgenden rationalen Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 28 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 6.

3 Punkte

Es sei  $\mathcal{V}$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$  und  $X \in \mathcal{V}$ ,  $X \neq 0$ . Man zeige, daß es ein  $\varphi \in \mathcal{V}^*$  gibt mit  $\mathcal{V} = \langle X \rangle \oplus \text{Kern}\varphi$ .

**Aufgabe 7.**

4 Punkte

Es sei  $\mathcal{V} = \mathbf{R}[x]_3$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Es ist  $\mathcal{B} := (1, x, x^2, x^3)$  eine Basis von  $\mathcal{V}$ . Man bestimme die Koordinaten einer Basis des Annihilators von  $\langle 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x^3 \rangle$  im Dualraum  $\mathcal{V}^*$  bezüglich der dualen Basis  $\mathcal{B}^*$ .

**Aufgabe 8.**

Es sei  $\mathcal{V}$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$ ,  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $\mathcal{V}$ ,  $X \in \mathcal{V}$  ein Eigenvektor von  $\varphi$  zum Eigenwert  $c \in K$  (insbesondere gilt  $X \neq 0!$ ).

1. Es sei  $\psi := \varphi - a \cdot id$  mit  $a \in K$ . 2 Punkte  
Man zeige, daß  $X$  auch ein Eigenvektor von  $\psi$  ist.
2. Man zeige: Ist  $\varphi$  invertierbar, so ist  $c \neq 0$ . 1 Punkte
3. Man zeige: Ist  $\varphi$  invertierbar, so ist  $X$  auch ein Eigenvektor von  $\varphi^{-1}$ . 2 Punkte  
Man gebe den zugehörigen Eigenwert an.

**Aufgabe 9.**

Es sei  $\mathbf{C}$  der Körper der komplexen Zahlen und  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3 \times 3}$ .

1. Man bestimme die Eigenwerte von  $A$ . 4 Punkte
2. Man benutze 1. um  $A^{1989}$  zu bestimmen. 3 Punkte

**Aufgabe 10.**

7 Punkte

Es sei  $\mathcal{B}$  eine Basis eines 4-dimensionalen Vektorraums  $\mathcal{V}$  über  $\mathbf{Q}$ ,

$\varphi$  ein Endomorphismus von  $\mathcal{V}$  mit  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Man bestimme die Basiswechselmatrix zu einer Fächerbasis  $\mathcal{B}'$  von  $\mathcal{V}$  bzgl.  $\varphi$ .

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\mathcal{V} := \text{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  und  $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$  definiert durch

$$\Phi(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \text{ für } f, g \in \mathcal{V} .$$

1. Man zeige:  $\Phi$  ist eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathcal{V}$ . 2 Punkte
2. Man bestimme das Radikal von  $\Phi$ . 2 Punkte
3. Es sei  $\mathcal{W}$  der Teilraum von  $\mathcal{V}$  der Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich 2. Man bestimme den Orthogonalraum von  $\mathcal{W}$  in  $\mathcal{V}$ . 2 Punkte
4. Sei  $\mathcal{W}$  wie oben und  $\Psi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow K$  die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ .  
Man zeige:  $\Psi$  ist nicht ausgeartet. 2 Punkte

# 1. Klausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Semesterklausuren müssen zusammen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

## Aufgabe 1.

Gegeben seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4 \times 5}$  und  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4$ .

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes  $L$  des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$  ( $x \in \mathbb{Z}_2^5$ ), und eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems  $Ax = b$ . Welche Dimension hat  $L$ ? Wieviele Lösungen hat  $Ax = b$ ? Begründen Sie Ihre Antworten! 6 Pkte.

## Aufgabe 2.

Sei  $n \geq 2$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{Q}^{n \times n}$  definiert durch  $a_{ij} = i + j - 1$  und  $L$  die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$  ( $x \in \mathcal{Q}^n$ ).

(a) Bestimmen Sie  $\dim L$ .

Sei  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}^n$ . Ist  $Ax = b$  lösbar für

(b)  $b_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ ?

(c)  $b_i = i(i + 1)$  für  $i = 1, \dots, n$ ?

Begründen Sie Ihre Antworten!

6 Pkte.

## Aufgabe 3.

Welche der folgenden Teilmengen  $M \subseteq \mathcal{Q}^3$  sind Teilräume?

(a)  $M = \{(a, b, c) \in \mathcal{Q}^3 \mid a \cdot b + c = 0\}$ .

(b)  $M = \{(a, b, c) \in \mathcal{Q}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$ .

(c)  $M = \{(a, b, c) \in \mathcal{Q}^3 \mid a - c = 1\}$ .

Begründen Sie Ihre Antworten!

5 Pkte.

**Aufgabe 4.**

Sei  $V = \left\{ A \in \mathcal{Q}^{2 \times 2} \mid A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \right\}$ .

- (a) Zeigen Sie, daß  $V$  ein Teilraum von  $\mathcal{Q}^{2 \times 2}$  ist.  
 (b) Bestimmen Sie eine Basis von  $V$ , und ergänzen Sie diese zu einer Basis von  $\mathcal{Q}^{2 \times 2}$  (begründen Sie, daß Sie auch tatsächlich eine Basis von  $\mathcal{Q}^{2 \times 2}$  gefunden haben). 8 Pkte.

**Aufgabe 5.**

Sei  $K$  ein Körper und  $V = \text{Abb}(K, K)$  der Vektorraum aller Abbildungen von  $K$  nach  $K$ . Seien  $0 \neq a \in K$  und  $b \in K$  fest vorgegeben, und  $\varphi : V \rightarrow V$  definiert durch

$$\varphi(f)(x) := f(ax + b), \quad f \in V, x \in K.$$

- (a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist.  
 Sei jetzt  $K = \mathbb{R}$  und  $P_2(\mathbb{R}) \subseteq V$  der Teilraum der Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 2$ , mit Basis  $B = (p_0, p_1, p_2)$  (wobei  $p_i(x) = x^i$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ).  
 (b) Zeigen Sie: Für  $f \in P_2(\mathbb{R})$  ist auch  $\varphi(f) \in P_2(\mathbb{R})$ .  
 (c) Sei  $\varphi_1$  die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $P_2(\mathbb{R})$ . Bestimmen Sie  ${}_B[\varphi_1]_B$  für  $a = 3$ ,  $b = -1$ , und zeigen Sie, daß  $\varphi_1$  bijektiv ist. 7 Pkte.

**Aufgabe 6.**

Sei  $V = \mathbb{Z}_3^3$ ,  $W = \mathbb{Z}_3^2$ , und  $\varphi : V \rightarrow W$  definiert durch

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{Z}_3.$$

- (a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist.  
 Seien  $B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  und  $C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  Basen von  $V$  bzw.  $W$  (das müssen Sie nicht beweisen).  
 (b) Bestimmen Sie  ${}_C[\varphi]_B$ .  
 (c) Berechnen Sie Basen für Kern  $\varphi$  und Bild  $\varphi$ , sowie Rang  $\varphi$  und  $c_C(\varphi(v))$  für  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . 8 Pkte.

## 2. Klausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Semesterklausuren müssen zusammen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

### Zur weiteren Organisation

- Diejenigen, die ihren Schein bis Freitag zur Vorlage beim Prüfungsamt benötigen, versehen das Deckblatt mit einem dicken Kreuz in der rechten oberen Ecke. Sind alle Scheinbedingungen erfüllt, so können die Scheine am Freitag 11.00 Uhr im Seminarraum 221, 2.Etage Sammelbau, abgeholt werden.
- Klausurrückgabe und Meckertermin ist Fr, 15.2.1991, 12.15–13.00 Uhr im Fo1.
- Die Nachholklausur findet statt Mo, 15.4. 1991, 14.00–17.00 Uhr im AM.
- Die Scheine werden ausgegeben Di, 16.4.1991, 11.00 Uhr im Fo2.

### Aufgabe 1.

Seien  $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\sigma' : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  Permutationen in  $S_6$ . Schreiben Sie  $\sigma$ ,  $\sigma'$  als Produkte von Zykeln mit disjunkten Ziffernmengen, und berechnen Sie  $\sigma \circ \sigma'$ ,  $\sigma' \circ \sigma$ ,  $\sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma$ ,  $\text{sign}(\sigma)$  und  $\text{sign}(\sigma')$ . 6 Pkte.

### Aufgabe 2.

Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom, alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von  $A$ .
- Ist  $A$  diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine invertierbare Matrix  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so daß  $P^{-1}AP$  Diagonalgestalt hat.
- Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $A$ . 9 Pkte.

### Aufgabe 3.

Seien  $f = X^8 + X^7 + X^5 + X^3 + 1$  und  $g = X^2 + X - 1$  Polynome in  $\mathbb{R}[X]$ .

- Dividieren Sie  $f$  mit Rest durch  $g$ .
- Berechnen Sie  $f(A)$  für  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . 7 Pkte.

### Aufgabe 4.

Berechnen Sie für  $n \geq 2$  die Determinante  $d_n$  von  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & , \text{ falls } i = j \\ -1 & , \text{ falls } j + 1 = i \text{ oder } i + 1 = j < n \\ -2 & , \text{ falls } i + 1 = j = n \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

8 Pkte.

**Aufgabe 5.**

Gegeben seien die folgenden Teilräume von  $V = \mathbb{Z}_2^4$ :

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie Basen für  $U \cap W$  und  $U + W$ .

8 Pkte.

**Aufgabe 6.**

Sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{n \times n}$  und  $\chi_A$  das charakteristische Polynom von  $A$ . Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $\chi_A = X^n$ .
- (ii)  $A^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $A$  ist ähnlich zu einer Matrix  $B = (b_{ij}) \in K^{n \times n}$  mit  $b_{ij} = 0$  für  $i \geq j$ .

8 Pkte.

**Aufgabe 7.**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{5 \times 5}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von  $A$  sowie eine invertierbare Matrix  $P \in \mathbb{Z}_2^{5 \times 5}$ , so daß  $P^{-1}AP$  in Jordan-Normalform ist.

9 Pkte.

**Aufgabe 8.**

Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$  gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j + 1 \text{ oder } i = 1, j = n \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ .
- (b) Berechnen Sie für den Fall  $n = 4$  alle Eigenwerte von  $A$ , die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume, und geben Sie die Jordan-Normalform von  $A$  an. (*Beachten Sie, daß in  $\mathbb{Z}_2$  die Gleichung  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  gilt.*)

9 Pkte.



# Nachholklausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

## Aufgabe 1.

Sei  $V = P_3(\mathbb{R})$  der Vektorraum der Polynomfunktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $\leq 3$ , und  $\varphi : V \rightarrow V$  definiert durch

$$\varphi(f)(x) := x \cdot f'(x) - f(x+1), \quad f \in V, x \in \mathbb{R},$$

wobei  $f'(x)$  wie üblich die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist, und bestimmen Sie  ${}_B[\varphi]_B$ , wobei  $B = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  mit  $p_i(x) := x^i$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist.

(b) Berechnen Sie  $\text{Rang}(\varphi)$ ; bestimmen Sie eine Basis für  $\text{Kern}(\varphi)$  und ergänzen Sie diese zu einer Basis  $B'$  von  $V$ .

(c) Berechnen Sie  ${}_{B'}[\varphi]_{B'}$ .

15 Pkte.

## Aufgabe 2.

Für welche  $k \in \mathbb{R}$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & & +(k-3)x_3 = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 = 2 \\ 2x_1 & +(k+2)x_2 & +7x_3 = 4 \end{array}$$

(a) keine Lösung.

(b) genau eine Lösung.

(c) mehr als eine Lösung.

10 Pkte.

## Aufgabe 3.

Seien  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben durch

$$a_{ij} = 1 \text{ für alle } i, j; \quad b_{ij} = \begin{cases} i-1 & , \text{ falls } i=j, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie  $\det(A+B)$ .

10 Pkte.

## Aufgabe 4.

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Zeigen Sie:

Genau dann ist  $\text{Rang}(\varphi) = \text{Rang}(\varphi^2)$ , wenn  $\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Kern}(\varphi) = \{0\}$  ist. 10 Pkte.

**Aufgabe 5.**

Seien  $f = X^8 + X^5 + X^3 + X$  und  $g = X^2 - X + 1$  Polynome in  $\mathbb{R}[X]$ .

(a) Dividieren Sie  $f$  mit Rest durch  $g$ .

(b) Berechnen Sie  $f(A)$  für  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 10 Pkte.

**Aufgabe 6.**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ , alle Eigenwerte und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von  $A$ .

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $A$ . 20 Pkte.

**Aufgabe 7.**

Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{Q}^{2n \times 2n}$  gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } i + j \text{ gerade,} \\ 0 & , \text{ falls } i + j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(a) Sei  $f = X^2 + nX \in \mathcal{Q}[X]$ . Zeigen Sie:  $f(A) = 0$ .

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.

Ist  $A$  diagonalisierbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von  $A$ .

15 Pkte.

**Aufgabe 8.**

Sei  $V = \mathbb{Z}_3^4$  mit Standardbasis  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  und  $U$  der von  $e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_3 - e_4$  erzeugte Teilraum. Bestimmen Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{Z}_3^{m \times 4}$  (für geeignetes  $m$ ), so daß  $U$  die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems  $Ax = \underline{0}$  ist.

10 Pkte.

# 1. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Welche der folgenden Relationen auf  $\mathbb{Z}$  sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (Begründung!)

1.  $x \sim y \Leftrightarrow$  es gibt ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $x - y = 7n$ . 2 Punkte

2.  $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$ . 3 Punkte

3.  $x \sim y \Leftrightarrow xy \geq 0$ . 3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Gibt es Nullteiler in dem Ring  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ? (Begründung!) 3 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  der Körper mit drei Elementen. Man bestimme die Dimensionen von  $T_1$ ,  $T_2$  und des Durchschnitts der Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ von } \mathbb{Z}_3^4. \quad 5 \text{ Punkte}$$

---

## Aufgabe 4.

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für

1. den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $V = \text{Abb}(M, \mathbb{Q})$  der Abbildungen von einer Menge  $M = \{a, b, c\}$  in  $\mathbb{Q}$ , 2 Punkte

2. den Teilraum  $T = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a + b = 0 \text{ und } c + d = 0 \right\} \leq \mathbb{Q}^4$ . 2 Punkte

---

## Aufgabe 5.

$$\text{Es sei } V = \mathbb{R}^4 \text{ und } T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Man berechne eine Basis von  $T$  und ergänze sie zu einer Basis von  $V$ . 4 Punkte

2. Man gebe eine Basis von  $V/T$  an. 1 Punkt

---

## Aufgabe 6.

Es sei  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die lineare Abbildung mit  $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ x + y \end{pmatrix}$ . Man bestimme

alle Elemente von  $\mathbb{R}^3$ , die durch  $\varphi$  auf  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  abgebildet werden. 4 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $K$  ein beliebiger Körper und  $V = K^{4711}$ . Es seien  $X_1, \dots, X_{4711}$  Vektoren aus  $V$ , und es

sei  $\varphi$  die durch  $\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{4711} \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4711} a_i X_i$  definierte Abbildung von  $V$  in  $V$ . Man zeige: Ist

$\varphi$  surjektiv, so ist  $\varphi$  auch injektiv. Hinweis: Wenn Sie einen Satz der Vorlesung verwenden, müssen Sie zeigen, daß seine Voraussetzungen erfüllt sind! 4 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

Es sei der 3-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \leq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $f_1(x) = x + 1$ ,  $f_2(x) = x^2 + x$  und  $f_3(x) = x^4 - 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegeben. Weiter sei  $W = \mathbb{R}^3$  und

$\varphi : V \rightarrow W$  die durch  $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$  definierte Abbildung von  $V$  in  $W$ . Man beweise oder widerlege:

1.  $\varphi$  ist linear. 2 Punkte
2.  $\varphi$  ist injektiv. 4 Punkte
3.  $\varphi$  ist surjektiv. 2 Punkte

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen daß  $(f_1, f_2, f_3)$  linear unabhängig ist.

---

**Aufgabe 9.**

Gegeben seien die Basisfolgen  $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  und  $\mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  von  $\mathbb{R}^2$ , die

Basisfolge  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  von  $\mathbb{R}^3$  sowie die lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

die durch die Koordinatenspalte  $\mathcal{D}(\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \end{pmatrix}$  von  $\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)$  bezüglich

der Basis  $\mathcal{D}$  für alle  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  definiert ist. Berechnen Sie die Matrix  $\mathcal{D}'\varphi\mathcal{B}$ . 5 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $\mathbb{F}_2$  der Körper mit zwei Elementen. Wieviele verschiedene Teilräume der Dimensionen 0, 1, 2, 3 bzw. 4 hat der Vektorraum  $V = \mathbb{F}_2^4$ ? 5 Punkte

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $V = \mathbb{Q}^3$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $V$  sind Teilräume? (Begründung!)

1.  $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid (a+b)c = 0 \right\}$ . 2 Punkte

2.  $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a^2 = b^2 = c^2 \text{ und } 3a = b + c \right\}$ . 4 Punkte  
(Lassen Sie sich nicht verwirren!!!)

---

## 2. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

### Aufgabe 1.

Es sei  $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  der Körper mit drei Elementen. Man bestimme alle Lösungen des folgenden inhomogenen Gleichungssystems über dem Körper  $\mathbb{F}_3$ . 5 Punkte

$$\begin{aligned}\bar{1}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{0}x_3 + \bar{1}x_4 + \bar{2}x_5 &= \bar{2} \\ \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{1}x_3 + \bar{0}x_4 + \bar{1}x_5 &= \bar{1} \\ \bar{1}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{0}x_3 + \bar{1}x_4 + \bar{1}x_5 &= \bar{2} \\ \bar{1}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{1}x_4 + \bar{0}x_5 &= \bar{0}\end{aligned}$$

### Aufgabe 2.

Es seien  $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$  und  $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$  Teilräume des  $\mathbb{Q}^3$ . Man bestimme Basen für  $\langle U_1, U_2 \rangle$  und  $U_1 \cap U_2$ . 5 Punkte

### Aufgabe 3.

1. Man berechne die Determinante der Matrix  $M = \begin{pmatrix} x & -1 & 3 \\ 2x-1 & -3 & x-7 \\ 0 & 1 & x+4 \end{pmatrix}$ . 2 Punkte
2. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist  $M$  invertierbar? 1 Punkt
3. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  hat  $M$  die Determinante 1? 1 Punkt
4. Für diesen Fall (Determinante 1) berechne man die inverse Matrix. 3 Punkte

### Aufgabe 4.

Es sei  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix über dem Ring der ganzen Zahlen mit Determinante  $-1$ . Man beweise oder widerlege:  $A$  ist invertierbar, und  $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . 3 Punkte

### Aufgabe 5.

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  und  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

Welche der folgenden Abbildungen von  $V \times V$  nach  $\mathbb{R}$  sind Bilinearformen? (Falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

1.  $\Phi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + y_3$ , 1 Punkt
2.  $\Phi(X, Y) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2)$ , 1 Punkt
3.  $\Phi(X, Y) = x_1x_2 - y_2y_3$ . 1 Punkt

### Aufgabe 6.

Es seien  $K$  ein Körper,  $A \in K^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und  $B \in K^{n \times n}$ . Es sei weiter  $V = K^n$  und  $X$  ein Eigenvektor bezüglich  $AB$ . Man bestimme einen Eigenvektor bezüglich  $BA$ . 4 Punkte

---

**Aufgabe 7.**Es sei  $\pi$  die durch

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i\pi$	2	1	4	5	3	7	8	9	10	6

 gegebene Permutation auf 10 Ziffern.

1. Man schreibe  $\pi$  als Produkt ziffernfremder Zykeln. 1 Punkt
  2. Man zeige, daß  $\pi$  ungerade ist. 1 Punkt
  3. Man bestimme die Ordnung von  $\pi$ . 1 Punkt
  4. Man zeige, daß man  $\pi$  nicht als Produkt von Fünferzykeln schreiben kann. 2 Punkte
- 

**Aufgabe 8.**Es sei die invertierbare Matrix  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  gegeben.Bestimmen Sie ein Polynom  $f$  vom Grade 2, für das  $A^{-1} = f(A)$  gilt.5 Punkte

HINWEIS: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

---

**Aufgabe 9.**Es sei  $V = \mathbb{Q}^4$  und  $B$  die Standardbasis von  $V$ . Eine lineare Abbildung  $\varphi$  von  $V$  nach  $V$ sei durch  ${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$  gegeben. Man bestimme eine Fächerbasis für  $V$ bezüglich  $\varphi$ .8 PunkteHINWEIS: Man kann das charakteristische Polynom von  $\varphi$  an der Matrix  ${}_B\varphi_B$  ablesen.

---

**Aufgabe 10.**Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $V^{**}$  der Bidualraum von  $V$  und

$$T : V \rightarrow V^{**}, X \mapsto X^{**} \text{ mit } X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$$

der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von  $V$  auf  $V^{**}$ . Man zeige, daß für jeden Teilraum  $U \leq V$ 

$$X^{**} \in \text{An}(\text{An}(U)) \iff X \in \bigcap_{\varphi \in \text{An}(U)} \text{Kern}(\varphi)$$

gilt.

5 Punkte

---

**Aufgabe 11.**Es sei  $\alpha = \sqrt{2}/2$ . Man zeige, daß $2^{1-n}$  die Determinante der  $n \times n$ -Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$  ist.6 Punkte

# Nachholklausur zur Linearen Algebra I Teil 1 (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Welche der folgenden Relationen auf  $\mathbb{Z}$  sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

1.  $x \sim y \Leftrightarrow x + y$  gerade. 3 Punkte

2.  $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y - 1$ . 3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  der Körper mit drei Elementen. Man bestimme die Dimensionen von  $T_1$ ,  $T_2$  und des Durchschnitts der Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ von } \mathbb{F}_3^4. \quad 4 \text{ Punkte}$$

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 2$ . Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis für den Teilraum

$T = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$ . 3 Punkte

---

## Aufgabe 4.

$$\text{Es sei } V = \mathbb{R}^4 \text{ und } T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Man berechne eine Basis von  $T$  und ergänze sie zu einer Basis von  $V$ . 3 Punkte

b) Man gebe eine Basis von  $V/T$  an. 1 Punkt

---

## Aufgabe 5.

Es sei  $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 2$  und  $\varphi$  die lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  mit  $\varphi : V \rightarrow V, p \rightarrow \varphi(p)$  mit  $(\varphi(p))(x) = p'(x) + p'(x+1)$ , wobei  $p'$  wie üblich die Ableitung von  $p$  nach  $x$  bezeichnet. (Die Linearität von  $\varphi$  braucht nicht gezeigt zu werden.) Man bestimme alle Elemente von  $V$ , die durch  $\varphi$  auf  $x - 2$  abgebildet werden. 4 Punkte

---

## Aufgabe 6.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, und es seien  $X, Y$  und  $Z$  drei verschiedene Vektoren aus  $V$ . Man widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) oder beweise die folgende Behauptung: Sind die Mengen  $\{X, Y\}$ ,  $\{Y, Z\}$  und  $\{Z, X\}$  linear unabhängig, so ist auch die Menge  $\{X, Y, Z\}$  linear unabhängig. 3 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{Q}^3$ ,  $W = \mathbb{Q}^2$ ,  $B$  eine Basis von  $V$  und  $C$  eine Basis von  $W$ . Es seien lineare

Abbildungen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  und  $\varphi_4$  gegeben mit  ${}_B\varphi_{1C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  ${}_B\varphi_{2C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,

${}_C\varphi_{3B} = ({}_B\varphi_{1C})^t$  und  ${}_C\varphi_{4B} = ({}_B\varphi_{2C})^t$ . Welche der Abbildungen sind injektiv, welche sind surjektiv? (kurze Begründung) 4 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

Man beweise oder widerlege: Der Vektorraum  $V = K^5$  hat für jeden Körper  $K$  mit  $p$  Elementen ( $p$  Primzahl) genauso viele ein- wie vierdimensionale Teilräume. 5 Punkte

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $V$  sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

a)  $M_1 = \{f \in V \mid f(5) = f(-5)\}$  3 Punkte

b)  $M_2 = \{f \in V \mid f(5) \cdot f(-5) = 0\}$  3 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $V = \mathbb{Q}^3$  und  $W = \mathbb{Q}^2$ . Dann ist  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von  $V$  und

$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  Basis von  $W$ . Es sei weiter eine lineare Abbildung  $\varphi$  von  $V$  nach

$W$  definiert durch  $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ . Man bestimme die Matrix  ${}_D\varphi_B$  der linearen

Abbildung  $\varphi$ . 3 Punkte

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $V$  ein Vektorraum,  $T$  ein Teilraum von  $V$ , der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und  $X_1, \dots, X_n \in V$ , so daß  $(T + X_1, \dots, T + X_n)$  eine Basis von  $V/T$  ist. Man beweise oder widerlege:

a)  $(X_1, \dots, X_n)$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ . 1 Punkt

b)  $(X_1, \dots, X_n)$  ist linear unabhängig in  $V$ . 2 Punkte

c)  $(X_1, \dots, X_n)$  ist eine Basis von  $V$ . 1 Punkt

---

**Aufgabe 12.**

Es sei  $\mathbb{F}_4$  der Körper mit vier Elementen. Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in  $\mathbb{F}_4^{3 \times 3}$ ?

4 Punkte

---



# Nachholklausur zur Linearen Algebra I Teil 2

## (20. 4. 93)

Lesezeit: 15 Minuten

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

Beweisen Sie: Jedes homogene oder inhomogene lineare Gleichungssystem über einem beliebigen Körper  $K$  mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten hat entweder keine Lösung oder mindestens 2 Lösungen. 3 Punkte

---

### Aufgabe 2.

Es sei  $\pi$  die durch  $\frac{i \parallel 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9}{i\pi \parallel 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 1 \mid 8 \mid 9 \mid 7}$  gegebene Permutationen auf 9 Ziffern.

- Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von ziffernfremden Zykeln. 1 Punkt
- Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Zweierzykeln (Transpositionen). 2 Punkte
- Schreiben Sie  $\pi^2$  als Produkt von Dreierzykeln. 1 Punkt
- Beweisen Sie:  $\pi$  läßt sich nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben. 2 Punkte

---

### Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper,  $n$  eine natürliche Zahl und  $A \in K^{n \times n}$  mit  $A \cdot A^t = I_n$  (Einheitsmatrix). Beweisen Sie:  $\det A \in \{1, -1\}$ . 2 Punkte

---

### Aufgabe 4.

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  und  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . Welche der folgenden Abbildungen von  $V \times V$  nach  $\mathbb{R}$  sind Bilinearformen? (Falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

- $\Phi(X, Y) = x_1 - y_3$ , 1 Punkt
- $\Phi(X, Y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$ . 1 Punkt

---

### Aufgabe 5.

Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $V$  und  $X \in V$  ein Eigenvektor von  $\varphi$  zum Eigenwert  $c \in K$  (also insbesondere  $X \neq 0$ ). Zeigen Sie:

- Ist  $\psi := \varphi - a \cdot \text{id}$  mit  $a \in K$ , so ist  $X$  auch ein Eigenvektor von  $\psi$ . 2 Punkte
- Ist  $\varphi$  invertierbar, so ist  $c \neq 0$ . 2 Punkte
- Ist  $\varphi$  invertierbar, so ist  $X$  auch ein Eigenvektor von  $\varphi^{-1}$ . 1 Punkt  
(Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.)

---

### Aufgabe 6.

Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $V^{**}$  der Bidualraum von  $V$ , und es sei  $T : V \rightarrow V^{**}$ ,  $X \mapsto X^{**}$  mit  $X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$  der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von  $V$  auf  $V^{**}$ . Zeigen Sie: Für jeden Teilraum  $U \leq V$  gilt:

$$X^{**} \in \text{An}(\text{An}(U)) \iff X \in \bigcap_{\varphi \in \text{An}(U)} \text{Kern}(\varphi) \quad 4 \text{ Punkte}$$

---

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq V$ .

- a) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für den Dualraum  $V^*$  von  $V$  an. 1 Punkt
- b) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für den Annihilator  $\text{An } T \leq V^*$  an. 1 Punkt
- c) Geben Sie (ohne Beweis) eine Definition für die zu einer Basis von  $V$  duale Basis (von  $V^*$ ) an. 1 Punkt
- d) Berechnen Sie den Annihilator  $\text{An } T$ . 4 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$  gegeben. Bestimmen Sie je eine Basis für den Durchschnitt  $T_1 \cap T_2$  und das Erzeugnis  $\langle T_1, T_2 \rangle$ .

5 Punkte

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Es sei  $B$  die Standardbasis von  $V$  und  $C$  eine weitere Basis von  $V$  mit der Basiswechselmatrix  $A := {}_B \text{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ . Eine lineare Abbildung  $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$  sei gegeben durch  ${}_B \varphi_B = M$ .

- a) Invertieren Sie die Matrix  $A$ . 3 Punkte
- b) Geben Sie (ohne Beweis) eine Formel an, in der die Abbildungsmatrix  ${}_C \varphi_C$  durch  ${}_B \varphi_B$  und  ${}_B \text{id}_C$  ausgedrückt wird. 1 Punkt
- c) Berechnen Sie  ${}_C \varphi_C$ . 2 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

$V, B, \varphi$  und  ${}_B \varphi_B$  seien genauso gegeben wie in Aufgabe 9.

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$ . 2 Punkte
- b) Berechnen Sie eine Fächerbasis von  $V$  bezüglich  $\varphi$ . 5 Punkte

---

**Aufgabe 11.**

$V, M, B, C$  und  ${}_B \text{id}_C$  seien genauso gegeben wie in Aufgabe 9. Weiter sei eine Bilinearform  $\Phi$  auf  $V$  seien gegeben durch die Matrix  ${}_B \Phi_B = M$ .

- a) Geben Sie (ohne Beweis) eine Formel an, in der die Matrix  ${}_C \Phi_C$  durch  ${}_B \Phi_B$  und  ${}_B \text{id}_C$  ausgedrückt wird. 1 Punkt
  - b) Ist  $\Phi$  ein Skalarprodukt? (Antwort mit Begründung!) 1 Punkt
-

Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (14. 4. 1993)**

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß

- a) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem lösbar ist, *2 Punkte*  
b) ein homogenes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 2.**

Welche der folgenden Relationen auf  $\mathbb{Z}$  sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

- a)  $x \sim y \Leftrightarrow \text{ggT}(x,y) = 7$  *3 Punkte*  
b)  $x \sim y \Leftrightarrow 1 < xy$  *3 Punkte*
- 

**Aufgabe 3.**

Es sei  $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 2$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $V$  sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

- a)  $M_1 = \{p \in V \mid p(0) = 1\}$  *2 Punkte*  
b)  $M_2 = \{p \in V \mid p(-2) = 0\}$  *3 Punkte*
- 

**Aufgabe 4.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^2$ , und es sei  $E = \text{Hom}(V, V)$  der Endomorphismenring von  $V$ . Geben Sie einen Endomorphismus von  $V$  an, der Nullteiler von  $E$  ist, und zeigen Sie, daß er ein Nullteiler ist.

*3 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Gilt für alle Paare  $(\varphi, \psi)$  von linearen Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , daß

- a)  $\Phi_1$  mit  $\Phi_1(X, Y) := \varphi(X) + \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist, *3 Punkte*  
b)  $\Phi_2$  mit  $\Phi_2(X, Y) := \varphi(X) \cdot \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist? *3 Punkte*

(jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $V^{**}$  der Bidualraum von  $V$ , und es sei  $T : V \rightarrow V^{**}$ ,  $X \mapsto X^{**}$  mit  $X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$  der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von  $V$  auf  $V^{**}$ . Zeigen Sie: Für jeden Teilraum  $U \leq V$  gilt

$$\text{An } U = \bigcap_{X \in U} \text{Kern } X^{**}. \quad \text{5 Punkte}$$

---

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (14. 4. 1993)**

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei gegeben durch  $\mathcal{B}\Phi\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie eine Basis für das Radikal von  $V$  bezüglich  $\Phi$ .

*5 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Invertieren Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

*5 Punkte*

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 2$ . Eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist  $\{1, x, 1 + x^2\}$  (dies ist **nicht** zu zeigen). Man bestimme die Matrix  $\mathcal{B}\varphi\mathcal{B}$  der linearen Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V, p \rightarrow \varphi(p)$  mit  $(\varphi(p))(x) = p'(x) + p(x+1)$ , wobei  $p'$  wie üblich die Ableitung von  $p$  nach  $x$  bezeichnet. (Die Linearität von  $\varphi$  braucht **nicht** gezeigt zu werden.)

*5 Punkte*

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $V$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 3$  und  $T$  der von  $\{x^3 + 1, x^2 + x + 3, 2x^3 - x^2 - x - 1\}$  erzeugte Teilraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis für  $T$ .

*3 Punkte*

b) Bestimmen Sie eine Basis für  $V/T$ .

*3 Punkte*

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis von  $V = \mathbb{R}^3$ . Eine lineare Abbildung  $\varphi$  von  $V$  nach  $V$  sei durch  $\mathcal{B}\varphi\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben. Man bestimme eine Fächerbasis für  $V$  bezüglich  $\varphi$ .

*7 Punkte*

---

**Aufgabe 12.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei gegeben durch  $\mathcal{B}\Phi\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie eine normierte Orthogonalbasis von  $V$ .

*7 Punkte*

---

Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (6. 10. 1993)**

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

- a) lineare Unabhängigkeit einer nicht leeren, nicht notwendigerweise endlichen Menge von Vektoren *2 Punkte*
- b) Eigenvektor *1 Punkt*
- c) Bilinearform, Skalarprodukt, Radikal *3 Punkte*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie einführen, zu erklären.

---

**Aufgabe 2.**

Welche der folgenden Relationen auf  $\mathbb{Z}$  sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

- a)  $x \sim y \Leftrightarrow x$  teilt  $y - 7$  *3 Punkte*
  - b)  $x \sim y \Leftrightarrow xy \leq 0$  *3 Punkte*
- 

**Aufgabe 3.**

Es sei  $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  der Vektorraum aller Polynome  $p \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $\text{Grad } p \leq 2$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $V$  sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

- a)  $M_1 = \{p \in V \mid (x - 1) \text{ teilt } p\}$  *3 Punkte*
  - b)  $M_2 = \{p \in V \mid x \text{ teilt } (p - 1)\}$  *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 4.**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement, und es sei  $a$  ein Nullteiler von  $R$ . Zeigen Sie, daß  $a$  in  $R$  kein (multiplikatives) Inverses besitzt. *3 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

$T_1$  und  $T_2$  seien zwei Teilräume eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , und es sei  $T_1 \cap T_2 \neq T_1$  und  $T_1 \cap T_2 \neq T_2$ . Zeigen Sie, daß  $T_1 \cup T_2$  kein Teilraum von  $V$  ist. *3 Punkte*

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V = \langle B_1, \dots, B_6 \rangle$  ein 6-dimensionaler  $K$ -Vektorraum, und es seien  $T_1$  ein 3-dimensionaler und  $T_2$  ein 5-dimensionaler Teilraum von  $V$ . Der Durchschnitt  $T_1 \cap T_2$  habe die Dimension  $d$ .

- a) Welche Werte kann  $d$  annehmen? (Antwort mit Begründung) *2 Punkte*
  - b) Geben Sie für jeden dieser Werte ein Beispiel für zwei entsprechende Teilräume  $T_1$  und  $T_2$  an. *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $T$  ein Teilraum von  $V$ , der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und  $X_1, \dots, X_n \in V$ , so daß  $(T + X_1, \dots, T + X_n)$  eine Basis des Restklassenraums  $V/T$  ist. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a)  $(X_1, \dots, X_n)$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ . *2 Punkte*
  - b)  $(X_1, \dots, X_n)$  ist linear unabhängig in  $V$ . *2 Punkte*
-

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (6. 10. 1993)**

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 8.**

Es sei  $\Phi$  ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ .

- a) Zeigen Sie: Gilt für zwei Vektoren  $Y_1, Y_2 \in V$ , daß  $\Phi(X, Y_1) = \Phi(X, Y_2)$  für alle  $X \in V$ , so folgt  $Y_1 = Y_2$ . *2 Punkte*
- b) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Ist  $\Phi$  wie oben und  $\varphi$  eine Abbildung von  $V$  in  $V$ , so daß  $\Phi(X, Y) = \Phi(X, \varphi(Y))$  für alle  $X, Y \in V$ , so ist  $\varphi$  linear. *3 Punkte*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle auftretenden Quantoren hinzuschreiben.

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq V$ . Bestimmen Sie den Annihilator  $\text{An } T \leq V^*$ . *5 Punkte*

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $V$  der von der Menge  $B = \{\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erzeugte 3-dimensionale Vektorraum. Dann ist  $B$  eine Basis von  $V$ . Ferner sei die (bekanntlich lineare) Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $f(x) \mapsto f'(x) + f''(x)$  gegeben, wobei  $f'$  und  $f''$  die gewöhnliche erste und zweite Ableitung von  $f$  nach  $x$  bezeichnen.

- a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_B \varphi_B$ . *5 Punkte*
- b) Berechnen Sie  $\text{Kern } \varphi$  (und vergessen Sie dabei nicht, daß  $V$  aus Funktionen und nicht aus Zahlenspalten besteht). *3 Punkte*
- 

**Aufgabe 11.**

Invertieren Sie die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ . *5 Punkte*

---

**Aufgabe 12.**

Es sei  $V = \mathbb{Q}^3$  und  $B$  die Standardbasis von  $V$ , und es sei  $M$  die in Aufgabe 11 gegebene Matrix. Eine lineare Abbildung  $\varphi$  von  $V$  nach  $V$  sei durch  ${}_B \varphi_B = M$  gegeben.

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre Vielfachheiten. *3 Punkte*
- b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  den zugehörigen Eigenvektorraum. *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 13.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei gegeben durch  ${}_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie eine normierte Orthogonalbasis von  $V$ . *7 Punkte*

---

# 1. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (3. 12. 93)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Beweisen Sie, daß der Restklassenring  $\mathbb{Z}_{12}$  zu keinem Körper gemacht werden kann. *2 Punkte*

---

## Aufgabe 2.

Im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbf{V}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$  seien die Matrizen  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben. Ist die Folge  $(A_1, A_2, A_3)$  linear unabhängig? (Antwort mit Begründung) *4 Punkte*

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $F(\mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Teilmengen von  $F(\mathbb{R})$  sind Teilräume? (Jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

- a)  $M_1 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1) + f(1) = 1 \}$  *2 Punkte*
- b)  $M_2 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1)^2 = f(1)^2 \}$  *3 Punkte*
- c)  $M_3 = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-1)^2 + f(1)^2 = 0 \}$  *3 Punkte*

---

## Aufgabe 4.

In einem  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  seien Vektoren  $A, B, C$  und  $X, Y, Z$  gegeben, so daß jede der Folgen  $(A, B)$ ,  $(A, C)$  und  $(B, C)$  sowie jede der Mengen  $\{X, Y\}$ ,  $\{X, Z\}$  und  $\{Y, Z\}$  linear unabhängig sind. Beweisen oder widerlegen Sie (konkretes Gegenbeispiel) jede der folgenden Aussagen.

- a) Ist  $n = 2$ , so ist die Folge  $(A, B, C)$  linear abhängig. *1 Punkt*
- b) Ist  $n = 2$ , so ist die Menge  $\{X, Y, Z\}$  linear abhängig. *2 Punkte*
- c) Ist  $n = 3$ , so ist die Folge  $(A, B, C)$  linear unabhängig. *2 Punkte*
- d) Ist  $n = 3$ , so ist die Menge  $\{X, Y, Z\}$  linear unabhängig. *1 Punkt*

---

## Aufgabe 5.

Bekanntlich bildet die Folge  $(p_0, p_1, \dots, p_7)$  der Potenzfunktionen  $p_i = (x \mapsto x^i)$  eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $P_7(\mathbb{R})$  aller Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 7$ . Gibt es eine Basis von  $P_7(\mathbb{R})$ , in der die Funktionen  $f_1 = x^3 + x^2 + 4$ ,  $f_2 = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ ,  $f_3 = x^3 + 3x^2 - 2x + 2$  vorkommen und sonst nur Potenzfunktionen? (Begründung) *4 Punkte*

---

**Aufgabe 6.**

Formulieren Sie eine Definition der linearen Unabhängigkeit einer endlichen Folge von Vektoren. (Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie benutzen, zu erklären.)

2 Punkte

**Aufgabe 7.**

Formulieren Sie den Austauschsatz von E. Steinitz. (Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie benutzen, zu erklären.)

3 Punkte

**Aufgabe 8.**

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems über dem Restklassenkörper  $\mathbb{Z}_3$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_1 \cdot x_2 + \alpha_2 \cdot x_3 + \alpha_1 \cdot x_4 + \alpha_0 \cdot x_5 &= \alpha_2 \\ \alpha_0 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_2 \cdot x_3 + \alpha_2 \cdot x_4 + \alpha_1 \cdot x_5 &= \alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_0 \cdot x_2 + \alpha_1 \cdot x_3 + \alpha_2 \cdot x_4 + \alpha_2 \cdot x_5 &= \alpha_2 \\ \alpha_2 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_1 \cdot x_3 + \alpha_0 \cdot x_4 + \alpha_2 \cdot x_5 &= \alpha_2, \end{aligned}$$

wobei jeweils  $\alpha_i = i + \mathbb{Z} \cdot 3 \in \mathbb{Z}_3$  ist. Benutzen Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Schema (mit Angabe der Rechenschritte) und geben Sie  $\mathcal{L}$  in der in der Vorlesung hergeleiteten Form an. Sie dürfen  $i$  statt  $\alpha_i$  schreiben.

5 Punkte

**Aufgabe 9.**

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten über einem beliebigen Körper  $K$ . Beweisen Sie:

- a) Ist das System homogen, so besitzt es mindestens zwei Lösungen. 2 Punkte
- b) Ist es inhomogen, so hat es entweder keine oder mindestens zwei Lösungen. 1 Punkt

**Aufgabe 10.**

Im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{353}$  zur Primzahl 353 sei das Element  $\alpha_{151} := 151 + \mathbb{Z} \cdot 353$  gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus das Element  $(\alpha_{151})^{-1}$ . 5 Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $V := \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{Q})$  und  $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Berechnen Sie eine Basis von  $V/U$ . 5 Punkte

**Aufgabe 12.**

In einem affinen Raum  $M$  über einem Vektorraum  $V$  seien Hyperebenen  $N = p \star \mathcal{T}(N)$  und  $L = q \star \mathcal{T}(L)$  gegeben. Zeigen Sie: Für jede Hyperebene  $K$ , die die Hyperebenen  $N$  und  $L$  umfaßt, gilt  $\mathcal{T}(K) \supseteq \mathcal{T}(N) + \mathcal{T}(L) + \langle \overline{pq} \rangle$ . 3 Punkte



## 2. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (11. 2. 94)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

Es sei  $V = \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{Z}_3)$ .

- (a) Wieviele Elemente hat  $V$ ? (Ausrechnen!) 1 Punkt
- (b) Wieviele Basisfolgen hat  $V$ ? (Eine Formel genügt.) 2 Punkte
- (c) Wieviele Teilräume der Dimension 2 hat  $V$ ? (Ausrechnen!) 2 Punkte

---

### Aufgabe 2.

Es sei  $V = \mathbf{V}_{2 \times 1}(\mathbb{Q})$ . Welche der folgenden Abbildungen  $\Phi_j: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{Q}$  sind Bilinearformen? (Jeweils, falls nein, ein konkretes (!) Gegenbeispiel; falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(X, Y) &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ \Phi_2(X, Y) &= (x_1 + x_2)(y_1 - y_2) \\ \Phi_3(X, Y) &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \end{aligned} \right\} \text{ für } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad 3 \text{ Punkte}$$

---

### Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die Menge aller Zahlentripel  $(x, y, z)$ , für die die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & y & 4 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

invertierbar ist. (Beschreiben Sie diese Menge mit Hilfe eines polynomialen Ausdrucks in  $x$ ,  $y$  und  $z$ .) 3 Punkte

---

### Aufgabe 4.

Es sei  $V = \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basisfolge von  $V$ .

Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei gegeben durch die Matrix  $M(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Berechnen Sie das Radikal von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . 4 Punkte
- (b) Ist  $\Phi$  ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) 1 Punkt

---

### Aufgabe 5.

$V$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi$  und  $A$  seien gegeben wie in Aufgabe 4.

- (a) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . 6 Punkte
  - (b) Ist  $\Phi$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.) 2 Punkte
-

**Aufgabe 6.**

$V$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi$  und  $A$  seien gegeben wie in Aufgabe 4. Eine weitere Basisfolge  $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$  von  $V$  sei durch die Basiswechsellmatrix  $M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben. Berechnen Sie die Matrix  $M(\mathcal{C}, \Phi, \mathcal{C})$ . 2 Punkte

**Aufgabe 7.**

$V$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi$  und  $A$  seien gegeben wie in Aufgabe 4, und es sei  $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

- (a) Berechnen Sie die Determinanten von  $A$  und  $S$ . 3 Punkte  
 (b) Beweisen Sie: Es gibt keine Basisfolge  $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3)$  von  $V$  mit  $M(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{A}) = S$ . 2 Punkte

**Aufgabe 8.**

$V$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi$  und  $A$  seien gegeben wie in Aufgabe 4.

- (a) Invertieren Sie die Matrix  $A$  (mit anschließender Probe). 3 Punkte  
 (b) Berechnen Sie die Basiswechsellmatrix  $M(\mathcal{B}, \mathcal{D})$  einer Basisfolge  $\mathcal{D}$  von  $V$ , so daß  $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$  ein Paar zueinander bezüglich  $\Phi$  dualer Basisfolgen ist. 3 Punkte

**Aufgabe 9.**

$V$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $A$  und  $T$  seien gegeben wie in den Aufgaben 4 und 6, und es sei  $\alpha: V \rightarrow V$  die lineare Abbildung mit  $M(\mathcal{B}, \alpha, \mathcal{B}) = A$ . Berechnen Sie die Matrix  $M(\mathcal{C}, \alpha, \mathcal{C})$ . 3 Punkte

**Aufgabe 10.**

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind für eine feste Basisfolge  $\mathcal{B}$  von  $V$  die Folgen  $\mathcal{B}$  und  $\varphi(\mathcal{B})$  gleichorientierte Basisfolgen, so sind für jede Basisfolge  $\mathcal{C}$  von  $V$  die Folgen  $\mathcal{C}$  und  $\varphi(\mathcal{C})$  gleichorientierte Basisfolgen. 3 Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$ , und es seien  $l$  und  $m$  die Funktionen in  $\mathbb{R}^E$  mit den folgenden Werten.

$x$	-2	-1	0	1	2
$l(x)$	1	1	0	1	1
$m(x)$	0	1	1	1	0

Approximieren Sie die Funktion  $f = (x \mapsto x^2 - 1 \text{ für } x \in E) \in \mathbb{R}^E$  durch eine Funktion im Teilraum  $T = \langle l, m \rangle$  bezüglich des durch

$$\Gamma(g, h) = \sum_{x \in E} g(x)h(x)$$

gegebenen Skalarprodukts.

6 Punkte

# 1. Nachholklausur zur Linearen Algebra I (8.4.1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Formulieren Sie eine Definition für den Ausdruck „erzeugt den Vektorraum  $V$ “. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben. Vermengen Sie nicht verschiedene, aber äquivalente Formulierungen; nur eine ist verlangt.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $F$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

a) Ist  $M_1 = \{f \in F \mid f(-1) \leq f(0) \leq f(1)\}$  ein Teilraum von  $F$ ? 2 Punkte

b) Ist  $M_2 = \{f \in F \mid f(-1) + f(1) = f(0)\}$  ein Teilraum von  $F$ ? 3 Punkte

c) Ist  $M_3 = \{f \in F \mid f(-1) = f(0) \text{ oder } f(1) = f(0)\}$  ein Teilraum von  $F$ ? 2 Punkte

Antwort jeweils mit Begründung.

---

## Aufgabe 3.

Ist die Teilmenge  $M = \{(1, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$  von  $\mathbf{V}_{1 \times 3}(\mathbb{Z}_2)$  eine Restklasse? (Begründung.)

4 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Über dem Körper  $\mathbb{Z}_{11}$  mit 11 Elementen ist ein lösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 6 Unbekannten gegeben. Für welche der Zahlen

$$\begin{array}{cccc} n_1 = 1, & n_3 = 11, & n_5 = 100, & n_7 = 3000, \\ n_2 = 3, & n_4 = 33, & n_6 = 1000, & n_8 = 15000 \end{array}$$

ist die Aussage  $A(n_i)$ :

„Das System hat notwendigerweise mindestens  $n_i$  Lösungen“

richtig, für welche nicht? (Achten Sie auf eine vollständige Begründung Ihrer Antwort.) 5 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Im  $\mathbb{Z}_5$ -Vektorraum  $\mathbf{V}_{1 \times 5}(\mathbb{Z}_5)$  sind die folgenden Vektoren gegeben.

$$X_1 = (1, 2, 3, 4, 0),$$

$$X_2 = (4, 1, 3, 0, 2),$$

$$X_3 = (1, 1, 2, 1, 1),$$

$$X_4 = (0, 2, 1, 3, 4),$$

$$X_5 = (3, 0, 2, 0, 4).$$

a) Berechnen Sie eine Basisfolge für das Erzeugnis  $T = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ . 4 Punkte

b) Welche Dimensionen haben die Teilräume  $T_1 = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ ,  $T_2 = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle$  und  $T_3 = T_1 \cap T_2$ ? 4 Punkte

---

**Aufgabe 6.**

Im Vektorraum  $F(\mathbb{R})$  aller reellwertigen Abbildungen auf  $\mathbb{R}$  betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} s &= (x \mapsto \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}), \\ c &= (x \mapsto \cos x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}), \\ q &= (x \mapsto x^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ist die Folge  $(s, c, q)$  linear unabhängig? (Antwort mit Begründung.)

4 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

- a) Hat die Restklasse  $\overline{55}$  im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{96}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? (Berechnen Sie es, oder zeigen Sie, daß es keins gibt.) 5 Punkte
- b) Hat die Restklasse  $\overline{6}$  im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{96}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? (Berechnen Sie es, oder zeigen Sie, daß es keins gibt.) 3 Punkte
- 

**Aufgabe 8.**

- a) Die ganzzahligen Lösungen  $(x, y) \in \mathbf{V}_{1 \times 2}(\mathbb{Z})$  der Gleichung  $113x + 37y = 0$  bilden den  $\mathbb{Z}$ -Modul  $H = (37, -113) \cdot \mathbb{Z}$ . Nun sei  $(x_0, y_0)$  eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$113x + 37y = 1.$$

Geben Sie die Menge aller ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung an.

2 Punkte

- b) Berechnen Sie eine ganzzahlige Lösung  $(x_0, y_0) \in \mathbf{V}_{1 \times 2}(\mathbb{Z})$  der Gleichung  $113x + 37y = 1$ .

4 Punkte

---

**Aufgabe 9.**

Im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V = \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{C})$  sind die Vektoren  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$

gegeben. Die Folge  $(X_1, X_2, X_3)$  ist offensichtlich linear unabhängig. Geben Sie einen Teilraum  $U$  von  $V$  an derart, daß  $(X_1 + U, X_2 + U, X_3 + U)$  eine Basisfolge des Faktorraums  $V/U$  ist. (Begründung.)

5 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

In einem affinen Raum  $M$  über  $\mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Q})$  ist ein Punkt  $p \in M$  vorgegeben („Ursprung“). Wir definieren Geraden

$$G = p * R \quad \text{und} \quad H = p * S$$

durch Angabe der Restklassen

$$R := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \quad \text{und} \quad S := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle.$$

Zeigen Sie, daß die Geraden  $G$  und  $H$  sich nicht schneiden.

5 Punkte

---

## 2. Nachholklausur zur Linearen Algebra I (8.4.1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur **eine** Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **wesentlichen** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

Wieviele injektive Vektorraum-Homomorphismen  $\pi: \mathbf{V}_{2 \times 1}(\mathbb{Z}_3) \longrightarrow \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Z}_3)$  gibt es? *5 Punkte*

---

### Aufgabe 2.

Im  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum  $V := \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Z}_2)$  sei der Vektor  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

- a) Wieviele Teilräume hat der Faktorraum  $V/\langle X \rangle$ ? *3 Punkte*
- b) Wieviele Teilräume von  $V$  gibt es, die den Vektor  $X$  enthalten? *4 Punkte*

---

### Aufgabe 3.

Invertieren Sie die Matrix  $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ . *3 Punkte*

---

### Aufgabe 4.

Gegeben seien die Vektoren  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  und  $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

sowie die lineare Abbildung  $\alpha: \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{V}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ , die bezüglich der Standard-Basisfolgen  $\mathcal{S}_4$  und  $\mathcal{S}_2$  durch die Matrix  $M(\mathcal{S}_2, \alpha, \mathcal{S}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  beschrieben wird.

- a) Berechnen Sie  $\alpha(X_1)$ . *1 Punkt*
- b) Berechnen Sie die Menge aller Urbilder von  $Y$ . *3 Punkte*
- c) Ist die von  $\alpha$  auf dem Teilraum  $U = \langle X_1, X_2 \rangle$  bewirkte Abbildung  $\alpha|_U: U \longrightarrow \mathbf{V}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$  injektiv? *3 Punkte*

---

### Aufgabe 5.

Auf  $V = \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  betrachten wir das Skalarprodukt  $\Gamma$  mit  $M := M(\mathcal{S}, \Gamma, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , wobei  $\mathcal{S}$  die Standard-Basisfolge bezeichnet.

- a) Berechnen Sie den Orthogonalraum  $U$  zum Teilraum  $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  in  $V$ . *4 Punkte*
- b) Berechnen Sie eine Orthogonal-Basisfolge für den durch  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  erzeugten Teilraum  $W$  von  $V$ . *7 Punkte*

---

### Aufgabe 6.

Ist das Skalarprodukt  $\Gamma$  auf  $\mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  aus Aufgabe 5 positiv definit? *6 Punkte*

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $\Gamma: V \times V \rightarrow K$  eine (feste) nicht ausgeartete Bilinearform auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  ( $K$  kommutativ). Wir ordnen jeder linearen Abbildung  $\alpha: V \rightarrow V$  die Bilinearform  $\Gamma_\alpha$  mit

$$\Gamma_\alpha(Y, X) = \Gamma(\alpha(Y), X) \quad \text{für } Y, X \in V$$

zu. Ist diese Zuordnung

$$f := (\alpha \mapsto \Gamma_\alpha): \text{Hom}^\circ(V, V) \rightarrow \text{Bil}(V)$$

zwischen dem  $K$ -Vektorraum  $\text{Hom}^\circ(V, V)$  aller linearen Abbildungen auf  $V$  und dem  $K$ -Vektorraum  $\text{Bil}(V)$  aller Bilinearformen auf  $V$

a) linear, 3 Punkte

b) injektiv? 5 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

Gegeben sei eine Basisfolge  $\mathcal{B}$  des Vektorraums  $V = \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ . Wir betrachten den Isomorphismus  $\pi: V \rightarrow V^*$ , der  $\mathcal{B}$  auf die duale Basisfolge  $\mathcal{B}^*$  abbildet. Es sei  $X \in V$  der Vektor mit

$$M(\mathcal{B}, X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und es sei } f := \pi(X) \in V^* \text{ sein Bild unter } \pi.$$

Berechnen Sie den Wert  $f(X)$  (also  $\pi(X)(X)$ ). 4 Punkte

---

**Aufgabe 9.**

Auf dem Intervall  $I = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$  seien die Funktionen  $l, m, f \in \mathbb{R}^I$  mit den folgenden Werten gegeben.

	für $x \in [0, 1)$	für $x \in [1, 2]$
$l(x)$	1	0
$m(x)$	0	1
$f(x)$	$x^2$	$x^2$

Approximieren Sie die Funktion  $f$  durch eine Funktion im Teilraum  $T = \langle l, m \rangle$  bezüglich des durch

$$\Gamma(g, h) = \int_0^2 g(x)h(x)dx.$$

gegebenen Skalarprodukts. (Ergebnis formulieren.) 6 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

Berechnen Sie eine gute Ersatzlösung für das folgende lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{Q}$ .

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= -4 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= 1 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \text{4 Punkte}$$


---

**Aufgabe 11.**

Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Determinantenform“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) 3 Punkte

---

**Aufgabe 12.**

Im Vektorraum  $\mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  seien zwei Basisfolgen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  durch ihre Matrizen  $M(\mathcal{S}, \mathcal{B}) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } M(\mathcal{S}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Standard-Basisfolge } \mathcal{S} \text{ gegeben.}$$

a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen. 2 Punkte

b) Sind die beiden Basisfolgen gleich orientiert? (Mit Beweis.) 4 Punkte

---

Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Formulieren Sie eine Definition für die Begriffe „linear abhängig“ und „linear unabhängig“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) *3 Punkte*

---

**Aufgabe 2.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $F = \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  seien die folgenden Mengen  $M_1$  und  $M_2$  gegeben.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \mid 9x_1^2 - 4x_4^2 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \mid 9x_1^2 + 4x_4^2 = 0 \right\}.$$

- a) Ist  $M_1$  ein Teilraum von  $F$ ? (Begründung.) *2 Punkte*
  - b) Ist  $M_2$  ein Teilraum von  $F$ ? (Begründung.) *4 Punkte*
  - c) Geben Sie für jede der Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , sofern sie ein Teilraum ist, eine Basisfolge an. *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 3.**

Es sei ein lösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{Z}_{1009}$  mit 1009 Elementen gegeben (bekanntlich ist 1009 eine Primzahl). Für welche der Zahlen

$$\begin{array}{cccc} n_1 = 1, & n_3 = 1\,000, & n_5 = 10\,000, & n_7 = 10\,000\,000, \\ n_2 = 10, & n_4 = 1\,010, & n_6 = 1\,000\,000, & n_8 = 1\,000\,000\,000 \end{array}$$

ist die Aussage „das System hat notwendigerweise mindestens  $n_i$  Lösungen“ wahr, für welche ist sie falsch? Geben Sie für Ihre Antwort einen ausführlichen Beweis. *6 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

In  $V = \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{Z}_5)$  sei der Teilraum  $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  gegeben. Geben Sie eine Basisfolge für den

Faktorraum  $V/T$  an. (Formulierung und Begründung sind wichtig.) *4 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Geben Sie Basen für drei 2-dimensionale Teilräume  $T_1, T_2, T_3$  von  $V := \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  an, so daß die Summe von je zweien dieser Teilräume ganz  $V$  ist (mit Begründung). *4 Punkte*

---

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Invertieren Sie die Matrix  $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -3 & 10 & 14 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ . *5 Punkte*

---

**Aufgabe 7.**

Wir betrachten einen 4-dimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $V$  und die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  über  $\mathbb{Q}$ . Beweisen Sie jeweils (ohne viel zu rechnen), ob oder ob nicht

- a) es Basisfolgen  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  von  $V$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gibt, so daß  $M(\mathcal{B}_1, \varphi, \mathcal{B}_1) = A$  und  $M(\mathcal{B}_2, \varphi, \mathcal{B}_2) = \lambda E$  für ein  $\lambda \in \mathbb{Q}$  (also ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix  $E$ ) ist, *3 Punkte*
- b) es Basisfolgen  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  von  $V$  und eine Bilinearform  $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$  gibt, so daß  $M(\mathcal{C}_1, \Phi, \mathcal{C}_1) = A$  und  $M(\mathcal{C}_2, \Phi, \mathcal{C}_2)$  eine Diagonalmatrix ist. *3 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Wir betrachten auf  $W = \mathbf{V}_{1 \times 5}(\mathbb{Z}_5)$  das Standard-Skalarprodukt  $\Phi: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}_5$  mit

$$\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^5 x_i y_i \quad \text{für } X = (x_1, \dots, x_5), Y = (y_1, \dots, y_5) \in W.$$

- a) Ist  $\Phi$  ausgeartet? *2 Punkte*
- b) Gibt es in  $W$  isotrope Vektoren bezüglich  $\Phi$ ? *2 Punkte*

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $\mathcal{B}$  eine Basisfolge von  $V = \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Z}_3)$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_3$  sei gegeben

durch die Matrix  $M(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C}$  von

$V$  bezüglich  $\Phi$ . (Vergessen Sie nicht die Formulierung des Ergebnisses.)

Hinweis: Das Gram-Schmidt-Verfahren ist hier ungeeignet.

*4 Punkte*

---



Aufgabenblatt 3 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 10.**

Gegeben seien  $K$ -Vektorräume  $W$  und  $V$  gleicher Dimension, eine nicht ausgeartete Bilinearform  $\Phi: W \times V \rightarrow K$  sowie ein Paar  $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$  bezüglich  $\Phi$  dualer Basisfolgen von  $W$  und  $V$ .

- a) Welche Matrix hat  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{B}'$  und  $\mathcal{B}$ ? *2 Punkte*
- b) Es sei  $(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  ein weiteres Paar bezüglich  $\Phi$  dualer Basisfolgen von  $W$  und  $V$ . Leiten Sie eine Formel her, mit der sich aus der Basiswechsellmatrix  $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  die Basiswechsellmatrix  $m(\mathcal{C}', \mathcal{B}')$  berechnen läßt. *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 11.**

Das folgende lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{Q}$  ist offenbar nicht lösbar.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 8 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine neue rechte Seite, so daß das Gleichungssystem lösbar wird und die Abweichung der neuen rechten Seite von der alten bezüglich des Standard-Skalarprodukts möglichst klein wird, und zwar auf zwei Arten:

- a) nach der allgemeinen Methode der besten Approximation, *8 Punkte*
- b) durch vorherige Bestimmung einer guten Ersatzlösung für ein „überbestimmtes“ lineares Gleichungssystem. *6 Punkte*
- 

**Aufgabe 12.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . *4 Punkte*

---

**Aufgabe 13.**

Wir betrachten im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{252}$  die Restklassen  $\overline{55}$  und  $\overline{42}$ , die die Zahlen 55 bzw. 42 enthalten.

- a) Hat  $\overline{55}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? Wenn ja, berechnen Sie es. Wenn nein, beweisen Sie, daß es keins gibt. *4 Punkte*
- b) Hat  $\overline{42}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? Wenn ja, berechnen Sie es. Wenn nein, beweisen Sie, daß es keins gibt. *2 Punkte*
-

Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Formulieren Sie eine Definition für die Begriffe „Bilinearform“, „Skalarprodukt“ und „ausgearbeitetes Skalarprodukt“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) *4 Punkte*

---

**Aufgabe 2.**

Es sei  $F$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

a) Ist  $M_1 = \{f \in F \mid f(2) \cdot f(3) = f(6)\}$  ein Teilraum von  $F$ ? *2 Punkte*

b) Ist  $M_2 = \{f \in F \mid f(2) + f(3) = f(5)\}$  ein Teilraum von  $F$ ? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

**Aufgabe 3.**

Wir betrachten lösbar inhomogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{Z}_7$  mit 7 Elementen. Bestimmen Sie die natürliche Zahl  $n$ , für die die beiden folgenden Aussagen gelten.

(1) Jedes solche System hat mindestens  $n$  Lösungen.

(2) Nicht jedes solche System hat mindestens  $n + 1$  Lösungen.

(Geben Sie ausführliche Beweise für beide Eigenschaften.) *7 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

Im Vektorraum  $V = \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{Z}_5)$  über dem Körper  $\mathbb{Z}_5$  mit 5 Elementen sei der Teilraum

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Geben Sie eine Basisfolge für den Faktorraum  $V/T$  an. (Formulierung und Begründung sind wichtig.) *5 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Invertieren Sie die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ . *5 Punkte*

---

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V$  der Vektorraum  $\mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ .

- a) Geben Sie, falls möglich, zwei 3-dimensionale Teilräume  $T_1, T_2$  von  $V$  an mit  $T_1 \cap T_2 = \{0\}$ .  
*3 Punkte*
- b) Geben Sie, falls möglich, drei 2-dimensionale Teilräume  $U_1, U_2, U_3$  von  $V$  an, die paarweise den Durchschnitt  $\{0\}$  haben.  
*4 Punkte*
- c) Gibt es zweihundert 1-dimensionale Teilräume in  $V$ , die paarweise den Durchschnitt  $\{0\}$  haben?  
*3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung. Achten Sie auf die Formulierung.)

---

**Aufgabe 7.**

Wieviele lineare Abbildungen  $\alpha: \mathbf{V}_{4 \times 1}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Q})$  gibt es, welche folgendermaßen abbilden?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Mit Beweis.)

*3 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Es sei  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$  eine Basisfolge von  $V = \mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  und  $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  das durch

die Matrix  $M(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  bestimmte Skalarprodukt auf  $V$ . Berechnen Sie mit

Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasisfolge  $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie

- a) die Matrix  $M(\mathcal{C}, \Phi, \mathcal{C})$ ,
  - b) die Basiswechselmatrix  $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  und
  - c) die Basisvektoren  $C_1, C_2, C_3$  als Ausdrücke in  $B_1, B_2, B_3$  an.  
*5 Punkte*
- 

**Aufgabe 9.**

In Aufgabe 8 hätten wir auch das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden können. Aber das funktioniert nicht immer.

- a) Warum nicht?  
*2 Punkte*
  - b) Es sei  $V = \mathbf{V}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  mit  $n > 1$  und  $\Phi$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Geben Sie für  $\Phi$  eine hinreichende Bedingung dafür an, daß man aus jeder Basisfolge  $\mathcal{B}$  von  $V$  mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthogonalbasisfolge von  $V$  bezüglich  $\Phi$  berechnen kann.  
(Mit Begründung.)  
*2 Punkte*
-

Aufgabenblatt 3 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (22. 9. 1994)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $E = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ , und es sei  $f$  die Funktion in  $\mathbb{R}^E$  mit den folgenden Werten.

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	4	3	0	-10

Bestimmen Sie diejenige quadratische Funktion  $g(x) = ax^2 + bx + c$  auf  $E$  (also diejenige Funktion  $g$  aus dem von den Potenzfunktionen  $p_0, p_1, p_2$  aufgespannten Teilraum von  $\mathbb{R}^E$ ), die die beste Approximation der Funktion  $f$  bezüglich des durch

$$\Gamma(g, h) = \sum_{x \in E} g(x)h(x)$$

gegebenen Skalarprodukts liefert. (Wir empfehlen, für jede in der Rechnung auftretende Funktion die gegebene Wertetabelle um die entsprechende Zeile zu ergänzen.) 8 Punkte

---

**Aufgabe 11.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . 4 Punkte

---

**Aufgabe 12.**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring-mit-1, und es sei  $a$  ein Nullteiler von  $R$ . Zeigen Sie, daß  $a$  in  $R$  kein (multiplikatives) Inverses besitzt. (Die Formulierung ist wichtig.) 3 Punkte

---

**Aufgabe 13.**

Wir betrachten im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{111}$  die Restklasse  $\overline{70}$ , die die Zahl 70 enthält. Berechnen Sie zu  $\overline{70}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation. 4 Punkte

---

**Aufgabe 14.**

Es sei  $V$  der Vektorraum  $\mathbf{V}_{3 \times 1}(\mathbb{Z}_3)$ . Die lineare Abbildung  $\beta: V \rightarrow V$  sei bezüglich der

Standardbasis  $\mathcal{S}$  von  $V$  durch die Matrix  $M(\mathcal{S}, \beta, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

- a) Gibt es in  $V$  einen 1-dimensionalen,  $\beta$ -invarianten Teilraum  $T$  (d. h.  $\beta(T) \subseteq T$ )?
- b) Gibt es in  $V$  einen 2-dimensionalen,  $\beta$ -invarianten Teilraum  $U$  (d. h.  $\beta(U) \subseteq U$ ), dessen sämtliche 1-dimensionale Teilräume ebenfalls  $\beta$ -invariant sind?

(Denken Sie daran, daß wir über dem Körper mit 3 Elementen rechnen!) 7 Punkte

---

# 1. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (9.12.94)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 11 gegebenen Aufgaben für insgesamt 48 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten, jedoch werden nur maximal 40 der erreichten Punkte auf den Übungsschein angerechnet. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

- Dimension eines endlich erzeugten Vektorraumes,
- Summe  $T_1 + T_2$  zweier Teilräume eines Vektorraumes,
- Kern einer linearen Abbildung.

(Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie einführen, zu erklären.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Geben Sie ein Element  $a \neq 0$  im Ring  $\mathbb{Z}_6$  an, das kein (multiplikativ) inverses Element besitzt. (Mit Beweis)

3 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{Q}^2$  sind Teilräume von  $\mathbb{Q}^2$ ?

$$M_1 := \{ (a, b) \mid a = b + 5 \}, \quad M_2 := \{ (a, b) \mid a = b \cdot 5 \}, \quad M_3 := \{ (a, b) \mid a = b^5 \}.$$

(Antwort jeweils mit Begründung)

4 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels) die folgende Behauptung: Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum über einem Körper  $K$  und sind  $u, v, w$  Vektoren aus  $V$  mit der Eigenschaft, daß jede der Mengen  $\{u, v\}$ ,  $\{u, w\}$  und  $\{v, w\}$  linear unabhängig ist, so ist auch die Menge  $\{u, v, w\}$  linear unabhängig.

3 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Welche der folgenden Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  sind linear?

$$\varphi_1: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 0, 2x_1 - x_2), \quad \varphi_2: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2, x_1, x_2).$$

(Antwort jeweils mit Begründung)

4 Punkte

---

**Aufgabe 6.**

Im Vektorraum  $V = \mathbb{Z}_5^{3 \times 1}$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Dimensionen von  $T_1 + T_2$  und  $T_1 \cap T_2$ . 4 Punkte
- b) Bestimmen Sie eine Basis von  $V/T_1$ . 2 Punkte

**Aufgabe 7.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit Kern  $\varphi = \text{Bild } \varphi$ , wenn  $n$  gerade ist. 4 Punkte

**Aufgabe 8.**

Es sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $\varphi: V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(X) = AXA$  für alle  $X \in V$ .

- a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist. 1 Punkt
- b) Geben Sie je eine Basis von Kern  $\varphi$  und Bild  $\varphi$  an. 4 Punkte
- c) Ergänzen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$  zu einer Basis von  $V$ . 1 Punkt

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $T$  ein Teilraum von  $V$ , der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und  $v_1, \dots, v_n \in V$ , so daß  $(v_1 + T, \dots, v_n + T)$  eine Basis von  $V/T$  ist. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a)  $(v_1, \dots, v_n)$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ . 2 Punkte
- b)  $(v_1, \dots, v_n)$  ist linear unabhängig in  $V$ . 2 Punkte

**Aufgabe 10.**

Gegeben sei der 3-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \leq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $p_i(x) = x^i$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $x \in \mathbb{R}$ . (Wir wissen aus der Vorlesung, daß  $(p_1, p_2, p_3)$  linear unabhängig ist.)

Weiter sei  $W = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , und es sei  $\varphi: V \rightarrow W$  die durch  $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-2) \\ f(0) \\ f(2) \end{pmatrix}$  definierte Abbildung von  $V$  in  $W$ . Ist  $\varphi$  linear? Ist  $\varphi$  surjektiv? Ist  $\varphi$  injektiv?

(Antwort jeweils mit Begründung)

5 Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $a_{ij} = j - i$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Bestimmen Sie  $\text{Rg } A$ . Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Fälle  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ . 6 Punkte

## 2. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (3. 2. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 70 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen insgesamt (also aus beiden Semesterklausuren zusammen) mindestens 50 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

Formulieren Sie Definitionen für die Begriffe „Eigenwert“, „Eigenvektor“ und „Eigenraum“. (Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben.)

4 Punkte

---

### Aufgabe 2.

Es seien Permutationen  $\sigma, \tau \in S_6$  definiert durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Schreiben Sie  $\sigma$  und  $\tau$  als Produkte von Zykeln mit disjunkten Ziffernmengen.
- Berechnen Sie daraus  $\sigma \cdot \tau$ ,  $\tau \cdot \sigma$  und  $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma$  jeweils in Zykelschreibweise (Multiplikation von rechts nach links wie in der Vorlesung).

5 Punkte

---

### Aufgabe 3.

In  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  seien die Teilräume  $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$  gegeben.

Berechnen Sie je eine Basis für  $U \cap W$  und  $U + W$ .

6 Punkte

---

### Aufgabe 4.

Es seien  $p, q \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $p = X^6 - 5X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 2X - 9$  und  $q = X^2 - 5X - 2$ .

- Dividieren Sie  $p$  mit Rest durch  $q$ .

- Berechnen Sie  $q(A)$  und  $p(A)$  für  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ .

7 Punkte

---

### Aufgabe 5.

- Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in  $\mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$ ?
- Wieviele Matrizen  $A \in \mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$  mit  $\det A = 0$  gibt es?
- Es sei  $0 \neq a \in \mathbb{Z}_5$ . Wieviele Matrizen  $A \in \mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$  mit  $\det A = a$  gibt es?

Antwort jeweils mit Begründung.

7 Punkte

---

**Aufgabe 6.** Es sind  $B = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  und  $B' = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  Basisfolgen von  $V = \mathbb{Q}^3$

sowie  $C = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  und  $C' = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$  Basisfolgen von  $W = \mathbb{Q}^2$ . Eine lineare

Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  sei definiert durch  $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$ , und es sei  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$ .

a) Berechnen Sie  $c_C[\varphi]_B$  und  $c_{C'}[\varphi]_{B'}$ .

b) Berechnen Sie  $c_{B'}(v)$  und  $c_{C'}(\varphi(v))$ .

8 Punkte

**Aufgabe 7.**

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End } V$  mit  $\varphi^2 = \varphi$ . Zeigen Sie:

a)  $\varphi$  ist diagonalisierbar.

b) Ist  $t$  ein Eigenwert von  $\varphi$ , so gilt  $t \in \{0, 1\}$ .

5 Punkte

**Aufgabe 8.**

Es seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei vertauschbare Endomorphismen eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von  $\psi$  ist  $\varphi$ -invariant.

5 Punkte

**Aufgabe 9.**

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ .

b) Zeigen Sie, ohne irgendwelche Matrixmultiplikationen auszuführen, daß  $A^4$  gleich der Einheitsmatrix  $E_3$  ist.

c) Bestimmen Sie ein Polynom  $p \in \mathbb{C}[X]$  vom Grade 2, für das  $p(A) = A^{-1}$  gilt. 12 Punkte

**Aufgabe 10.**

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 3}$ . Berechnen Sie

a) die Jordan-Normalform von  $A$ ,

b) eine invertierbare Matrix  $P \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 3}$ , so daß  $P^{-1}AP$  in Jordan-Normalform ist,

c) das Minimalpolynom von  $A$ .

11 Punkte



# Nachholklausur zur Linearen Algebra I (29.3.95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 60 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen 25 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

- Formulieren Sie Definitionen für die Begriffe „Restklasse“, „Faktorraum“ und „Dualraum“. Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben und alle Bezeichnungen, die Sie benutzen (wie z. B.  $K$  oder  $V$ ), zu erklären. 3 Punkte
- Zwei endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  (über demselben Körper  $K$ ) seien durch die Basisfolgen  $B = (v_1, \dots, v_n)$  und  $C = (w_1, \dots, w_m)$  gegeben, und es sei  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$ . Wie ist die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich  $B$  und  $C$  definiert? 2 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei 2-dimensionale Teilräume eines 3-dimensionalen Vektorraums. Welche Dimension muß  $T_1 \cap T_2$  mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie ein konkretes Beispiel für diesen Fall an. 3 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V = K^{2 \times 2}$  der Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen über  $K$ . Ist  $U = \{A \in V \mid \det A = 0\}$  ein Teilraum von  $V$ ? (Antwort mit Begründung.) 4 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Für welche  $c \in \mathbb{Q}$  hat das Gleichungssystem  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & c-3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & c+2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  über  $\mathbb{Q}$

- keine Lösung,
- genau eine Lösung,
- mehr als eine Lösung? (Antwort jeweils mit Begründung.) 6 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Es seien  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$  zwei Teilräume des Vektorraums  $V = \mathbb{Z}_2^{4 \times 1}$ . Berechnen Sie eine Basis für  $T_1 \cap T_2$ . 5 Punkte

---

## Aufgabe 6.

Gegeben seien ein 2-dimensionaler Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$ , eine Basis  $B$  von  $V$  sowie die zwei Matrizen  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  und  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  aus  $K^{2 \times 2}$ . Dann gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  sowie eine Bilinearform  $\Phi: V \times V \rightarrow K$  mit  ${}_B[\varphi]_B = [\Phi]_B = A_1$ .

- Gibt es eine Basis  $C$  von  $V$  mit  ${}_C[\varphi]_C = A_2$ ? (Antwort mit Begründung.) 4 Punkte
  - Gibt es eine Basis  $D$  von  $V$  mit  $[\Phi]_D = A_2$ ? (Antwort mit Begründung.) 3 Punkte
-

**Aufgabe 7.**

Im Vektorraum  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  betrachten wir den Teilraum  $V$ , der von den durch

$$f_1(x) = \sin^2 x, \quad f_2(x) = \cos^2 x \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sin x \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

definierten Abbildungen  $f_1, f_2, f_3$  erzeugt wird. Dann ist die Menge  $B = \{f_1, f_2, f_3\}$  eine Basis von  $V$ . (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.) Ferner sei  $\varphi: V \rightarrow V$  die durch

$$\varphi(f)(x) = f'(x) + f''(x) \quad \text{für alle } f \in V \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}$$

definierte Abbildung von  $V$  nach  $V$ , wobei  $f'$  und  $f''$  die gewöhnliche erste und zweite Ableitung von  $f$  nach  $x$  bezeichnen. Bekanntlich ist  $\varphi$  linear.

- a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_B[\varphi]_B$ . 5 Punkte
- b) Berechnen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$ . (Vergessen Sie dabei nicht, daß die Vektoren von  $V$  Funktionen und keine Spalten sind.) 3 Punkte

**Aufgabe 8.**

Es sei  $K$  ein Körper,  $n$  eine natürliche Zahl,  $A \in K^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und  $B \in K^{n \times n}$ . Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von  $AB$  ist auch ein Eigenwert von  $BA$ . 4 Punkte

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = P_3(\mathbb{R})$  der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 3$  auf  $\mathbb{R}$ ,  $B = (f_1, f_2, f_3)$

eine Basisfolge von  $V$  und  $\varphi$  die durch die Matrix  ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  definierte lineare Abbildung von  $V$  in  $V$ .

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre algebraischen Vielfachheiten. 3 Punkte
- b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von  $\varphi$  eine Basis des zugehörigen Eigenraums. (Vergessen Sie dabei nicht, daß die Vektoren in  $V$  Polynomfunktionen und keine Spalten sind.) 5 Punkte
- c) Berechnen Sie das Minimalpolynom von  $\varphi$ . 3 Punkte

**Aufgabe 10.**

Es sei wieder  $V = P_3(\mathbb{R})$  der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 3$  auf  $\mathbb{R}$  und  $B = (f_1, f_2, f_3)$  eine Basisfolge von  $V$ , und es sei  $\Phi$  die durch die Matrix

$$[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

definierte Bilinearform  $\Phi$  auf  $V$ . Berechnen Sie eine Orthogonalbasis  $C = (g_1, g_2, g_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Matrix  $[\Phi]_C$ , die Basiswechselmatrix  ${}_B[id]_C$  sowie die Basisvektoren  $g_1, g_2, g_3$  (als Ausdrücke in  $f_1, f_2, f_3$ ) an. 7 Punkte

Hinweis: Wir empfehlen, die Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen zu benutzen.

Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)**

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe:

- a) Wann heißt eine Abbildung injektiv? *1 Punkt*
- b) Wann heißt ein Endomorphismus diagonalisierbar? *1 Punkt*
- c) Was heißt Dualraum? *1 Punkt*

Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben und alle Bezeichnungen, die Sie benutzen (wie z. B.  $K$  oder  $V$ ), zu erklären.

---

**Aufgabe 2.**

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

- a) Ist  $M_1 = \{f \in V \mid f(2) = f(0) + 2\}$  ein Teilraum von  $V$ ? *2 Punkte*
- b) Ist  $M_2 = \{f \in V \mid f(2) = f(1) \cdot 2\}$  ein Teilraum von  $V$ ? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

Für die Aufgaben 3 bis 5 nehmen wir an, es sei  $V$  der Vektorraum  $V = \mathbb{Z}_5^{3 \times 1}$ , und es seien in  $V$  die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ ,  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$  gegeben.

Warnung: Denken Sie daran, über  $\mathbb{Z}_5$  zu rechnen!

**Aufgabe 3.**

- a) Berechnen Sie die Dimensionen von  $T_1$ , von  $T_2$  und von  $T_1 + T_2$ . *3 Punkte*
- b) Es gibt einen Dimensionssatz, mit dem man hieraus die Dimension von  $T_1 \cap T_2$  berechnen kann. Formulieren Sie diesen Satz (als vollständigen Satz mit allen Voraussetzungen). *2 Punkte*

**Aufgabe 4.**

Berechnen Sie je eine Basis für  $T_2$  und für den Faktorraum  $V/T_2$ .

(Formulierung und Begründung sind wichtig.)

*3 Punkte*

**Aufgabe 5.**

Berechnen Sie eine Basis für  $T_1 \cap T_3$ .

*5 Punkte*

Zur Erinnerung: Denken Sie daran, über  $\mathbb{Z}_5$  zu rechnen!

---

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)**

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$  der Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen über  $\mathbb{Q}$ .

- a) Zeigen Sie, daß die durch  $\varphi(A) = A + A^{\text{tr}}$  für  $A \in V$  definierte Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  linear ist. *2 Punkte*
  - b) Geben Sie eine Basis  $B$  von  $V$  an, und berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_B[\varphi]_B$  von  $\varphi$  bezüglich  $B$ . *4 Punkte*
  - c) Berechnen Sie den Rang von  $\varphi$ . *2 Punkte*
- 

**Aufgabe 7.**

Gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 7 Unbekannten über einem geeigneten Körper  $K$ , das genau 4 Lösungen hat?

(Antwort mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.

Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Es sei  $V = \mathbb{Z}_3^{5 \times 1}$  und  $T$  ein Teilraum der Dimension 2 von  $V$ .

- a) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von  $T$ . *2 Punkte*
- b) Berechnen Sie die Anzahl der Basisfolgen von  $V$  und von  $T$ . *2 Punkte*
- c) Berechnen Sie die Anzahl der 2-dimensionalen Teilräume von  $V$ . *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

Für die Aufgaben 9 bis 10 legen wir folgende Bezeichnungen fest:

Es sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $B = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basisfolge von  $V$ . Durch die Basiswechsellmatrix

$${}_B[id]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ und die Abbildungsmatrix } {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ seien eine weitere}$$

Basis  $C$  von  $V$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gegeben.

**Aufgabe 9.**

- a) Berechnen Sie die Basiswechsellmatrix  ${}_C[id]_B$ . *5 Punkte*
- b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_C[\varphi]_C$ . *3 Punkte*

**Aufgabe 10.**

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre Vielfachheiten. *5 Punkte*
  - b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  den zugehörigen Eigenraum. *3 Punkte*
-

Aufgabenblatt 3 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (14. 3. 1995)**

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $B = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basisfolge von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei gegeben durch die Matrix  $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasis  $C = (w_1, w_2, w_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie

- a) die Matrix  $[\Phi]_C$ , *5 Punkte*
  - b) die Basiswechselmatrix  ${}_B[id]_C$  und *1 Punkt*
  - c) die Basisvektoren  $w_1, w_2, w_3$  (als Ausdrücke in  $v_1, v_2, v_3$ ) an. *1 Punkt*
- 

**Aufgabe 12.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Matrix  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  sei definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{für } i = j = 1, \\ -2 & \text{für } i = j \geq 2, \\ 1 & \text{für } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .

*4 Punkte*

---

# Aufgabenblatt

## Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (28. 9. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

### Aufgabe 1.

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

- Basisfolge eines endlich erzeugten Vektorraums (geben Sie zwei verschiedene Definitionen an), 2 Punkte
- charakteristisches Polynom (wovon?). 2 Punkte

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen werden angegeben, und für alle auftretenden Namen (wie z. B.  $K$  oder  $V$ ) wird gesagt, was für Objekte sie bezeichnen.

---

### Aufgabe 2.

Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums  $V = \mathbb{R}^{1 \times 4}$  sind Teilräume von  $V$ ?

- $M_1 = \{ [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_1^2 + x_3^4 = 0 \}$ , 3 Punkte
- $M_2 = \{ [x_1, x_2, x_3, x_4] \in V \mid x_2^1 + x_4^3 = 0 \}$ . 2 Punkte

(Antwort jeweils mit Begründung.)

---

### Aufgabe 3.

Bringen Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{4 \times 4}$  durch elementare Zeilenumformungen

auf Stufenform, und geben Sie ihren Rang an

- für den Fall  $K = \mathbb{Z}_2$ , 2 Punkte
  - für den Fall  $K = \mathbb{Z}_3$ . 3 Punkte
- 

### Aufgabe 4.

Gegeben sei ein 4-dimensionaler Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$ . Für welche der Zahlen  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  gibt es zwei 3-dimensionale Teilräume  $T_1$  und  $T_2$  von  $V$  mit  $\dim(T_1 \cap T_2) = n$ , für welche nicht? (Mit Beweis. Geben Sie insbesondere im ersten Fall jeweils ein konkretes Beispiel für  $T_1$  und  $T_2$  an.) 6 Punkte

---

### Aufgabe 5.

Es sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  und  $V = K^{n \times n}$  der Vektorraum der  $n \times n$ -Matrizen über  $K$ .

- Zeigen Sie: Ist  $A \in K^{n \times n}$  (fest gewählt), so ist die durch  $\varphi(X) = XA$  für  $X \in V$  definierte Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  linear. (Argumentation und Formulierung sind wichtig.) 3 Punkte
  - Sei nun konkret  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 2$  und  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Wählen Sie eine Basis  $B$  von  $V$  (geben Sie sie an), und berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_B[\varphi]_B$  von  $\varphi$  bezüglich  $B$ . 4 Punkte
-

**Aufgabe 6.**

- a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten über einem beliebigen Körper lösbar? *3 Punkte*
- b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten, das genau vier Lösungen hat? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

**Aufgabe 7.**

Es sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen.

- a) Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in  $K^{2 \times 2}$ ? *3 Punkte*
- b) Wieviele Matrizen  $A \in K^{2 \times 2}$  mit  $\det A = 0$  gibt es? *2 Punkte*
- c) Es sei  $0 \neq d \in K$ . Wieviele Matrizen  $A \in K^{2 \times 2}$  mit  $\det A = d$  gibt es? *3 Punkte*

(Antwort jeweils mit Begründung.)

**Aufgabe 8.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $B = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basisfolge von  $V$ . Eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$

sei durch die Abbildungsmatrix  ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  gegeben.

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre algebraischen Vielfachheiten. *5 Punkte*
- b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  eine Basis des zugehörigen Eigenraums.  
(Warnung: Verwechseln Sie die Vektoren der Eigenräume nicht mit ihren Koeffizientenspalten bezüglich  $B$ .) *3 Punkte*

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $B = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basisfolge von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei

gegeben durch die Matrix  $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Orthogonalbasis  $C = (w_1, w_2, w_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Matrix  $[\Phi]_C$  sowie die Basiswechselmatrix  ${}_B[id]_C$  an. *5 Punkte*
- b) Ist  $\Phi$  ausgeartet? (Begründung.) *1 Punkt*
- c) Ist  $\Phi$  positiv definit? (Begründung.) *1 Punkt*

**Aufgabe 10.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Matrix  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  sei definiert durch  $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .

*5 Punkte*

# 1. Halbklausur zur Linearen Algebra I (20. 12. 96)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 51 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Auf der Menge  $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$  definieren wir eine Verknüpfung  $\circ$  durch  $a \circ b = (a - 1) \cdot (b - 1) + 1$  für  $a, b \in M$ .

- Zeigen Sie, daß  $\circ$  assoziativ ist. (Hinweis: Multiplizieren Sie dabei die Klammerausdrücke nicht aus.)
- Gibt es in  $M$  ein neutrales Element bezüglich  $\circ$ ?
- Ist  $M$  eine Gruppe?

6 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Im Vektorraum  $V = K^2$  über einem Körper  $K$  sei die Teilmenge  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a + b = a^2 \right\}$  gegeben. Untersuchen Sie, ob  $M$  ein Teilraum von  $V$  ist

- für den Fall  $K = \mathbb{Z}_2$ ,
- für den Fall  $K = \mathbb{Z}_3$ .

4 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Welche der folgenden Abbildungen von  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  sind linear?

$$(a) \quad \varphi_1 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \varphi_2 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 + x_2 \\ 2 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils eine Basis von Kern  $\varphi_i$  und von Bild  $\varphi_i$ , wenn  $\varphi_i$  linear ist. 9 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Auf  $\mathbb{Z}$  sei die Relation  $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq 2b \}$  gegeben. Untersuchen Sie, ob  $R$  reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung)

3 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{19}$  sei das Element  $a = \bar{9}$  gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der in den Hausaufgaben geübten Methode, also ohne  $a$  zu potenzieren und ohne euklidischen Algorithmus,

- das Element  $a^7$ ,
- das Element  $a^{-1}$ .

4 Punkte

---



**Aufgabe 6.**

In  $V = \mathbb{R}^3$  seien die Vektoren  $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  und  $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  sowie der Teilraum  $T = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$  gegeben. Zeigen Sie, daß die Folge der Restklassen  $(T + X, T + Y)$  linear unabhängig ist.

6 Punkte

**Aufgabe 7.**

Invertieren Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.

5 Punkte

**Aufgabe 8.**

Im Spaltenraum  $\mathbb{R}^3$  seien die Vektoren  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  und  $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  gegeben. Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\varphi(X) = Y$ ,  $\varphi(Y) = X$  und  $\varphi(Z) = Z$ ? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? (Auf die Begründung kommt es an.)

6 Punkte

**Aufgabe 9.**

In  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  seien die Funktionen  $f_1, f_2, g_1$  und  $g_2$  gegeben durch

$$f_1(x) = 2e^{3x} - e^{-2x}, \quad f_2(x) = -e^{3x} + e^{-2x}, \quad g_1(x) = e^{3x}, \quad g_2(x) = e^{-2x}.$$

Wir betrachten den Teilraum  $V = \langle f_1, f_2 \rangle$ . Offensichtlich sind  $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$  und  $\mathcal{B} = (g_1, g_2)$  Basen von  $V$ , und es gibt zwei lineare Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $V$  in  $V$  mit  $\varphi(f) = f'$  und  $\psi(f) = f^{(19)}$  (neunzehnte Ableitung von  $f$ ) für  $f \in V$  (nicht zu beweisen). Berechnen Sie

- die Basiswechselmatrizen  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$  sowie die Abbildungsmatrizen  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ ,
- die Abbildungsmatrizen  ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$ . (Hier genügt es, wenn Sie die großen Zahlen in den Matrizen als Summen von Potenzen schreiben.)

8 Punkte

## 2. Halbklausur zur Linearen Algebra I (15. 2. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 49 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

In  $V = \mathbb{R}^3$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von  $\langle T_1, T_2 \rangle$  und eine Basis von  $T_1 \cap T_2$ . 6 Punkte

---

### Aufgabe 2.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Beweisen Sie: Ist  $\varphi$  ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von  $V$ , so ist  $\dim V = \infty$ . 4 Punkte

---

### Aufgabe 3.

- Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten lösbar? (Antwort mit Beweis)
- Wie viele Elemente kann ein Körper haben, über dem es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt? Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Nur aufzählen, ohne Beweis)
- Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten (über einem geeigneten Körper), das genau 64 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis) 4 Punkte

---

### Aufgabe 4.

Es sei  $\pi$  die durch 

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	7	8	11	10	9	12	3	2	6	5	1	4

 gegebene Permutation auf der Menge  $M = \{1, 2, \dots, 12\}$ .

- Schreiben Sie  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  jeweils als Produkt ziffernfremder Zykeln.
  - Geben Sie die Bahnen auf  $M$  unter  $\pi$  an.
  - Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.
  - Zeigen Sie, daß man  $\pi$  nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben kann.
  - Berechnen Sie die Ordnung von  $\pi$ .
  - Wie viele Elemente der Gruppe  $S_{12}$  haben die gleiche Zykelnstruktur wie  $\pi$ ? (Sie brauchen das Ergebnis nicht auszumultiplizieren, müssen es aber begründen.) 8 Punkte
-

**Aufgabe 5.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  mit Hilfe des Entwick-

lungssatzes. Entwickeln Sie dabei  $A$  und alle vorkommenden Unterdeterminanten jeweils nach der ersten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen und keine Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten.) 3 Punkte

**Aufgabe 6.**

Es sei  $\mathbb{Z}_2[x]$  der Polynomring über  $\mathbb{Z}_2$  und  $P(\mathbb{Z}_2)$  der Ring aller Polynomabbildungen von  $\mathbb{Z}_2$  in  $\mathbb{Z}_2$ , und es sei  $\varepsilon$  der Homomorphismus von  $\mathbb{Z}_2[x]$  auf  $P(\mathbb{Z}_2)$ , der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_2[x]$$

die durch

$$\bar{f}: k \mapsto a_0 + a_1k + \dots + a_nk^n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_2$$

definierte Polynomabbildung  $\bar{f} \in P(\mathbb{Z}_2)$  zuordnet. Weiter sei

$$g = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \quad \text{und} \quad G = \{f \cdot g \mid f \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq \mathbb{Z}_2[x].$$

Beweisen Sie: Es ist  $G = \text{Kern } \varepsilon$  (also gleich  $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(\mathbb{Z}_2)\}$ ).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst  $G \subseteq \text{Kern } \varepsilon$  und dann  $\text{Kern } \varepsilon \subseteq G$ .

9 Punkte

**Aufgabe 7.**

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$  und ihre Vielfachheiten.
- (b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $A$  den zugehörigen Eigenraum.
- (c) Berechnen Sie eine Matrix  $T \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ , so daß  $T^{-1}AT$  Diagonalgestalt hat.

7 Punkte

**Aufgabe 8.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $T \leq V$ . Geben Sie (jeweils ohne Beweis) eine Definition an für

- (a) den Dualraum  $V^*$  von  $V$ ,
- (b) den Annihilator  $\text{An}(T)$  in  $V^*$ ,
- (c) die zu  $\mathcal{B}$  duale Basis von  $V^*$ .

3 Punkte

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \leq V$ . Berechnen Sie den Annihilator von  $T$  im Dual-

raum  $V^*$  von  $V$ . Stellen Sie dabei die Elemente  $\varphi$  aus  $\text{An}(T)$  durch ihre Abbildungsmatrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$  bezüglich der Standardbasen  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}$  dar. (Wichtig ist eine ausreichende Erläuterung Ihrer Rechnung.) 5 Punkte

# Semesterklausur zur Linearen Algebra I (15. 2. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 16 gegebenen Aufgaben für insgesamt 84 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Auf der Menge  $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  der positiven geraden Zahlen definieren wir eine Verknüpfung  $\circ$  durch  $a \circ b = \frac{a \cdot b}{2}$  für alle  $a, b \in M$ .

- (a) Ist  $\circ$  assoziativ?
- (b) Gibt es in  $M$  ein neutrales Element bezüglich  $\circ$ ? Wenn ja, welches?
- (c) Ist  $(M, \circ)$  eine Gruppe?

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

- (a) Ist  $M_1 = \{f \in V \mid f(3) + f(5) = f(8)\}$  ein Teilraum von  $V$ ?
- (b) Ist  $M_2 = \{f \in V \mid f(2) \cdot f(4) = f(8)\}$  ein Teilraum von  $V$ ?

Antwort jeweils mit Begründung.

4 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $\varphi$  die durch  $\varphi \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}$  gegebene Abbildung von  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist.
- (b) Berechnen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$ .
- (c) Berechnen Sie eine Basis von Bild  $\varphi$ .

6 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Es sei  $V$  ein 2-dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{(X, Y) \in V \times V \mid (X, Y) \text{ ist linear abhängig}\}$$

definierte Relation auf  $V$  reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung)

4 Punkte

---

**Aufgabe 5.**

Im dreidimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V = K^3$  seien Vektoren  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  gegeben, so daß jede der Folgen  $(X_1, X_2)$  und  $(Y_1, Y_2)$  linear unabhängig ist. Wir setzen  $T = \langle X_1, X_2 \rangle$  und betrachten im Restklassenraum  $V/T$  die Folge  $(R_1, R_2)$  der Restklassen  $R_1 = T + Y_1$  und  $R_2 = T + Y_2$ . Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (Auf die Begründung Ihrer Antwort kommt es an.)

- (a)  $(R_1, R_2)$  ist linear unabhängig.
- (b)  $(R_1, R_2)$  ist linear abhängig.
- (c) Beides kann vorkommen, es hängt von der Wahl der Vektoren ab. 4 Punkte

**Aufgabe 6.**

Für verschiedene Körper  $K$  sei jeweils der Vektorraum  $V = K^3$  gegeben und darin die Vektoren

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für welche Körper  $K$  gibt es zu jeder Wahl von Vektoren  $Y_1, Y_2, Y_3 \in V$  eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit  $\varphi(X_i) = Y_i$  für  $i = 1, 2, 3$ ? Antwort mit Beweis.

Hinweis: Beachten Sie die Charakteristik von  $K$ . 6 Punkte

**Aufgabe 7.**

In  $V = \mathbb{R}^2$  seien die Basen  $\mathcal{B} = (B_1, B_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  und  $\mathcal{C} = (C_1, C_2) = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$  gegeben.

- (a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ .
- (b) Wir nehmen weiter an, die obigen Basisvektoren  $B_1$  und  $B_2$  seien Eigenvektoren eines Endomorphismus  $\varphi$  von  $V$  mit den zugehörigen Eigenwerten  $c_1 = 5$  und  $c_2 = -5$ . Geben Sie die Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$  an.
- (c) Berechnen Sie aus den unter (a) und (b) berechneten Matrizen die Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  und dann die Abbildungsmatrizen  ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$  für  $\psi = \varphi^{11}$ . (Soweit darin hohe Potenzen von Zahlen vorkommen, brauchen Sie diese nicht auszumultiplizieren.) 8 Punkte

**Aufgabe 8.**

In  $V = \mathbb{R}^3$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von  $\langle T_1, T_2 \rangle$  und eine Basis von  $T_1 \cap T_2$ . 6 Punkte

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Beweisen Sie: Ist  $\varphi$  ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von  $V$ , so ist  $\dim V = \infty$ . 4 Punkte

**Aufgabe 10.**

- (a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten lösbar? (Antwort mit Beweis)
- (b) Wie viele Elemente kann ein Körper haben, über dem es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt? Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Nur aufzählen, ohne Beweis)
- (c) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten (über einem geeigneten Körper), das genau 64 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis) 4 Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\pi$  die durch 
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline i\pi & 7 & 8 & 11 & 10 & 9 & 12 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{array}$$
 gegebene Permutation auf der Menge  $M = \{1, 2, \dots, 12\}$ .

- (a) Schreiben Sie  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  jeweils als Produkt ziffernfremder Zyklen.
- (b) Geben Sie die Bahnen auf  $M$  unter  $\pi$  an.
- (c) Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.
- (d) Zeigen Sie, daß man  $\pi$  nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben kann.
- (e) Berechnen Sie die Ordnung von  $\pi$ .
- (f) Wie viele Elemente der Gruppe  $S_{12}$  haben die gleiche Zyklenstruktur wie  $\pi$ ? (Sie brauchen das Ergebnis nicht auszumultiplizieren, müssen es aber begründen.) 8 Punkte

**Aufgabe 12.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  mit Hilfe des Entwick-

lungssatzes. Entwickeln Sie dabei  $A$  und alle vorkommenden Unterdeterminanten jeweils nach der ersten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen und keine Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten.) 3 Punkte

**Aufgabe 13.**

Es sei  $\mathbb{Z}_2[x]$  der Polynomring über  $\mathbb{Z}_2$  und  $P(\mathbb{Z}_2)$  der Ring aller Polynomabbildungen von  $\mathbb{Z}_2$  in  $\mathbb{Z}_2$ , und es sei  $\varepsilon$  der Homomorphismus von  $\mathbb{Z}_2[x]$  auf  $P(\mathbb{Z}_2)$ , der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_2[x]$$

die durch

$$\bar{f}: k \mapsto a_0 + a_1k + \dots + a_nk^n \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}_2$$

definierte Polynomabbildung  $\bar{f} \in P(\mathbb{Z}_2)$  zuordnet. Weiter sei

$$g = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \quad \text{und} \quad G = \{f \cdot g \mid f \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq \mathbb{Z}_2[x].$$

Beweisen Sie: Es ist  $G = \text{Kern } \varepsilon$  (also gleich  $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(\mathbb{Z}_2)\}$ ).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst  $G \subseteq \text{Kern } \varepsilon$  und dann  $\text{Kern } \varepsilon \subseteq G$ .

9 Punkte

**Aufgabe 14.**

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$  und ihre Vielfachheiten.
- Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $A$  den zugehörigen Eigenraum.
- Berechnen Sie eine Matrix  $T \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ , so daß  $T^{-1}AT$  Diagonalgestalt hat.

7 Punkte

**Aufgabe 15.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $T \leq V$ . Geben Sie (jeweils ohne Beweis) eine Definition an für

- den Dualraum  $V^*$  von  $V$ ,
- den Annihilator  $\text{An}(T)$  in  $V^*$ ,
- die zu  $\mathcal{B}$  duale Basis von  $V^*$ .

3 Punkte

**Aufgabe 16.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \leq V$ . Berechnen Sie den Annihilator von  $T$  im Dual-

raum  $V^*$  von  $V$ . Stellen Sie dabei die Elemente  $\varphi$  aus  $\text{An}(T)$  durch ihre Abbildungsmatrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$  bezüglich der Standardbasen  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}$  dar. (Wichtig ist eine ausreichende Erläuterung Ihrer Rechnung.)

5 Punkte

# 1. Ersatzhalbklausur zur Linearen Algebra I (11. 4. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 39 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Auf der Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen definieren wir eine Verknüpfung  $\circ$  durch

$$a \circ b = a + b + 3 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ist  $(\mathbb{Z}, \circ)$  eine Gruppe? (Antwort mit Beweis.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $T$  ein echter Teilraum von  $V$  (also  $T \leq V$  und  $T \neq V$ ) und  $W = \text{Hom}(V, V)$ .

(a) Ist  $M_1 = \{\varphi \in W \mid T \leq \text{Kern } \varphi\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

(b) Ist  $M_2 = \{\varphi \in W \mid \text{Kern } \varphi \leq T\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!)

3 + 3 = 6 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \mathbb{Z}_2^3$  der 3-dimensionale Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  mit 2 Elementen. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{(X, Y) \in V \times V \mid X + Y = 0 \in V\}$$

definierte Relation auf  $V$  reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist.

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!)

1 + 1 + 1 = 3 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein konkretes Gegenbeispiel) jeweils die folgenden Behauptungen.

(a) Ist  $R$  ein Ring und sind  $a$  und  $b$  Nullteiler von  $R$ , so ist auch  $a + b$  ein Nullteiler von  $R$ .

(b) Ist  $R$  ein Ring und sind  $a$  und  $b$  Nullteiler von  $R$ , so ist auch  $a \cdot b$  ein Nullteiler von  $R$ .

3 + 3 = 6 Punkte

---



**Aufgabe 5.**

Es sei  $V \leq \mathbb{R}[x]$  der Vektorraum aller Polynome über  $\mathbb{R}$  vom Grad  $\leq 3$ , und es sei

$$T = \langle x^3 + x - 2, 2x^3 - x^2 - 1, 3x^3 - 2x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von  $V/T$ . (Eine ausreichende Erläuterung der Rechenschritte ist wichtig. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.) 5 Punkte

**Aufgabe 6.**

Es sei  $K$  ein beliebiger Körper und  $V$  ein 3-dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $(B_1, B_2, B_3)$ . Wir betrachten die Teilräume  $T_1 = \langle B_1 \rangle$  und  $T_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$  von  $V$ . Es sei

$$F = \{ \varphi \in \text{Hom}(V, V) \mid \varphi(T_1) \leq T_1 \text{ und } \varphi(T_2) \leq T_2 \}$$

die Menge aller linearer Abbildungen von  $V$  nach  $V$ , die  $T_1$  und  $T_2$  jeweils in sich abbilden.

(a) Zeigen Sie, daß  $F$  ein Teilraum von  $\text{Hom}(V, V)$  ist.

(b) Welche Dimension hat  $F$ ? (Antwort mit Begründung.)

2 + 4 = 6 Punkte

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Durch die Basiswechselmatrix

$${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und die Abbildungsmatrix } {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ seien eine weitere Basis}$$

$\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ .

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ .

(c) Kann man mit Hilfe der oben genannten Matrizen das Bild  $\varphi(X)$  des Vektors  $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$  aus  $V$  berechnen?

(Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?)

2 + 2 + 2 = 6 Punkte

**Aufgabe 8.**

In  $V = \mathbb{Z}_5^3$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\rangle$  gegeben.

Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von  $\langle T_1, T_2 \rangle$  und eine Basis von  $T_1 \cap T_2$ . (Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz.) 4 Punkte

## 2. Ersatzhalbklausur zur Linearen Algebra I (11. 4. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 6 gegebenen Aufgaben für insgesamt 45 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

---

### Aufgabe 1.

- (a) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das genau 16 Lösungen hat?
- (b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 32 Lösungen hat?

(Antwort jeweils mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.)

Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.)

$3 + 3 = 6$  Punkte

---

### Aufgabe 2.

Es sei  $\pi$  die durch  $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline i\pi & 9 & 5 & 1 & 7 & 12 & 6 & 10 & 11 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{array}$  gegebene Permutation aus  $S_{12}$ , und es sei  $\rho = (1, 11, 4, 8)(2, 9, 3)(5, 12, 7, 10, 6) \in S_{12}$ .

- (a) Schreiben Sie  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  jeweils als Produkt ziffernfremder Zykeln.
- (b) Berechnen Sie die Permutationen  $\pi \cdot \rho$  und  $\rho \cdot \pi$  (in Zykelschreibweise).
- (c) Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.
- (d) Kann man  $\rho$  als Produkt von Dreierzykeln schreiben? (Antwort mit Begründung.)
- (e) Berechnen Sie die Ordnung von  $\pi$ .

$1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$  Punkte

---

### Aufgabe 3.

Es sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und  $\varphi$  der durch  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definierte Endomorphismus von  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre Vielfachheiten.
- (b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  den zugehörigen Eigenraum.
- (c) Berechnen Sie eine Fächerbasis  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}^3$  bezüglich  $\varphi$  sowie die zugehörige Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ .

$3 + 1 + 5 = 9$  Punkte

---

**Aufgabe 4.**

Gilt für alle Paare  $(\varphi, \psi)$  von linearen Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , daß

- (a)  $\Phi_1$  mit  $\Phi_1(X, Y) = \varphi(X) + \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist,
- (b)  $\Phi_2$  mit  $\Phi_2(X, Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist?

(Antwort jeweils mit Beweis oder konkretem Gegenbeispiel.

Quantoren nicht vergessen!)

*3 + 3 = 6 Punkte*

**Aufgabe 5.**

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  und  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  eine Basis

von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  gegeben.

- (a) Berechnen Sie das Radikal von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)
- (b) Ist  $\Phi$  ausgeartet? (Antwort mit Begründung.)

*5 + 1 = 6 Punkte*

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch

die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$  gegeben.

- (a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$  sowie die Matrix  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an. (Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)
- (b) Ist  $\Phi$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.)
- (c) Bestimmen Sie Index und Signatur von  $\Phi$ . (Mit Erläuterung.)

- (d) Durch die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  sei eine weitere Basis  $\mathcal{A}$  von  $V$  gegeben. Berechnen Sie die Matrix  ${}_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{A}}$  von  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{A}$ . *7 + 1 + 2 + 2 = 12 Punkte*

# Ersatzklausur zur Linearen Algebra I (11.4.97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 14 gegebenen Aufgaben für insgesamt 85 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Auf der Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen definieren wir eine Verknüpfung  $\circ$  durch

$$a \circ b = a + b + 3 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ist  $(\mathbb{Z}, \circ)$  eine Gruppe? (Antwort mit Beweis.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $T$  ein echter Teilraum von  $V$  (also  $T \leq V$  und  $T \neq V$ ) und  $W = \text{Hom}(V, V)$ .

(a) Ist  $M_1 = \{\varphi \in W \mid T \leq \text{Kern } \varphi\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

(b) Ist  $M_2 = \{\varphi \in W \mid \text{Kern } \varphi \leq T\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!)

3 + 3 = 6 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \mathbb{Z}_2^3$  der 3-dimensionale Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  mit 2 Elementen. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{(X, Y) \in V \times V \mid X + Y = 0 \in V\}$$

definierte Relation auf  $V$  reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist.

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!)

1 + 1 + 1 = 3 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein konkretes Gegenbeispiel) jeweils die folgenden Behauptungen.

(a) Ist  $R$  ein Ring und sind  $a$  und  $b$  Nullteiler von  $R$ , so ist auch  $a + b$  ein Nullteiler von  $R$ .

(b) Ist  $R$  ein Ring und sind  $a$  und  $b$  Nullteiler von  $R$ , so ist auch  $a \cdot b$  ein Nullteiler von  $R$ .

3 + 3 = 6 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Es sei  $V \leq \mathbb{R}[x]$  der Vektorraum aller Polynome über  $\mathbb{R}$  vom Grad  $\leq 3$ , und es sei

$$T = \langle x^3 + x - 2, 2x^3 - x^2 - 1, 3x^3 - 2x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von  $V/T$ . (Eine ausreichende Erläuterung der Rechenschritte ist wichtig. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

5 Punkte

---

## Aufgabe 6.

Es sei  $K$  ein beliebiger Körper und  $V$  ein 3-dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $(B_1, B_2, B_3)$ . Wir betrachten die Teilräume  $T_1 = \langle B_1 \rangle$  und  $T_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$  von  $V$ . Es sei

$$F = \{\varphi \in \text{Hom}(V, V) \mid \varphi(T_1) \leq T_1 \text{ und } \varphi(T_2) \leq T_2\}$$

die Menge aller linearer Abbildungen von  $V$  nach  $V$ , die  $T_1$  und  $T_2$  jeweils in sich abbilden.

(a) Zeigen Sie, daß  $F$  ein Teilraum von  $\text{Hom}(V, V)$  ist.

(b) Welche Dimension hat  $F$ ? (Antwort mit Begründung.)

2 + 4 = 6 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Durch die Basiswechselmatrix

$${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und die Abbildungsmatrix } {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ seien eine weitere Basis}$$

$\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\text{id}_{\mathcal{B}}$ .

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ .

(c) Kann man mit Hilfe der oben genannten Matrizen das Bild  $\varphi(X)$  des Vektors  $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$  aus  $V$  berechnen?

(Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?)

$2 + 2 + 2 = 6$  Punkte

**Aufgabe 8.**

In  $V = \mathbb{Z}_5^3$  seien die Teilräume  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\rangle$  gegeben.

Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von  $\langle T_1, T_2 \rangle$  und eine Basis von  $T_1 \cap T_2$ . (Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz.) 4 Punkte

**Aufgabe 9.**

(a) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das genau 16 Lösungen hat?

(b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 32 Lösungen hat?

(Antwort jeweils mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.

Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.)

$3 + 3 = 6$  Punkte

**Aufgabe 10.**

Es sei  $\pi$  die durch  $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline i\pi & 9 & 5 & 1 & 7 & 12 & 6 & 10 & 11 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{array}$  gegebene Permutation

aus  $S_{12}$ , und es sei  $\rho = (1, 11, 4, 8)(2, 9, 3)(5, 12, 7, 10, 6) \in S_{12}$ .

(a) Schreiben Sie  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  jeweils als Produkt ziffernfremder Zykeln.

(b) Berechnen Sie die Permutationen  $\pi \cdot \rho$  und  $\rho \cdot \pi$  (in Zykelschreibweise).

(c) Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.

(d) Kann man  $\rho$  als Produkt von Dreierzykeln schreiben? (Antwort mit Begründung.)

(e) Berechnen Sie die Ordnung von  $\pi$ .

$1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$  Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und  $\varphi$  der durch  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definierte Endomorphismus von  $\mathbb{R}^3$ .

- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre Vielfachheiten.
- Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  den zugehörigen Eigenraum.
- Berechnen Sie eine Fächerbasis  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}^3$  bezüglich  $\varphi$  sowie die zugehörige Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ .

*3 + 1 + 5 = 9 Punkte*

**Aufgabe 12.**

Gilt für alle Paare  $(\varphi, \psi)$  von linearen Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , daß

- $\Phi_1$  mit  $\Phi_1(X, Y) = \varphi(X) + \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist,
- $\Phi_2$  mit  $\Phi_2(X, Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y)$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist?

(Antwort jeweils mit Beweis oder konkretem Gegenbeispiel.

Quantoren nicht vergessen!)

*3 + 3 = 6 Punkte*

**Aufgabe 13.**

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  und  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  eine Basis

von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  gegeben.

- Berechnen Sie das Radikal von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)
- Ist  $\Phi$  ausgeartet? (Antwort mit Begründung.)

*5 + 1 = 6 Punkte*

**Aufgabe 14.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch

die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$  gegeben.

- Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$  sowie die Matrix  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an. (Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)
- Ist  $\Phi$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.)
- Bestimmen Sie Index und Signatur von  $\Phi$ . (Mit Erläuterung.)

(d) Durch die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  sei eine weitere Basis  $\mathcal{A}$  von  $V$  gegeben. Berechnen Sie die Matrix  ${}_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{A}}$  von  $\Phi$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

*7 + 1 + 2 + 2 = 12 Punkte*

# Aufgabenblatt 1 zur Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

## Aufgabe 1.

Welche Elemente des Restklassenrings  $\mathbb{Z}_{128} = \mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$  sind Nullteiler?

Geben Sie nicht eine Liste aller dieser Elemente, sondern eine Beschreibung, die es gestattet, durch Betrachtung einer Zahl  $z \in \mathbb{Z}$  sofort zu entscheiden, ob  $\bar{z} = 128\mathbb{Z} + z$  ein Nullteiler ist oder nicht.

(Mit Begründung.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Es sei  $V$  ein 3-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $X \in V$ .

Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W := \text{Hom}(V, V)$  der linearen Abbildungen von  $V$  nach  $V$ .

(a) Ist  $M_1 = \{\varphi \in W \mid X \in \text{Kern } \varphi\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

(b) Ist  $M_2 = \{\varphi \in W \mid \langle X \rangle = \text{Kern } \varphi\}$  ein Teilraum von  $W$ ?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!)

3 + 3 = 6 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper. Für jedes  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei  $V_n$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$ . Wir definieren jeweils auf  $V_n$  eine Relation  $R_n$  durch

$$R_n = \{(X, Y) \in V_n \times V_n \mid (X, Y) \text{ ist linear abhängig}\}.$$

(a) Für welche  $n$  ist  $R_n$  reflexiv, für welche nicht?

(b) Für welche  $n$  ist  $R_n$  symmetrisch, für welche nicht?

(c) Für welche  $n$  ist  $R_n$  transitiv, für welche nicht?

Antwort jeweils mit Beweis. (Quantoren nicht vergessen!)

1 + 1 + 2 = 4 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^4$  sei der Teilraum  $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  gegeben. Berechnen Sie eine Basis von  $V/T$ .

(Formulierung und Begründung sind wichtig.)

4 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  seien zwei Basen  $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$  und  $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$  mit der Basiswechselmatrix

$${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ gegeben. Es sei } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Wir betrachten den durch  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$  definierten Endomorphismus  $\varphi$  von  $V$  und das durch  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$  definierte Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$ .

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$  sowie die Matrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ .

(b) Was bedeutet es für die Basisvektoren  $B_1$  und  $B_2$ , daß die Komponente  $[{}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}]_{12}$  von  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$  (also der Eintrag in der ersten Zeile, zweiten Spalte von  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ ) gleich 0 ist?

(c) Was bedeutet es für den Basisvektor  $B_2$ , daß die Komponente  $[{}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}]_{12}$  von  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$  gleich 0 ist?

3 + 1 + 1 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 6.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V = K^{2 \times 2}$  der Vektorraum der  $2 \times 2$  Matrizen über  $K$  und  $\varphi: V \rightarrow K$  die

Abbildung, die jede Matrix  $[a_{ij}]$  aus  $V$  auf die Summe  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}$  ihrer Einträge abbildet.

(a) Zeigen Sie:  $\varphi$  ist ein lineares Funktional von  $V$ .

(b) Berechnen Sie eine Basis von Bild  $\varphi$ .

(c) Berechnen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$ .

# Aufgabenblatt 2 zur Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

## Aufgabe 7.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 7 Unbekannten über einem beliebigen Körper hat mehr als 10 Lösungen.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.)

5 Punkte

---

## Aufgabe 8.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein 7-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $W$  ein 3-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

Jede Restklasse von Kern  $\varphi$  enthält mehr als 10 Elemente.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.)

5 Punkte

---

## Aufgabe 9.

Invertieren Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten

Verfahrens. (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix  $A^{-1}$  explizit angeben.)

5 Punkte

---

## Aufgabe 10.

Es sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und  $\varphi$  der durch  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definierte Endomorphismus von  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre Vielfachheiten.
- (b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $\varphi$  den zugehörigen Eigenraum.
- (c) Berechnen Sie eine Fächerbasis  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}^3$  bezüglich  $\varphi$  sowie die zugehörige Abbildungsmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ .

3 + 1 + 5 = 9 Punkte

---

## Aufgabe 11.

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$  und  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  eine Basis von  $V$ . Berechnen Sie den Annihilator des Teilraums

$$T = \langle p_0 + 2p_1 + p_2 + 3p_3, 2p_0 + 3p_1 + p_2 + 5p_3 \rangle \leq V$$

im Dualraum  $V^*$  von  $V$ . (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

5 Punkte

---

## Aufgabe 12.

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  gegeben.

- (a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Basiswechsellmatrix  ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$  sowie die Matrix  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an.

(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

- (b) Ist  $\Phi$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

- (c) Bestimmen Sie Index und Signatur von  $\Phi$ . (Mit Erläuterung.)

7 + 1 + 2 = 10 Punkte



Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller  $2 \times 2$  Matrizen über  $\mathbb{R}$ .

- (a) Ist  $M_1 = \{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$  ein Teilraum von  $V$ ?
- (b) Ist  $M_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$  ein Teilraum von  $V$ ?

Antwort jeweils mit Begründung.

*3 + 2 = 5 Punkte*

(Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalglieder.)

---

**Aufgabe 2.**

Es sei  $V \leq \mathbb{R}[x]$  der Vektorraum aller Polynome über  $\mathbb{R}$  vom Grad  $\leq 3$ , und es sei

$$T = \langle x^3 + x^2 + 1, x^2 + x + 2, 2x^3 + x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von  $V/T$ .

Erläutern Sie Ihre Rechnung und formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.

*5 Punkte*

---

**Aufgabe 3.**

Über dem Körper  $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  mit 5 Elementen seien der Vektorraum  $V = \mathbb{Z}_5^3$  sowie die Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ und } T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-}$$

Algorithmus eine Basis von  $\langle T_1, T_2 \rangle$  und eine Basis von  $T_1 \cap T_2$ .

Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz.

*4 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

- (a) Beweisen Sie: Es gibt höchstens vier verschiedene (also nicht isomorphe) Körper, über denen es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt.
- (b) Über welchen dieser vier Körper gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 64 Lösungen hat?

Anleitung: Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für ein solches Gleichungssystem an, oder beweisen Sie, daß es kein solches Gleichungssystem gibt.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.)

*4 + 4 = 8 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  seien zwei Basen  $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$  und  $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$  mit der Basiswechselmatrix

$${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ gegeben. Es sei } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Wir betrachten den durch  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$  definierten Endomorphismus  $\varphi$  von  $V$  und das durch  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$  definierte Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$ .

- (a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$  sowie die Matrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  und  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ .
- (b) Welche Eigenschaft des Basisvektors  $C_1$  (bzw.  $C_2$ ) kann man aus den Nullen in  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  ablesen?
- (c) Welche Eigenschaft des Basisvektors  $B_1$  (bzw.  $B_2$ ) kann man aus den Nullen in  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$  ablesen?
- (d) Welche Eigenschaft der Basisvektoren  $C_1$  und  $C_2$  kann man aus den Nullen in  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  ablesen?
- (e) Kann man das Bild  $\varphi(X)$  des Vektors  $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$  mit Hilfe der oben genannten Matrizen berechnen? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

*4 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^n$ . Beweisen Sie:

(a) Ist  $n$  gerade, so gibt es einen Endomorphismus  $\varphi$  von  $V$  mit Kern  $\varphi = \text{Bild } \varphi$ .  
(Konkretes Beispiel mit Begründung.)

(b) Ist  $n$  ungerade, so gibt es keinen solchen Endomorphismus.

*5 + 3 = 8 Punkte*

---

**Aufgabe 7.**

Invertieren Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ . (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche

elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix  $A^{-1}$  explizit angeben.)

Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche (das Ergebnis ist ganzzahlig).

*5 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ . Berechnen Sie

(a) die Eigenwerte von  $A$  und ihre Vielfachheiten,

(b) zu jedem Eigenwert von  $A$  den zugehörigen Eigenraum,

(c) eine Matrix  $T \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ , so daß  $T^{-1}AT$  Diagonalgestalt hat.

*3 + 3 + 1 = 7 Punkte*

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch die

Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz. Beachten Sie dabei, daß  $\mathcal{B}$  nicht die Standardbasis von  $V$  zu sein braucht.)

(b) Ist  $\Phi$  ausgeartet? (Antwort mit Begründung.)

*5 + 1 = 6 Punkte*

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  eine Basis von  $V$ . Ein Skalarprodukt  $\Phi$  auf  $V$  sei durch die

Matrix  ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$  gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ , und geben Sie die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{C}}\text{id}_{\mathcal{C}}$  sowie die Matrix  ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an.

(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist  $\Phi$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von  $\Phi$ . (Mit Erläuterung.)

*7 + 1 + 2 = 10 Punkte*

---

# Scheinklausur zur Linearen Algebra I (13. 2. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 54 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Gegeben seien zwei Vektorräume  $V$  und  $W$ , eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  und zwei Vektoren  $v_1, v_2 \in V$ . Zeigen Sie: Ist  $v_1 \neq v_2$  und  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$ , so ist  $(v_1, v_2)$  linear unabhängig. *5 Punkte*

---

## Aufgabe 2.

Es seien  $U$  und  $W$  zwei 3-dimensionale Teilräume eines 4-dimensionalen Vektorraums. Welche Dimension hat  $U \cap W$  mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie ein konkretes Beispiel für diesen Fall an. *3 Punkte*

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \mathbb{F}_2^{25 \times 1}$ . Welche der beiden folgenden Teilmengen von  $V$  sind Teilräume?

- (a)  $G = \{v \in V \mid \text{die Anzahl der Einsen in } v \text{ ist gerade}\}$ ,
- (b)  $U = \{v \in V \mid \text{die Anzahl der Einsen in } v \text{ ist ungerade}\}$ .

Empfehlung: Nicht lange rechnen, sondern kurz umformulieren und beweisen.

*4 Punkte*

---

## Aufgabe 4.

Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^4$  seien die Teilräume

$$U = \langle [1, 2, 1, 4], [-1, 3, 4, 1], [1, -1, -2, 1] \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle [1, 1, 4, 1], [1, 2, 3, 3] \rangle$$

gegeben. Berechnen Sie

- (a) je eine Basis für  $U$  und  $V/U$ ,
- (b) je eine Basis für  $U \cap W$  und  $U + W$ .

Erläutern Sie jeweils die Rechnung, und geben Sie die Basen konkret an.

*4 + 4 = 8 Punkte*

---

## Aufgabe 5.

In  $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$  seien die Basen  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  und  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ , der Vektor  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

und die durch  $\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a \end{bmatrix}$  definierte lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gegeben. Bestimmen Sie

- (a) die Basiswechselmatrizen  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$  und  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ ,
- (b) die Abbildungsmatrizen  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  und  $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ ,
- (c) den Koordinatenvektor  $\kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(v))$ .

*3 + 3 + 2 = 8 Punkte*

---

**Aufgabe 6.**

Untersuchen Sie jeweils für  $n = 2^{20}$  und für  $n = 2^{25}$ , ob es ein nicht homogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten über einem geeigneten Körper  $K$  gibt, das genau  $n$  Lösungen hat. (Sie dürfen verwenden, daß es zu jeder Primzahlpotenz  $q$  einen Körper mit  $q$  Elementen gibt.)

Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel oder einen Gegenbeweis an.

4 Punkte

**Aufgabe 7.**

Gegeben sei die invertierbare Matrix  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

- (a) Berechnen Sie ein Polynom  $f \in \mathbb{Q}[X]$  mit der Eigenschaft  $A^{-1} = f(A)$ , und berechnen Sie damit die Matrix  $A^{-1}$ .
- (b) Es sei  $\tilde{A}$  die zu  $A$  komplementäre Matrix. Berechnen Sie  $\tilde{A}$  mit möglichst geringem Aufwand. (Erläutern Sie die Rechnung.)

5 + 2 = 7 Punkte

**Aufgabe 8.**

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 6 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  und ihre Vielfachheiten.

- (b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von  $A$  den zugehörigen Eigenraum.

3 + 3 = 6 Punkte

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}[X]$ , und es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  der durch  $\varphi(f) = Xf'$  für  $f \in V$  definierte Endomorphismus von  $V$ , wobei  $f'$  die formale Ableitung von  $f$  bedeutet, also

$$f' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \quad \text{für} \quad f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in V.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von  $\varphi$ .

Bei dieser Aufgabe, bei der kaum etwas zu rechnen ist, kommt es auf eine ausführliche und vollständige Argumentation an. Sie sollen hier zeigen, daß Sie mathematische Zusammenhänge sauber formulieren können.

9 Punkte

# Nachholklausur zur Linearen Algebra I (17. 4. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 65 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

- Bekanntlich gilt: Ist  $(v_1, v_2)$  ein linear unabhängiges Paar von Vektoren aus  $V$  und  $c \in K$ , so ist auch  $(v_1 + c v_2, v_2)$  linear unabhängig. Wie beweist man das?
- Wir nehmen nun an, es sei  $\dim_K V \geq 2$ . Zeigen Sie: Ist  $0 \neq v \in V$ , so gibt es ein linear unabhängiges Paar  $(u, w)$  von Vektoren aus  $V$  mit  $v = u + w$ . *3 + 3 = 6 Punkte*

---

## Aufgabe 2.

Durch die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  sei eine lineare Abbildung  $\varphi$  von einem

$\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Basis  $\mathcal{B}$  in einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W$  mit Basis  $\mathcal{C}$  gegeben. Bestimmen Sie die Dimensionen der Vektorräume  $V$ ,  $W$ , Bild  $\varphi$ , Kern  $\varphi$ ,  $W/\text{Bild } \varphi$  und  $V/\text{Kern } \varphi$ , und erläutern Sie dabei jeweils Ihre Rechnung. *6 Punkte*

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \mathbb{Q}^{2 \times 1}$ , es sei  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  eine Basis von  $V$ , und es sei  $\varphi$  der durch die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  gegebene Endomorphismus von  $V$ .

- Zeigen Sie:  $\varphi$  ist ein Automorphismus von  $V$ .
- Wegen (a) ist  $\mathcal{C} = (\varphi(v_2), \varphi(v_1))$  eine Basis von  $V$ . Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$  und  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ .
- Berechnen Sie mit Hilfe von (b) die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ .
- Es sei  $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \in V$ . Welchen Koordinatenvektor hat der Vektor  $\varphi(v)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ ?  
(Antwort mit Begründung.) *2 + 4 + 2 + 2 = 10 Punkte*

---

## Aufgabe 4.

Über dem Körper  $\mathbb{Q}$  sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & & + & x_4 & & = & 5 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & 3 \end{array}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus aus der Vorlesung

- eine Basis für den Lösungsraum  $L$  des zugehörigen homogenen Systems,
  - die Menge  $M$  aller Lösungen des inhomogenen Systems. *zusammen 5 Punkte*
-

**Aufgabe 5.**

Es sei  $V < \mathbb{R}[X]$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$ . In  $V$  seien die Teilräume

$$U = \langle X^3 - 9X + 11, X^3 + X^2 - 6X + 8, X^3 + 2X^2 - 3X + 5 \rangle \text{ und}$$

$$W = \langle X^3 + X^2 + 2X + 1, X^3 - X^2 + 4X \rangle$$

gegeben. Berechnen Sie eine Basis von  $U \cap W$  und eine Basis von  $U + W$ .

Erläutern Sie Ihre Rechnung (und vergewissern Sie sich am Schluß, daß die Basen, die Sie angeben, tatsächlich aus Polynomen bestehen). 5 Punkte

**Aufgabe 6.**

Es sei  $\mathbb{C}$  der Körper der komplexen Zahlen und  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ .

- Berechnen Sie  $A^{-1}$  mit dem üblichen Verfahren (also mit Hilfe elementarer Umformungen).
- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ .
- Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte, ohne irgendwelche Eigenvektoren zu berechnen. (Mit Beweis.)
- Berechnen Sie ein Polynom  $f \in \mathbb{C}[X]$  mit der Eigenschaft  $A^{-1} = f(A)$ , und berechnen Sie damit noch einmal  $A^{-1}$ , ohne (a) zu benutzen.
- Es sei  $\tilde{A}$  die zu  $A$  komplementäre Matrix. Beweisen Sie, ohne  $\tilde{A}$  auszurechnen, daß  $\tilde{A} = -A^{-1}$  ist.
- Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton und ohne irgendwelche Potenzen von  $A$  als Matrizen auszurechnen, daß  $A^4$  gleich der Einheitsmatrix  $E_3$  ist.

$3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 16$  Punkte

**Aufgabe 7.**

Es sei  $V = \mathbb{R}[X]$ , und es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  der durch  $\varphi(f) = Xf'$  für  $f \in V$  definierte Endomorphismus von  $V$ , wobei  $f'$  die formale Ableitung von  $f$  bedeutet, also

$$f' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \quad \text{für} \quad f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in V.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von  $\varphi$ .

Bei dieser Aufgabe, bei der kaum etwas zu rechnen ist, kommt es auf eine ausführliche und vollständige Argumentation an. Sie sollen hier zeigen, daß Sie mathematische Zusammenhänge sauber formulieren können. (Hinweis: Es kommt kein Induktionsbeweis vor.) 9 Punkte

**Aufgabe 8.**

Es sei  $K$  ein Körper und  $a, b \in K$  mit  $a \neq b$ . Zeigen Sie:

- Die Matrizen  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$  und  $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$  sind nicht ähnlich. (Hinweis: Bestimmen Sie etwa alle zu  $A$  ähnlichen Matrizen.)
- Die Matrizen  $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  und  $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  sind ähnlich. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß  $C$  diagonalisierbar ist.)

$4 + 4 = 8$  Punkte

# Testklausur zur Linearen Algebra I (19. 12. 97)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 7 gegebenen Aufgaben für insgesamt 52 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Wenn die Klausur eine Scheinklausur wäre, wären zum Bestehen mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Es sei  $F := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , und für  $a \in \mathbb{R}$  seien  $f_a \in F$  und  $g_a \in F$  definiert durch

$$f_a(x) = a \sin x - \frac{a}{2}, \quad g_a(x) = \sin ax \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Ist die Teilmenge  $M_1 = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  von  $F$  ein Teilraum von  $F$ ?
- (b) Ist die Teilmenge  $M_2 = \{g_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  von  $F$  ein Teilraum von  $F$ ?

Antwort jeweils mit Beweis.

3 + 2 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Antwort jeweils mit Beweis)

- (a)  $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, [a_1, a_2] \mapsto [a_1^2 - a_2, a_2^2 - a_1]$ ,
- (b)  $\psi: \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2, [a_1, a_2] \mapsto [a_1 + a_2, a_1^2 + a_2^2]$  (mit  $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

2 + 3 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V = K^4$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt einen Endomorphismus  $\varphi$  von  $V$  mit Kern  $\varphi = \text{Bild } \varphi$ .
- (b) Der Vektorraum  $K^{1997}$  besitzt keinen solchen Endomorphismus.

4 + 4 = 8 Punkte

---

## Aufgabe 4.

- (a) Es sei  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Zeigen Sie:  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  ist eine Basis von  $V$ .

Es kommt hier auf die Formulierung an: Erwartet wird ein Beweis aus vollständigen Sätzen, in dem alle logischen Zusammenhänge und Quantoren klar formuliert sind. Nicht nur Stichworte.

- (b) Weiter sei  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V$  und  $\varphi: V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(A) = TAT$  für alle  $A \in V$ . Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist.
- (c) Berechnen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$  und eine Basis von Bild  $\varphi$ .
- (d) Ergänzen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$  zu einer Basis von  $V$ . (Ohne Beweis.)

4 + 2 + 4 + 1 = 11 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Es sei  $K$  ein Körper. Beweisen Sie: Zwei endlich dimensionale Vektorräume über  $K$  sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Zur Erinnerung: Formulieren Sie die kausalen Zusammenhänge aus (Text!) und erklären Sie alle Bezeichnungen, die Sie verwenden (wie z. B.  $\varphi$  oder  $V$ ).

6 Punkte

---

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq m \leq n$ . Wie viele linear unabhängige  $m$ -Tupel von Vektoren gibt es in  $V$ ?

Antwort mit Beweis.

6 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Gegeben seien die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$  und die Basis  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  von  $V := \mathbb{Q}^{2 \times 1}$  sowie der Endomorphismus  $\varphi: V \rightarrow V, v \mapsto Av$  (das heißt,  $\varphi = \varphi_A$ ).

- Berechnen Sie die Bilder  $\varphi(v_1)$  und  $\varphi(v_2)$  sowie ihre Koordinatenvektoren  $\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi(v_1))$  und  $\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi(v_2))$ .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .
- Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so daß  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = E_2$  ist.
- Berechnen Sie die Fasern von  $v_1$  und  $v_2$ .
- Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{A}$  von  $V$ , so daß  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = E_2$  ist.

Vergessen Sie nicht den erläuternden Text.

4 + 1 + 1 + 4 + 1 = 11 Punkte

---



Aufgabenblatt 1 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (16. 3. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Es seien  $V_1$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  über  $\mathbb{Q}$ ,

$V_2$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  über  $\mathbb{R}$ ,

$V_3$  der von  $\{ [3, -1, 3, 2, 1], [4, 2, -1, 1, 3], [5, 1, 1, 2, 3] \}$  erzeugte Untervektorraum von  $\mathbb{R}^5$ ,

$V_4$  der Quotientenvektorraum  $\mathbb{R}^5/V_3$ .

- (a) Welche der Vektorräume  $V_1$  bis  $V_4$  sind isomorph, welche nicht?  
(Bei dieser Aufgabe kommt es auf vollständige Begründung und sorgfältige Argumentation an.)
- (b) Geben Sie für ein Paar  $V_i \cong V_j$  mit  $i \neq j$  einen konkreten Isomorphismus von  $V_i$  nach  $V_j$  an.  
(Erläutern Sie Ihre Rechnung.) 6 + 4 = 10 Punkte
- 

**Aufgabe 2.**

Es sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen und  $V = \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq 20\}$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 20$  über  $K$ , und es sei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl. Wie viele linear unabhängige  $n$ -Tupel von Vektoren gibt es in  $V$ ?

Finden Sie eine geschlossene Formel, und beweisen Sie sie.

7 Punkte

---

**Aufgabe 3.**

Es seien  $V = \mathbb{Q}^{1 \times 3}$  und  $W = \mathbb{Q}^{1 \times 2}$ , und es seien  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  und  $\mathcal{B}' = (v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_3, v_1 - v_2)$  Basen von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$  und  $\mathcal{C}' = (3w_1 + 2w_2, 7w_1 + 5w_2)$  Basen von  $W$ . Weiter sei  $\varphi$  die durch

die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  definierte lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$ .

- (a) Berechnen Sie die Basiswechselformen  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$  sowie  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W)$  und  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\text{id}_W)$ .
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Matrizen die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ .
- (c) Es sei  $v = v_1 + v_2 + v_3 \in V$ . Berechnen Sie die Koordinatenvektoren  $\kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(v))$  und  $\kappa_{\mathcal{C}'}(\varphi(v))$ .

Erläutern Sie Ihre Rechnung, soweit nötig.

3 + 3 + 3 = 9 Punkte

---

**Aufgabe 4.**

Welches ist die kleinste Zahl  $m$ , für die es ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und 5 Unbekannten über einem geeigneten Körper  $K$  gibt, das genau 64 Lösungen besitzt?

(Antwort mit Beweis.)

4 Punkte

---

**Aufgabe 5.**

Es sei  $V < \mathbb{R}[X]$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$ . In  $V$  seien die Teilräume

$$U = \langle X^3 + 2X^2 - X - 2, X^3 + 3X^2 - 2X + 1, X^3 + 5X^2 - 4X + 7 \rangle \text{ und}$$

$$W = \langle X^3 + X^2 + 3X - 2, 2X^3 + 3X^2 + 8X + 2 \rangle$$

gegeben. Berechnen Sie eine Basis von  $U \cap W$  und eine Basis von  $U + W$ .

Erläutern Sie Ihre Rechnung (und vergewissern Sie sich am Schluß, daß die Basen, die Sie angeben, tatsächlich aus Polynomen bestehen).

5 Punkte

---

Aufgabenblatt 2 zur  
**Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (16. 3. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

**Aufgabe 6.**

Invertieren Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -19 & -2 & 4 \\ 25 & 3 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix  $A^{-1}$  explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche. (Das Ergebnis ist ganzzahlig.) 5 Punkte

**Aufgabe 7.**

Für welche Werte des Parameters  $t \in \mathbb{R}$  ist die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 4 \\ 2 & t^2 & 5 \\ 3 & t^3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  invertierbar, für welche nicht? (Antwort mit Beweis.) 3 Punkte

**Aufgabe 8.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  mit Hilfe des Laplaceschen

Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei  $|A|$  und alle vorkommenden  $3 \times 3$ -Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Spalte. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Spalten oder Zeilen oder Anwendung der Regel von Sarrus.) 3 Punkte

**Aufgabe 9.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{1 \times 3}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  der durch  $\varphi([a, b, c]) = [2a, a + b + 2c, -b + 4c]$  definierte Endomorphismus von  $V$ .

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ .
  - (b) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre algebraischen Vielfachheiten.
  - (c) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von  $\varphi$  seinen Eigenraum und seine geometrische Vielfachheit.
- 1 + 3 + 6 = 10 Punkte

**Aufgabe 10.**

Es sei  $K$  ein Körper und  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K^{2 \times 2}$ .

- (a) Berechnen Sie die zu  $A$  komplementäre Matrix  $\tilde{A}$ . (Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern zeigen Sie, wie Sie darauf gekommen sind.)
  - (b) Zeigen Sie, daß die zu  $\tilde{A}$  komplementäre Matrix  $\tilde{\tilde{A}}$  gleich  $A$  ist.
- 3 + 1 = 4 Punkte

**Aufgabe 11.**

Es sei  $K$  ein Körper und  $a, b \in K$ . Zeigen Sie: Die Matrizen  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  und  $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$  sind ähnlich. 4 Punkte

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

**Aufgabe 1.**

Beweisen Sie: Ist  $V$  ein 4-dimensionaler Vektorraum, so gibt es in  $V$  drei 2-dimensionale Untervektorräume, so daß die Summe von je zwei dieser Untervektorräume ganz  $V$  ist. (Es kommt auf eine klare Formulierung der logischen Zusammenhänge an.) 4 Punkte

**Aufgabe 2.**

Es sei  $K = \mathbb{F}_2$  der Körper mit zwei Elementen,  $A \in K^{2 \times 5}$  und  $b \in K^{2 \times 1}$ .

- (a) Welche notwendige und hinreichende Bedingung müssen die Matrix  $A$  und die Spalte  $b$  erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  genau 8 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis.)
- (b) Wie viele verschiedene homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über  $K$ ? (Dabei bezeichnen wir zwei lineare Gleichungssysteme als verschieden, wenn die zugehörigen erweiterten Matrizen verschieden sind.)
- (c) Wie viele verschiedene nicht homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über  $K$ ?

(Es kommt jeweils auf die sorgfältige Argumentation an.)

3 + 3 + 3 = 9 Punkte

**Aufgabe 3.**

Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . In  $K^{n \times n}$  seien symmetrische Matrizen  $A$  und  $B$  gegeben, d. h., es sei  $A^t = A \in K^{n \times n}$  und  $B^t = B \in K^{n \times n}$ . Beweisen Sie: Die Matrix  $AB$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $AB = BA$  ist. 3 Punkte

**Aufgabe 4.**

Invertieren Sie (mit dem Gauß-Algorithmus) die Matrix  $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & -6 \\ 6 & -1 & 4 \\ 19 & -4 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen, Sie müssen aber am Schluß die Matrix  $A^{-1}$  explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche. (Das Ergebnis ist ganzzahlig.) 4 Punkte

**Aufgabe 5.**

Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  seien die Untervektorräume

$$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Berechnen Sie je eine Basis für  $U_1 \cap U_2$  und  $U_1 + U_2$ .

Erläutern Sie dabei den Ansatz Ihrer Rechnung, und geben Sie die Basen konkret an.

5 Punkte

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

**Aufgabe 6.**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$  mit Hilfe des Laplaceschen

Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei  $|A|$  und alle vorkommenden  $3 \times 3$ -Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten oder Anwendung der Regel von Sarrus.) *3 Punkte*

**Aufgabe 7.**

Es seien  $f, g \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $f = X^5 - 4X^4 + 4X^3 + X^2 - 9X - 6$  und  $g = X^2 - 2X - 3$ .

(a) Dividieren Sie  $f$  mit Rest durch  $g$ . (Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Berechnen Sie  $g(A)$  und  $f(A)$  für  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ . *4 + 3 = 7 Punkte*

**Für die Aufgaben 8 und 9** nehmen wir an, es sei  $V$  der Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit der Standardbasis  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ , und es sei  $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in V$ .

Weiter sei eine Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(v) = Tv$  für alle  $v \in V$ .

**Aufgabe 8.**

(a) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  linear ist.

(b) Beweisen Sie, ohne die betreffenden Polynome zu berechnen: Die charakteristischen Polynome von  $T$  und  $\varphi$  sind verschieden, aber ihre Minimalpolynome sind gleich. Bestimmen Sie dazu der Reihe nach die Grade der Polynome  $\chi_T, \chi_\varphi, \mu_T, \mu_\varphi$ . (Die Begründungen sind wichtig.)

(c) Zeigen Sie, daß  $\varphi$  ein Automorphismus von  $V$  ist. *2 + 5 + 2 = 9 Punkte*

**Aufgabe 9.**

(a) Nach Aufgabe 8 ist  $\varphi$  linear. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von  $\varphi$ . (Achtung: Das müssen Untervektorräume von  $V$  sein.)

(d) Berechnen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , die aus Eigenvektoren von  $\varphi$  besteht, und geben Sie  $\mathcal{C}$ , die Basiswechselmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$  und die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$  an.

*3 + 4 + 4 + 3 = 14 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 10.**

Es sei  $a \geq 1$  eine natürliche Zahl. Drücken Sie die Anzahl der ungeordneten  $k$ -Zahlpartitionen  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  mit  $n_i \geq a$  für  $1 \leq i \leq k$  durch die Partitionszahlen  $P_{n',k'}$  aus.

*7 Punkte*

---

**Aufgabe 11.**

Zeigen Sie, daß die Anzahl der ungeordneten  $k$ -Zahlpartitionen  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  mit  $n_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  für  $1 \leq i \leq k$  folgenden Wert hat:

$$P_{n,k} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j, k-1}.$$

*9 Punkte*

---

**Aufgabe 12.**

Bestimmen Sie in folgendem Netzwerk  $N = (V, B, q, s, c)$  einen maximalen Fluß:

$$V = \{x_1, \dots, x_9\} \cup \{q, s\},$$

$$B = \{(q, x_i), (x_i, s) | 1 \leq i \leq 9\} \cup \{(x_{i+1}, x_i) | 1 \leq i \leq 8\},$$

$$c((q, x_i)) = i, c((x_i, s)) = 10 - i \text{ für } 1 \leq i \leq 9 \text{ und } c((x_{i+1}, x_i)) = 9 - i \text{ für } 1 \leq i \leq 8.$$

*10 Punkte*

---

**Aufgabe 13.**

Es sei  $T$  ein Baum mit zwei nicht adjazenten Ecken vom Grad  $d \geq 3$ . Zeigen Sie, daß  $T$  mindestens  $2d - 2$  Ecken besitzt.

*9 Punkte*

---

**Aufgabe 14.**

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  genüge der Rekursion  $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_n$  mit den Anfangsbedingungen  $a_0 = 3$  und  $a_1 = 0$ . Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

*7 Punkte*

---

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 15.**

Es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$  die erzeugende Funktion der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  mit  $a_n = 3 + (-2)^n$ . Welche Folge  $(b_n)_{n \geq 0}$  hat die erzeugende Funktion

$$g(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2}?$$

(Hinweis: Versuchen Sie es nach Möglichkeit zu vermeiden, die Funktionen  $f$  und  $g$  explizit zu berechnen.)

*10 Punkte*

---

**Aufgabe 16.**

Die Folge  $(c_n)_{n \geq 0}$  genüge der Rekursion

$$c_{n+3} + 3 \cdot 10 \cdot c_{n+2} + 3 \cdot 100 \cdot c_{n+1} + 1000 \cdot c_n = 0$$

mit den Anfangsbedingungen  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = -10$ ,  $c_2 = 200$  und  $c_4 = 40000$ .

Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge. (Beachten Sie, daß  $c_3$  nicht gegeben ist).

*9 Punkte*

---

**Aufgabe 17.**

Zeigen Sie, daß ein Graph  $G$  genau dann bipartit ist, wenn für alle seine Teilgraphen  $H$  eine Menge  $V_H \subseteq V(H)$  mit  $|V_H| \geq \frac{|V(H)|}{2}$  existiert, so daß keine zwei Ecken aus  $V_H$  in  $H$  adjazent sind.

(Hinweis: Betrachten Sie einen Kreis ungerader Länge.)

*9 Punkte*

---

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Gegeben seien zwei Vektorräume  $V$  und  $W$ , ein Untervektorraum  $U$  von  $W$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$ . Beweisen Sie:  $\varphi^{-1}(U) := \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ . *4 Punkte*

---

**Aufgabe 2.**

Untersuchen Sie

(a) im Fall  $V = \mathbb{Q}^{1 \times 2}$ ,

(b) im Fall  $V = \mathbb{F}_2^{1 \times 2}$ ,

ob die Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V, [a, b] \mapsto [a + b, a^2 + b^2]$  linear ist.

*2 + 3 = 5 Punkte*

---

**Aufgabe 3.**

(a) Gegeben seien zwei lösbare, nicht homogene lineare Gleichungssysteme über einem endlichen Körper  $K$ , das eine mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das andere mit 4 Gleichungen und 2 Unbekannten. Können die beiden Systeme gleich viele Lösungen haben?

(b) Untersuchen Sie die gleiche Frage für den Fall, dass die beiden Systeme über verschiedenen endlichen Körpern  $K_1$  und  $K_2$  gegeben sind.

Antwort jeweils mit Beweis der Unmöglichkeit oder konkretem Beispiel.

*4 + 3 = 7 Punkte*

---

**Aufgabe 4.**

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a & 3 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

(a) Berechnen Sie die Determinante von  $A$  mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei  $|A|$  und alle vorkommenden  $3 \times 3$ -Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Spalte. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Spalten oder Zeilen oder Anwendung der Regel von Sarrus.)

(b) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $A$  invertierbar, für welche nicht?

(c) Für welche  $a \in \mathbb{Z}$  ist  $A$  ganzzahlig invertierbar?

Antwort jeweils mit Begründung.

*4 + 1 + 1 = 6 Punkte*

---

**Aufgabe 5.**

Es sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$ , und es sei  $A \in K^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Es sei  $\det(A) = d$ . Berechnen Sie  $\det(-A)$ .

(Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern begründen Sie es.)

(b) Zeigen Sie: Wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist, gilt: Ist  $A^t = -A$ , so ist  $A$  nicht invertierbar.

(Wo geht hier die Charakteristik von  $K$  ein?)

(c) Zeigen Sie: Wenn  $n$  eine gerade Zahl ist, gilt die Aussage in (b) nicht.

(Betrachten Sie zunächst den Fall  $n = 2$ .)

*2 + 3 + 3 = 8 Punkte*

---

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$  seien zwei Basen  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  und

$\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  mit der Basiswechselmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  sowie zwei Unter-

vektorräume

$$U_1 = \langle v_1 + 3v_2 + v_4, v_1 - 3v_3 + v_4, v_1 + 4v_2 + v_3 + v_4 \rangle,$$

$$U_2 = \langle w_1 - w_3 + w_4, w_2 + 2w_3 - 2w_4 \rangle$$

gegeben.

- Stellen Sie die Erzeugenden von  $U_2$  als Linearkombinationen aus  $\mathcal{B}$  dar.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  und eine Basis von  $U_1 + U_2$ . (Erläutern Sie Ihre Rechnung außerhalb des eigentlichen Zassenhaus-Schemas, insbesondere den Ansatz, und geben Sie die resultierenden Basen an.)
- Berechnen Sie nun die Basiswechselmatrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ .
- Es seien  $w_1 = X^3 - X^2 + 1$  und  $w_2 = X^2 - X + 1$ . Berechnen Sie eine Darstellung des Durchschnitts  $U_1 \cap U_2$  als Menge von Polynomen. (Wenn Sie sich beim Zassenhaus-Algorithmus nicht verrechnet haben, geht das.)

*4 + 5 + 3 + 3 = 15 Punkte*

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $\mathbb{C}$  der Körper der komplexen Zahlen und  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ .

- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ .
- Zeigen Sie, ohne irgendwelche Potenzen von  $A$  auszurechnen, dass  $A^5$  gleich  $16 \cdot A$  ist.

(Auf die Argumentation kommt es an.)

*4 + 3 = 7 Punkte*

---

**Aufgabe 8.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{1 \times 3}$  und  $\varphi: V \rightarrow V$  der durch  $\varphi([a, b, c]) = [5a + 2c, 2a + 3b + 2c, -4a - c]$  definierte Endomorphismus von  $V$ .

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ .
- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\varphi$  und ihre algebraischen Vielfachheiten.
- Berechnen Sie die Eigenräume von  $\varphi$ . (Achtung: Das müssen Untervektorräume von  $V$  sein.)
- Berechnen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , die aus Eigenvektoren von  $\varphi$  besteht, und geben Sie  $\mathcal{C}$ , die Basiswechselmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$  und die Abbildungsmatrix  $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$  an.

*1 + 3 + 4 + 3 = 11 Punkte*

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $K$  ein Körper,  $a \in K$  und  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ . Bestimmen Sie die Menge aller zu  $A$  ähnlichen Matrizen aus  $K^{2 \times 2}$ . (Antwort mit Beweis.)

*3 Punkte*

---



Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 10.**

Es seien  $a_1, \dots, a_n$  beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Zwei der Zahlen aus der Menge  $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$  ergeben bei Division durch  $n$  denselben Rest.
  - b) Es gibt zwei Zahlen  $0 \leq k < l \leq n$ , so dass  $\sum_{i=k+1}^l a_i$  ein Vielfaches von  $n$  ist. *8 Punkte*
- 

**Aufgabe 11.**

Es sei  $a_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Mengen  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit der Eigenschaft, dass

$$\{x, x + 1 \mid x \in S\} = \{1, \dots, n\}$$

ist. Drücken Sie die Zahlen  $a_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen aus.

(Hinweis: Beweisen Sie eine Rekursion für die  $a_n$ .)

*8 Punkte*

---

**Aufgabe 12.**

Gegeben sei eine Folge von Graphen  $(G_n)_{n \geq 1}$ , so dass  $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$  und für  $n \geq 2$  der Graph  $G_n = (V_n, E_n)$  aus  $G_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$  entsteht, indem man zu  $V_{n-1}$  eine Ecke  $v_n$  hinzufügt und mit mehr als  $\frac{n-1}{2}$  Ecken von  $G_{n-1}$  verbindet, d.h.  $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$ .

Zeigen Sie, dass  $G_n$  für  $n \geq 3$  hamiltonsch ist.

*8 Punkte*

---

**Aufgabe 13.**

Zeigen Sie, dass  $P_{n,k}$  für  $n, k \in \mathbb{N}$  die Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen

$$n + k^2 - k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

von  $n + k^2 - k$  in genau  $k$  Summanden ist, für die  $|n_i - n_j| \geq 2$  für alle  $1 \leq i < j \leq k$  gilt. *9 Punkte*

---

**Aufgabe 14.**

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  genüge der Rekursion  $a_{n+4} + 3a_{n+3} + a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$  mit den Anfangsbedingungen  $a_0 = 8$ ,  $a_1 = -8$  und  $a_2 = 24$ . Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

*7 Punkte*

---

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)**

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik  
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik  
RWTH Aachen

---

**Aufgabe 15.**

Die Mengen  $A_1, \dots, A_n \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bilden eine „Kette“, falls  $A_i \subseteq A_{i+1}$  und  $A_i \neq A_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Für jede Kette  $A_1, \dots, A_n$  gilt  $|A_i| = i$  für  $1 \leq i \leq n$ , und es gibt genau  $n!$  verschiedene Ketten.
- b) Zu einer Menge  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  gibt es genau  $|B|! \cdot (n - |B|)!$  verschiedene Ketten  $A_1, \dots, A_n$  mit  $A_{|B|} = B$ .
- c) Gilt für die Mengen  $B_1, \dots, B_m \subseteq \{1, \dots, n\}$ , dass  $B_i \not\subseteq B_j$  für  $1 \leq i \neq j \leq m$ , dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

12 Punkte

---

**Aufgabe 16.**

Es sei  $G = (U \cup W, E)$  ein bipartiter Graph mit den Partitions Mengen  $U$  und  $W$  mit  $|U| = |W| = n$ .  
Es sei  $d(x, G) = |N(x, G)| \geq \frac{n}{2}$  für alle  $x \in U \cup W$ .

Zeigen Sie, dass  $G$  ein perfektes Matching besitzt.

(Hinweis: Betrachten Sie eine minimale Eckenüberdeckung.)

8 Punkte

---

**Aufgabe 17.**

Bestimmen Sie einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt in dem Netzwerk  $N = (V, B, q, s, c)$  mit

$$\begin{aligned} V &= \{q = 1, 2, 3, \dots, 8, s = 9\}, \\ B &= \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (4, 7), (5, 4), \\ &\quad (5, 7), (5, 8), (6, 3), (6, 7), (7, 9), (8, 6), (8, 9)\}, \end{aligned}$$

$c((1, 2)) = 5$ ,  $c((1, 5)) = 10$ ,  $c((2, 3)) = 1$ ,  $c((2, 6)) = 2$ ,  $c((2, 9)) = 1$ ,  $c((3, 4)) = 2$ ,  $c((4, 7)) = 7$ ,  
 $c((5, 4)) = 5$ ,  $c((5, 7)) = 2$ ,  $c((5, 8)) = 3$ ,  $c((6, 3)) = 3$ ,  $c((6, 7)) = 1$ ,  $c((7, 9)) = 8$ ,  $c((8, 6)) = 2$   
und  $c((8, 9)) = 1$ .

8 Punkte

---

# Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil A (18. 12. 98)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 13 gegebenen Aufgaben für insgesamt 54 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Formulieren Sie eine explizite Definition für den Begriff „linear abhängig“. (Sie sollen also nicht schreiben: „Nicht linear unabhängig“.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Gibt es im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$  drei Vektoren  $u, v, w$ , so dass zwar alle Paare  $(u, v)$ ,  $(u, w)$  und  $(v, w)$  linear unabhängig sind, aber die Folge  $(u, v, w)$  linear abhängig ist?

(Beweis der Unmöglichkeit oder Beispiel.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums  $V = \mathbb{R}^{1 \times 4}$  sind Teilräume von  $V$ ?

(a)  $M_1 = \{ [a_1, a_2, a_3, a_4] \in V \mid a_1^2 + a_3^4 = 0 \}$ ,

(b)  $M_2 = \{ [a_1, a_2, a_3, a_4] \in V \mid a_2^1 + a_4^3 = 0 \}$ .

(Antwort jeweils mit Begründung.)

3 + 2 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über  $\mathbb{Q}$ .

$$5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 + 11 \cdot x_4 = 12$$

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 5$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 2$$

5 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$ .

(a) Bestimmen Sie die Gauß-Jordan-Basis des Zeilenraums  $\text{Zr } A$ .

(b) Es sei  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_5)$  die Folge der Spalten von  $A$ . Bestimmen Sie eine Teilfolge von  $\mathcal{A}$ , die eine Basis von  $\langle \mathcal{A} \rangle$  ist.

3 + 1 = 4 Punkte

---

## Aufgabe 6.

(a)  $S$  und  $T$  seien 2-dimensionale Teilräume eines Vektorraums  $V$  über einem Schiefkörper  $K$ . Welche Dimensionen können die Teilräume  $S \cap T$  und  $S + T$  haben?

Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Mit Begründung.)

(b) Es sei nun konkret  $V = P_5(\mathbb{R})$  der (6-dimensionale)  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 5$  über  $\mathbb{R}$ . Geben Sie für jede der Möglichkeiten aus (a) ein Beispiel an.

(Ohne Beweis, aber natürlich in vollständigen Sätzen.)

2 + 3 = 5 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Es sei  $p$  eine Primzahl,  $\mathbb{Z}_p$  der Restklassenring modulo  $p$  und  $\bar{a}$  ein Element aus  $\mathbb{Z}_p$  mit  $\bar{a} \neq \bar{0}$ .

- (a) Wie ist  $\mathbb{Z}_p$  als Menge definiert?
- (b) Bekanntlich ist  $\mathbb{Z}_p$  ein Körper, also gibt es in  $\mathbb{Z}_p$  ein Element  $\bar{a}^{-1}$ . Beschreiben Sie mit wenigen kurzen Sätzen, wie und warum man  $\bar{a}^{-1}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen kann. Hinweis: Sie sollen nicht den euklidischen Algorithmus beschreiben. 1 + 3 = 4 Punkte

**Aufgabe 8.**

Wir betrachten die Abbildung  $\alpha = \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \right): \mathbb{Z}_7^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{Z}_7$ . Geben Sie zu jedem

Element  $y \in \text{Bild}(\alpha)$  die Urbildmenge  $\alpha^{-1}(y)$  an. Wie viele Elemente hat  $\alpha^{-1}(y)$  jeweils?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele solche Mengen Sie angeben sollen und wie Sie die Menge  $\alpha^{-1}(y)$  knapp und trotzdem explizit angeben. 6 Punkte

**Aufgabe 9.**

Gegeben sei der Vektorraum  $V = \mathbb{Z}_5^{1 \times 4}$  über dem Körper  $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  mit 5 Elementen und in  $V$  der Teilraum

$$T = \langle [\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}], [\bar{2}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}], [\bar{3}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{3}] \rangle.$$

Berechnen Sie eine Basisfolge von  $T$ , ergänzen Sie sie zu einer Basisfolge von  $V$ , und bestimmen Sie eine Basisfolge von  $V/T$ . 4 Punkte

**Aufgabe 10.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $F(\mathbb{R})$  aller Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  betrachten wir den von den Funktionen  $s_1 = (x \mapsto \sin(x))$ ,  $s_2 = (x \mapsto \sin(2x))$ ,  $s_3 = (x \mapsto 2 \sin(x))$  erzeugten Teilraum  $V = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ . Geben Sie einen zu  $V$  isomorphen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W$  an, der nicht Teilraum von  $F(\mathbb{R})$  ist.

(Ohne Beweis.) 2 Punkte

**Aufgabe 11.**

Untersuchen Sie, ob die Abbildung  $f = \left( \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+1 \\ b \end{bmatrix} \right): \mathbb{R}^{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  injektiv, surjektiv, bijektiv, linear ist. 3 Punkte

**Aufgabe 12.**

Geben Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung  $\alpha$  an, für die Kern  $(\alpha)$  und Cokern  $(\alpha)$  die Dimension 1 haben. (Es kommt auf die Formulierung an. Die Linearität Ihrer Abbildung brauchen Sie nicht zu beweisen.) 3 Punkte

**Aufgabe 13.**

In einem affinen Raum  $\mathcal{P}$  über dem 2-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\langle p_0, p_1 \rangle$  der Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 1$  seien ein Punkt  $P$  als Ursprung und weitere vier Punkte  $A_1, B_1, A_2, B_2$  durch ihre Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{PA}_1 &= p_0 \cdot 1 - p_1 \cdot 3, & \vec{PB}_1 &= p_0 \cdot 2 - p_1 \cdot 1, \\ \vec{PA}_2 &= p_0 \cdot 5 + p_1 \cdot 2, & \vec{PB}_2 &= p_0 \cdot 3 - p_1 \cdot 1 \end{aligned}$$

gegeben. Berechnen Sie, falls er existiert, den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$ .

7 Punkte

# Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B (17. 2. 99)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 78 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten (die beiden letzten Aufgaben sind etwas schwieriger). Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Es sei  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $Z$  die Zeilenumformung  $Z_2 \mid Z_2 - 3Z_1$ . Schreiben Sie die umgeformte Matrix  $Z(A)$  als Matrixprodukt mit  $A$ .

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Gegeben seien ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ , eine lineare Abbildung  $\varphi$  und eine Bilinearform  $\Phi$  von  $V$ , zwei Vektoren  $v_1, v_2 \in V$ , zwei Basisfolgen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  von  $V$  mit der Basiswechsellmatrix  ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}} = T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  und die drei Matrizen  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so dass in der Menge  $M := \{A_1, A_2, A_3\}$  sowohl die Matrizen  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ ,  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$  und  $[{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2]$  als auch die Matrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ ,  ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  und  $[{}_{\mathcal{C}}v_1, {}_{\mathcal{C}}v_2]$  alle vorkommen.

- (a) Bestimmen Sie in  $M$  die Matrizen  $[{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2]$ ,  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$  und  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ , soweit sie eindeutig identifizierbar sind.

(Schreiben Sie die während der Rechnung auftretenden Matrizen möglichst übersichtlich hin, und formulieren Sie die Ergebnisse aus. Es reicht nicht, dass die Ergebnisse richtig sind, die Argumentation ist wichtig.)

- (b) Berechnen Sie  $\Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ .

16 + 3 = 19 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Auf einem 3-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  sei ein Skalarprodukt  $\Phi$

durch  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  gegeben.

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Sylvesterbasis  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . Geben Sie dabei jeweils kurz (also ohne viel Text) an, welche Umformungen Sie benutzen, und geben Sie am Schluss die Basis  $\mathcal{C}$  sowie die Matrizen  ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}}$  und  ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an.

- (b) Eine zweite Bilinearform  $\Psi$  auf  $V$  sei durch  ${}^{\mathcal{C}}\Psi_{\mathcal{C}} = {}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$  gegeben. Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit  $\Psi(x, y) = \Phi(\varphi(x), \varphi(y))$  für alle  $x, y \in V$ ?

(Antwort mit Beweis.)

6 + 4 = 10 Punkte

---

**Aufgabe 4.**

Welche der folgenden Bilinearformen  $\Phi$  definieren einen euklidischen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $(V, \Phi)$ ?

(a)  $V = \langle \sin, \cos \rangle$ ,  $\Phi(x_1 \sin + x_2 \cos, y_1 \sin + y_2 \cos) = x_1 y_1 - 2 x_1 y_2 - 2 x_2 y_1 + 7 x_2 y_2$  für alle  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ .

(b)  $V = P_1(\mathbb{R})$  (Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 1$ ),  $\mathcal{B} = (p_0, p_1)$ ,  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

(Antwort jeweils mit Beweis.)

$5 + 4 = 9$  Punkte

**Aufgabe 5.**

$(V, \Gamma)$  sei ein euklidischer  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi$  eine orthogonale lineare Abbildung von  $(V, \Gamma)$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  höchstens die Eigenwerte 1 und  $-1$  hat.

(b) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal bezüglich  $\Gamma$  sind.

(c) Geben Sie eine orthogonale lineare Abbildung eines euklidischen Vektorraums mit einem Eigenwert  $-1$  an.

$3 + 3 + 3 = 9$  Punkte

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  eine Basis von  $V$ . Auf  $V$  sei ein Skalarprodukt

$\Phi$  durch  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 9 & -9 \\ -2 & 4 & -9 & 20 \end{bmatrix}$  gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthogonalbasis  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ .

(b) Geben Sie die Matrizen  ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}}$  und  ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an.

(c) Bestimmen Sie die beste Approximation des Vektors  $b_4$  im Teilraum  $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  von  $V$ .

$7 + 4 + 2 = 13$  Punkte

**Aufgabe 7.**

Auf dem Intervall  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  betrachten wir die reellwertigen stetigen Funktionen

$$p = (x \mapsto x) \quad \text{und} \quad q = (x \mapsto x^4).$$

Sie erzeugen einen 2-dimensionalen Teilraum  $T$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums aller stetigen Funktionen auf  $I$ . Wir versehen  $T$  mit dem Skalarprodukt

$$\Gamma(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{für} \quad f, g \in T.$$

Berechnen Sie Länge und gegenseitige Lage der Vektoren  $p$  und  $q$  in  $(T, \Gamma)$ , und zeichnen (skizzieren) Sie  $p$  und  $q$  als Pfeile in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichlangen Einheitsstrecken.

8 Punkte

**Aufgabe 8.**

Gegeben sei ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum  $V$  mit einer Bilinearform  $\Phi$ . Untersuchen Sie die Abbildung  $\gamma := (x \mapsto {}_x\Phi): V \rightarrow V^*$ , wobei  ${}_x\Phi := (y \mapsto \Phi(x, y)): V \rightarrow K$  gesetzt ist.

(Zum Beispiel: Wann ist  $\gamma$  injektiv?)

bis zu 7 Punkte

# Nachholklausur zur Linearen Algebra I (9. 4. 99)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 12 gegebenen Aufgaben für insgesamt 74 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Gibt es in einem geeigneten Vektorraum eine linear abhängige Folge von vier Vektoren, von denen je drei (in der gegebenen Reihenfolge) eine linear unabhängige Folge bilden?

(Beispiel oder Beweis der Unmöglichkeit.)

3 Punkte

---

## Aufgabe 2.

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper  $\mathbb{Q}$ .

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2$$

$$2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 1$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = -1$$

(a) Bestimmen Sie die Menge  $M$  aller Lösungen, und stellen Sie sie als Restklasse nach einem geeigneten Teilraum  $U$  in einem geeigneten Vektorraum  $V$  dar. Was ist  $V$ ? Was ist  $U$ ?

(b) Betrachten Sie  $M$  nun als Vektor im Vektorraum  $W = V/U$  aller Restklassen von  $V$  nach  $U$ . Bestimmen Sie eine Basis von  $W$ . (Mit Begründung.)

5 + 3 = 8 Punkte

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  und  $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ .

(a) Geben Sie eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  an, so dass Kern  $\varphi = T_1$  und Bild  $\varphi = T_2$  ist.

(b) Ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt? (Antwort mit Begründung.)

3 + 2 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 4.

Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Welche der beiden folgenden Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $V$  nach  $V$  sind linear?

(a)  $\varphi(f) = (x \mapsto f(x) + 5 \text{ für } x \in \mathbb{R})$  für  $f \in V$ ,

(b)  $\psi(f) = (x \mapsto f(x) \cdot 5 \text{ für } x \in \mathbb{R})$  für  $f \in V$ .

Antwort jeweils mit Begründung.

2 + 3 = 5 Punkte

---

## Aufgabe 5.

Es sei  $F_3$  ein Körper mit 3 und  $F_7$  ein Körper mit 7 Elementen. Wir betrachten in  $F_3^{1 \times 6}$  ein Komplement  $A$  zum Teilraum  $\langle [0, 1, 2, 0, 1, 2] \rangle$  und in  $F_7^{4 \times 1}$  den Faktorraum  $B = F_7^{4 \times 1} / W$  nach dem Teilraum  $W = \langle [1, 1, 1, 1]^{tr} \rangle$ . Welcher der Vektorräume  $A$  und  $B$  enthält mehr Vektoren? 4 Punkte

---

## Aufgabe 6.

Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -11 \\ -8 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluss die Matrix  $A^{-1}$  explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche (das Ergebnis ist ganzzahlig).

5 Punkte

**Aufgabe 7.**

Gegeben seien zwei Matrizen  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  und  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  aus  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  sowie ein 2-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Basisfolge  $\mathcal{B}$ . Weiter seien in  $V$  eine lineare Abbildung  $\varphi$ , eine Bilinearform  $\Phi$  und zwei Vektoren  $v_1, v_2$  gegeben mit  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = [{}_{\mathcal{B}}v_1, {}_{\mathcal{B}}v_2] = A_1$ .

- (a) Gibt es eine Basisfolge  $\mathcal{C}$  von  $V$  mit  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = A_2$ ?
- (b) Gibt es eine Basisfolge  $\mathcal{C}$  von  $V$  mit  ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A_2$ ?
- (c) Gibt es eine Basisfolge  $\mathcal{C}$  von  $V$  mit  $[{}_{\mathcal{C}}v_1, {}_{\mathcal{C}}v_2] = A_2$ ?

Auf die sorgfältige und vollständige Argumentation kommt es an. 4 + 3 + 3 = 10 Punkte

**Aufgabe 8.**

Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Orthogonalprojektion“.

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen müssen angegeben sein, und für alle auftretenden Namen (wie z. B.  $V$  oder  $v$ ) muss gesagt werden, was für Objekte sie bezeichnen. 3 Punkte

**Aufgabe 9.**

Auf einem 3-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  sei ein Skalarprodukt  $\Phi$  durch

$${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ gegeben.}$$

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen eine Sylvesterbasis  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$ . Geben Sie dabei jeweils kurz (also ohne viel Text) an, welche Umformungen Sie benutzen, und geben Sie am Schluss die Basis  $\mathcal{C}$  sowie die Matrizen  ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}}$  und  ${}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$  an.
- (b) Bestimmen Sie die beste Approximation (bezüglich  $\Phi$ ) des Vektors  $b_3$  im Teilraum  $\langle b_1, b_2 \rangle$  von  $V$ .

7 + 4 = 11 Punkte

**Aufgabe 10.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$  mit der Standardbasis  $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$  seien eine Bilinearform  $\Phi$  und ein

Endomorphismus  $\varphi$  durch die Matrizen  ${}_{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$  und  ${}_{\mathcal{S}}\varphi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass  $(V, \Phi)$  ein euklidischer Vektorraum ist.
- (b) Finden Sie einen Vektor  $v$ , so dass  $\varphi(e_1)$  und  $\varphi(v)$  bezüglich  $\Phi$  orthogonal sind.
- (c) Welches Winkelmaß hat das Vektorpaar  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ ?

4 + 3 + 5 = 12 Punkte

**Aufgabe 11.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$  mit der Standardbasis  $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$  sei durch  ${}_{\mathcal{S}}\varphi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$  eine

lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  gegeben. Gibt es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass jeder Vektor  $v$  aus  $\mathcal{B}$  durch  $\varphi$  auf einen Vektor  $v\lambda$  mit  $\lambda \in \{-3, -1, 0, 2\}$  abgebildet wird?

Untersuchen Sie die Frage mit den Mitteln der Vorlesung. Wichtig sind die Erläuterung Ihres Ansatzes und die Begründungen. 5 Punkte

**Aufgabe 12.**

Das durch die Standardbasis  $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  von  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$  aufgespannte Parallelotop (Einheitswürfel) habe das Volumen 7. Welches Volumen hat dann das von  $\varphi(\mathcal{S})$  aufgespannte Bild-Parallelotop unter der linearen Abbildung  $\varphi$ , die durch

$$\varphi(e_1) = 2e_1 + 3e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1 - 5e_2, \quad \varphi(e_3) = 5e_3, \quad \varphi(e_4) = 2e_4$$

definiert wird? 3 Punkte



Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik  
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte  
Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

- (a) Geben Sie ein Beispiel  $V$  eines 16-dimensionalen Vektorraums, dessen Elemente Abbildungen sind. (Vergessen Sie nicht die formal korrekte Angabe der Operationen.)
- (b) Geben Sie Teilräume  $A, B$  Ihres Vektorraums  $V$  an, die die Dimensionen 3 und 4 haben und wo  $S := A + B$  die Dimension 5 hat. Welche Dimension hat  $D := A \cap B$ ?  $4 + 2 = 6$  Punkte
- 

**Aufgabe 2.**

Stellen Sie sich einen Vektorraum mit einer endlichen Basisfolge  $\mathcal{B}$  als gegeben vor. Weiter seien Teilräume  $A$  und  $B$  durch endliche Folgen von Erzeugenden gegeben, die überdies als Linearkombinationen in der Basisfolge  $\mathcal{B}$  dargestellt sind. Wie prüft man, ob  $A$  ein Teilraum von  $B$  ist?  $4$  Punkte

---

**Aufgabe 3.**

Je nach Wahl des reellen Parameters  $t$  hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - (t+1) \cdot x_3 &= -2 \\ 0 \cdot x_1 + t \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= t \\ 1 \cdot x_1 - t \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 2-t \end{aligned}$$

unterschiedliche Lösungsmengen.

- (a) Für welche Werte von  $t$  ist das Gleichungssystem lösbar?
- (b) Berechnen Sie in den lösbaren Fällen jeweils die Lösungsmenge  $M$  und schreiben Sie sie als Element eines Faktorraums  $F$  von  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Welche Dimension hat  $F$ ?  $3 + 6 = 9$  Punkte
- 

**Aufgabe 4.**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem so gut wie es geht.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ 6x + 10y &= 7. \end{aligned} \qquad 5 \text{ bis } 7 \text{ Punkte}$$

---

**Aufgabe 5.**

Wir betrachten die quadratischen Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \\ 8 & 8 & 22 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Berechnen Sie (multiplikativ) inverse Matrizen zu diesen Matrizen.
- (b) Welche der durch  $\alpha_i := (x \mapsto A_i x \text{ für } x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}): \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$  definierten Abbildungen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sind linear, welche injektiv, welche Isomorphismen?
- (c) Auf einem 3-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit einer Basisfolge  $\mathcal{B}$  seien zwei Skalarprodukte  $\Phi$  und  $\Psi$  durch ihre Matrizen  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A_2$  und  ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = A_3$  gegeben. Welche dieser Skalarprodukte sind nicht ausgeartet, welche positiv definit? (Begründung.)  $6 + 3 + 5 = 14$  Punkte
-

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik  
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte  
Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 6.**

Es sei  $V = \mathbb{R}^{1 \times 5}$ .

Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit  $\text{Kern } \varphi < \text{Bild } \varphi$ ?

Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit  $\text{Kern } \varphi = \text{Bild } \varphi$ ?

Gibt es eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  mit  $\text{Kern } \varphi > \text{Bild } \varphi$ ?

(Antwort jeweils mit Beispiel oder Beweis.)

3 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Zur reellen  $3 \times 5$ -Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  betrachten wir die lineare Abbildung  $\varphi =$

$(x \mapsto Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^{5 \times 1}): \mathbb{R}^{5 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Berechnen Sie eine Basisfolge von  $\mathbb{R}^{3 \times 1}/\text{Bild } \varphi$ . 6 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

In einem  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  seien Basisfolgen  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  sowie eine lineare Abbildung  $\varphi$  und eine Bilinearform  $\Phi$  gegeben, so dass  ${}_{\mathcal{D}}\text{id}_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A \in K^{n \times n}$  und  ${}_{\mathcal{D}}\text{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = B \in K^{n \times n}$  gilt. Berechnen Sie für die Matrizen  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  und  ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$  jeweils eine Formel, die die gesuchte Matrix in  $A$  und  $B$  ausdrückt (und keine Klammern enthält). 5 Punkte

---

**Aufgabe 9.**

(a) Geben Sie ein Beispiel eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  mit einer nicht ausgearteten Bilinearform  $\Phi$  und einem Teilraum  $W \leq V$ , für den  $V$  nicht die (innere) direkte Summe der Teilräume  $W$  und  $W^{\perp}$  ist.

(b) Gilt in Ihrem Beispiel die Formel  $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$ ?

4 + 1 = 5 Punkte

---

**Aufgabe 10.**

Auf dem reellen Intervall  $I = [0, 1]$  sei die Funktion  $f = (x \mapsto -x^2 + 1): I \rightarrow I$  gegeben. Stellen sie sich vor, jemand fragt Sie: Welche der beiden Polynomfunktionen  $g = (x \mapsto -x + 1): I \rightarrow I$  und  $h = (x \mapsto -x + \frac{5}{4}): I \rightarrow I$  vom Grad 1 approximiert  $f$  „besser“? Da Sie wegen Ihrer Klausur wenig Zeit haben, überlassen Sie ihm das Rechnen und sagen ihm nur, welche Ausdrücke er ausrechnen soll. Welche? 4 Punkte

---

**Aufgabe 11.**

Wie viele Geraden hat ein 3-dimensionaler affiner Raum (also ein affiner Raum über einem 3-dimensionalen Vektorraum) über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$ ? (Wie ergibt sich diese Anzahl?) 4 Punkte

---

**Aufgabe 12.**

Wegen  $4711 = 7 \cdot 673$  ist der Restklassenring  $\mathbb{Z}_{4711} = \mathbb{Z}/4711\mathbb{Z}$  kein Körper. Trotzdem besitzt die Restklasse, in der die Zahl 205 liegt, ein (multiplikativ) inverses Element (warum?). Berechnen Sie es (und erläutern Sie dabei Ihre Rechnung). 5 Punkte

---

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)**

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik  
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte  
Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 13.**

Formulieren Sie den Satz von Dilworth für den Spezialfall eines Spernerposets  $P$ , und verifizieren Sie ihn am Hassediagramm eines rangsymmetrischen Spernerposets ihrer Wahl, welches  $\mathcal{B}_3$  (=Poset der Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$ ) als echtes induziertes Unterposet enthält. *7 Punkte*

---

**Aufgabe 14.**

- (a) Zeichnen Sie die Hassediagramme des Posets  $P = \underline{1} \oplus (\underline{2} + \underline{2}) \oplus \underline{1}$  und des Posets  $\mathcal{O}(P)$  aller Ideale von  $P$ . Geben Sie den Elementen von  $P$  geeignete Namen und notieren Sie an jedem Element von  $\mathcal{O}(P)$  die Elemente des entsprechenden Ideals von  $P$ ; unterstreichen Sie dabei die Elemente der erzeugenden Antikette.
- (b) Charakterisieren Sie für beliebige Posets  $P$  und  $Q$  die Elemente von  $\mathcal{O}(P \oplus Q)$  mit Hilfe der Elemente von  $\mathcal{O}(P)$  und  $\mathcal{O}(Q)$ . *6 + 4 = 10 Punkte*
- 

**Aufgabe 15.**

Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen:

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} \quad \text{für } n, r, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r}. \quad \text{8 Punkte}$$

---

**Aufgabe 16.**

N.N. behauptet:

“Die Anzahl der  $k$ -Multimengen, die man aus einer  $n$ -Menge bilden kann, ist  $\frac{n^k}{k!}$ , weil ....”

- (a) Was hat N.N. vermutlich als Begründung gegeben und was ist daran verkehrt?
- (b) Welches ist die richtige Anzahl? Ist diese  $\geq$  oder  $\leq$  als  $\frac{n^k}{k!}$ , oder hängt das von  $n$  und  $k$  ab?
- (c) Geben Sie einen Beweis des richtigen Ergebnisses. *4 + 2 + 3 = 9 Punkte*
- 

**Aufgabe 17.**

Eine Zählfunktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  habe die rationale erzeugende Funktion

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1}.$$

Bestimmen Sie eine Rekursionformel (inklusive Anfangsbedingungen) und eine explizite Darstellung für  $f$ . *12 Punkte*

---

# Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik  
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte  
Mathematik, RWTH Aachen

## Aufgabe 18.

Für jede natürliche Zahl  $n$  sei

$$L_n := \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid 0 \leq l_i \leq n - i, i = 1, \dots, n\}$$

und  $S_n$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $L : S_n \rightarrow L_n$  definiert durch

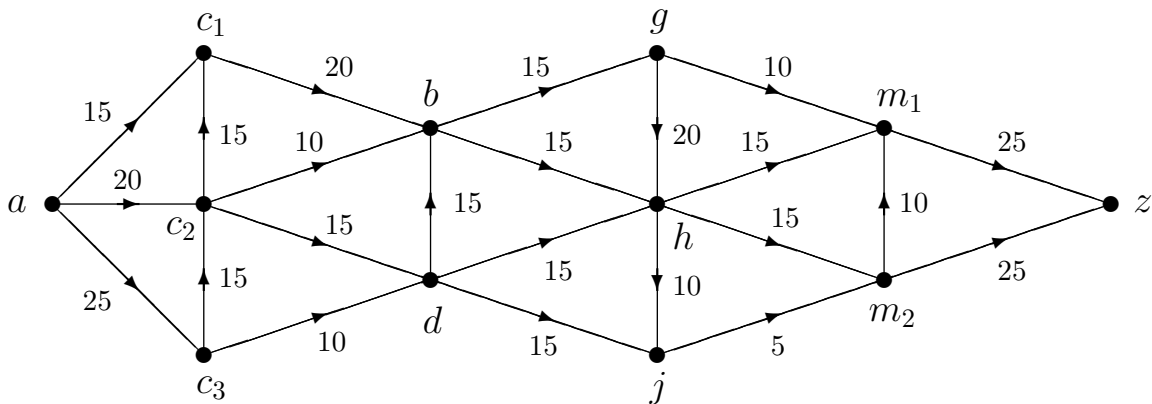
$$l_i = l_i(\pi) := \#\{j \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

eine Bijektion mit  $l_1 + \dots + l_n = l(\pi)$  [ $l(\pi)$  die Länge von  $\pi$ ] ist.

(b) Berechnen Sie  $L(\pi)$  für  $\pi = 4163752 \in S_7$  und  $L^{-1}(3, 6, 4, 0, 2, 1, 1, 0) \in S_8$ . *6 + 2 = 8 Punkte*

## Aufgabe 19.

Bestimmen Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk zwei maximale Flüsse mit *verschiedenen* zugehörigen minimalen Schnitten  $L = (A, \bar{A})$ :



Überprüfen Sie, dass es sich bei Ihren Lösungen tatsächlich um Flüsse handelt und dass in beiden Fällen die maximalen Flussstärken mit den minimalen Kapazitäten übereinstimmen; markieren Sie alle für die Berechnung der Kapazität relevanten Kanten. *12 Punkte*

## Aufgabe 20.

(a) Geben Sie den Satz von Turan an und folgern Sie daraus, dass jeder Graph mit  $2n$  Ecken und  $n^2 + 1$  oder mehr Kanten einen  $K_3$  als Untergraph enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph  $G$  eine gerade Eckenzahl hat, und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von  $G$ .

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass es (bis auf Isomorphie) nur einen 3-regulären Graphen mit 4 Ecken geben kann. *4 + 2 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)**

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder  
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 1.**

Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums  $V = \mathbb{R}^{1 \times 3}$  sind Teilräume von  $V$ ?

- (a)  $M_1 = \{ [a, b, c] \in V \mid a + b + c = 0 \}$ ,
- (b)  $M_2 = \{ [a, b, c] \in V \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0 \}$ ,
- (c)  $M_3 = \{ [a, b, c] \in V \mid a^3 + b^3 + c^3 = 0 \}$ .

(Antwort jeweils mit Begründung.)

6 Punkte

---

**Aufgabe 2.**

Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Wir berechnen daraus eine neue Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , indem wir zunächst auf  $A$  die Zeilenumformung  $Z_2 \mid Z_2 + 2Z_1$  und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung  $Z_3 \mid Z_3 - Z_1 + 3Z_2$  anwenden. Schreiben Sie  $B$  als Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich  $A$  ist.

3 Punkte

---

**Aufgabe 3.**

- (a) Berechnen Sie für die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & -9 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 4}$  eine Basis des Zeilenraums und eine Basis des Spaltenraums.
- (b) Begründen Sie Ihre Berechnungsmethode für die Basis des Zeilenraums.

6 Punkte

---

**Aufgabe 4.**

Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Matrix  $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ .

4 Punkte

---

**Aufgabe 5.**

Max behauptet:

Sind  $u, v$  Vektoren eines Vektorraums  $V$  und ist  $v \in \langle u \rangle$ , so ist die Folge  $(u, v)$  linear abhängig.

Moritz behauptet:

Sind  $u, v$  Vektoren eines Vektorraums  $V$  und ist die Folge  $(u, v)$  linear abhängig, so gilt  $v \in \langle u \rangle$ .

Wer hat Recht? Beide, einer, keiner? Falls nicht beide: Für welche Vektorräume sind beide Aussagen wahr? (Es kommt auf die sorgfältige und vollständige Argumentation an.)

6 Punkte

---

**Aufgabe 6.**

Berechnen Sie das Rechtsradikal  $A^\perp = \{y \in \mathbb{Q}^{4 \times 1} \mid x \cdot A \cdot y = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{Q}^{1 \times 3}\}$  zur Matrix  $A$  aus Aufgabe 3. Begründen Sie dabei Ihr Vorgehen.

5 Punkte

---

**Aufgabe 7.**

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das die Lösungsmenge  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^{3 \times 1}$

hat. (Erklären Sie, wie Sie darauf kommen, und zeigen Sie, dass es die Bedingung erfüllt.)

4 Punkte

---

**Aufgabe 8.**

Geben Sie ein (konkretes) Beispiel für eine surjektive lineare Abbildung an, so dass die Dimension des Kerns dreimal so groß ist wie die Dimension des Bildes.

3 Punkte

---

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)**

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder  
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

**Aufgabe 9.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir wollen Polynomfunktionen  $f$  und  $g$  auf  $\mathbb{R}$  „ $n$ -äquivalent“ (bei  $x = 0$ ) nennen, wenn ihre Differenz die Form  $(f - g)(x) = x^n \cdot q(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) für eine Polynomfunktion  $q \in P(\mathbb{R})$  hat.

- (a) Zeigen Sie, dass  $n$ -Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf  $P(\mathbb{R})$  ist.
  - (b) Geben Sie für  $n = 1$  ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen an.
  - (c) Kann man (allgemein) die  $n$ -Äquivalenzklassen als Elemente eines Faktorraums von  $P(\mathbb{R})$  schreiben? (Begründung.) 6 Punkte
- 

**Aufgabe 10.**

Im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{2001} = \mathbb{Z}/2001\mathbb{Z}$  betrachten wir die Elemente  $a = \overline{49}$  und  $b = \overline{81}$ .

- (a) Prüfen Sie möglichst einfach nach, ob die Elemente  $a$  und  $b$  invertierbar sind.
  - (b) Berechnen Sie die Inversen von  $a$  und  $b$ , soweit sie existieren. (Erläutern Sie dabei Ihre Rechnung.) 5 Punkte
- 

**Aufgabe 11.**

Gegeben seien ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Basisfolgen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ , eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  und ein Skalarprodukt  $\Gamma: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei sei  ${}_{\mathcal{B}}\text{id}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  und  ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\Gamma_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

- (a) Berechnen Sie  ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$  und  ${}^{\mathcal{C}}\Gamma_{\mathcal{C}}$ .
  - (b) Ist  $\Gamma$  nicht ausgeartet? Ist  $\Gamma$  positiv definit? (Antwort mit Begründung.) 5 Punkte
- 

**Aufgabe 12.**

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\mathcal{B}$  eine Basisfolge von  $V$  und  $\Psi$  das durch  ${}_{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  gegebene Skalarprodukt auf  $V$ . Berechnen Sie eine Basisfolge  $\mathcal{C}$  von  $V$ , für die  ${}^{\mathcal{C}}\Psi_{\mathcal{C}}$  eine Diagonalmatrix ist.

(Empfehlung: Vermeiden Sie Brüche.) 5 Punkte

---

**Aufgabe 13.**

Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  der reellen Polynomfunktionen vom Grad  $\leq 1$  seien die Vektoren

$$a = (x \mapsto 3 + 2x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = (x \mapsto 1 - x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Geben Sie positiv definite Skalarprodukte  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  auf  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  an, so dass  $a$  und  $b$  bezüglich  $\Gamma_1$  orthogonal, aber bezüglich  $\Gamma_2$  nicht orthogonal sind. 4 Punkte

---

**Aufgabe 14.**

Wir betrachten  $\mathbb{R}^{1 \times 2}$  als euklidischen Vektorraum bezüglich des Skalarprodukts  $\Phi$  mit  ${}^{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  bezüglich der Standardbasisfolge  $\mathcal{S}$ .

Welcher Vektor in  $\langle [3, 3] \rangle$  approximiert den Vektor  $[0, 3]$  am besten? (Begründung.) 4 Punkte

---

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur  
**Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)**

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder  
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

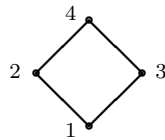
**Aufgabe 15.**

Beschreiben Sie für jede natürliche Zahl  $L \geq 3$  ein Poset  $P$  mit den folgenden Eigenschaften:  $L$  ist die Länge der längsten Kette von  $P$  und jedes Element von  $P$  liegt in einer Kette der Länge  $L$ ; trotzdem besitzt  $P$  auch eine maximale (= gesättigte) Kette der Länge  $< L$ , ja sogar maximale Ketten aller Längen  $k$  für  $1 < k < L$ . 7 Punkte

---

**Aufgabe 16.**

Definieren Sie die Verfeinerungsordnung für das Poset  $\mathcal{P}_n$  aller Mengenpartitionen von  $\{1, \dots, n\}$  und die entsprechende Überdeckungsrelation. Zeichnen Sie das Unterposet von  $\mathcal{P}_4$ , welches als Elemente alle Partitionen von



in *konvexe* Blöcke enthält. (Beschriften Sie die Elemente geeignet!) Welche Elemente von  $\mathcal{P}_4$  kommen dabei nicht vor? 8 Punkte

---

**Aufgabe 17.**

Gegeben sei ein konvexes  $n$ -Eck, bei dem sich nie mehr als zwei Verbindungsgeraden von je 2 Ecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte von je zwei Verbindungsgeraden liegen echt im Inneren des  $n$ -Ecks (also nicht außerhalb und nicht auf dem Rand)? 9 Punkte

---

**Aufgabe 18.**

Die *Eulierzahlen*  $A(n, k)$  zählen die Anzahl der Permutationen in  $S_n$  mit genau  $k$  *Anstiegen*, wobei ein Platz  $i$  ein Anstieg von  $\pi$  ist, wenn  $\pi(i) < \pi(i + 1)$  gilt. (Man setzt  $A(0, 0) := 1$ ,  $A(0, k) := 0$  für  $k \geq 1$ ). Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Rekursionsformel

$$A(n, k) = (n - k) A(n - 1, k - 1) + (k + 1) A(n - 1, k). \quad 9 \text{ Punkte}$$

---

**Aufgabe 19.**

Gegeben sei die lineare Rekursion

$$f(n + 4) - 3 f(n + 3) - 6 f(n + 2) + 28 f(n + 1) - 24 f(n) = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 13, f(3) = 35.$$

Berechnen Sie die explizite Lösung und geben Sie eine rationale erzeugende Funktion für die Koeffizienten  $f(n)$  an. 12 Punkte

---

# Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

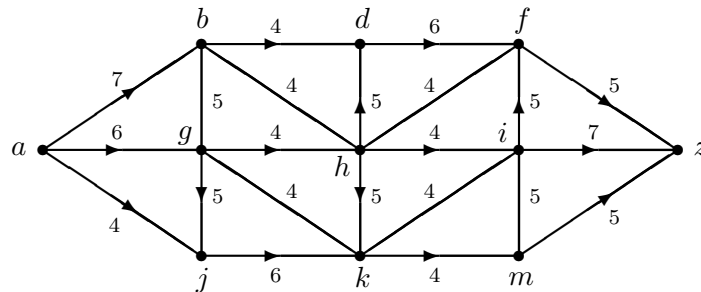
Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder  
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

## Aufgabe 20.

Zeigen Sie: In jeder Gruppe von  $n \geq 2$  Personen sind immer (mindestens) zwei, welche mit der gleichen Anzahl anderer Personen in der Gruppe bekannt sind. (“Bekanntsein” wird als irreflexive, symmetrische Relation aufgefaßt, welche im Allgemeinen nicht transitiv ist.) Formulieren Sie die Behauptung auch in der Sprache der Graphentheorie. 8 Punkte

## Aufgabe 21.

Bestimmen und skizzieren Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk (mindestens) vier maximale Flüsse mit ganzzahligen Werten. (Ungerichtete Kanten können dabei in beiden Richtungen mit der angegebenen Kapazität durchlaufen werden).



Ist es möglich, zwei maximale Flüsse mit verschiedenen *zugehörigen* minimalen Schnitten  $L = (A, \bar{A})$  zu finden? 8 Punkte

## Aufgabe 22.

Zeigen Sie, dass ein Graph  $G = (E, K)$  mit  $|E| = n$  und  $|K| > \binom{n-1}{2}$  zusammenhängend ist. Gibt es einen unzusammenhängenden Graphen mit  $n$  Ecken und  $|K| = \binom{n-1}{2}$  Kanten? 7 Punkte



## Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

### Aufgabe 10.

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem endlichen Körper  $\mathbb{F}_2$  an:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & x_3 & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Wieviele Lösungen gibt es? (4 Punkte)

---

### Aufgabe 11.

Es sei  $K$  ein Körper. Für  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei  $p_i \in \text{Abb}(K, K)$  durch  $p_i(x) = x^i$  definiert (wobei  $p_0(0) := 1$ ).

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{M} := \{p_0 + p_1, p_0 + p_1 + p_2\}$  linear unabhängig in  $\text{Abb}(K, K)$  ist. (2 Punkte)
- (b) Ergänzen Sie  $\mathcal{M}$  zu einer Basis von  $P_3(K) = \langle \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \rangle$ . (2 Punkte)
- 

### Aufgabe 12.

- (a) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$\text{Kern}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ y & y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\text{Bild}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(2 Punkte)

- (b) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\psi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$\text{Kern}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\text{Bild}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(3 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder eine solche Abbildung an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

*Bitte wenden* →

**Aufgabe 13.**

(a) Ist die Abbildung  $f : \mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3, x \mapsto x^2 + x$  surjektiv? (2 Punkte)

(b) Ist die Abbildung  $f : \mathbb{F}_3^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{F}_3^{2 \times 3}, X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$  surjektiv? (3 Punkte)

---

**Aufgabe 14.**

Sei  $K$  ein Körper,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2 \times 2}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(X) = AX - XA$  für alle  $X \in V$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)

(b) Geben Sie je eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  und  $\text{Bild}(\varphi)$  an. (3 Punkte)

(c) Ergänzen Sie eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  zu einer Basis von  $V$ . (2 Punkte)

## Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 3 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

**Aufgabe 1.** Sei  $K$  ein Körper,  $W$  ein  $K$ -Vektorraum und  $V_1$  und  $V_2$  Teilräume von  $W$ .

Dann gilt:

$W = \{k \cdot w \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$W = V_1 + V_2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$W \times K = \{w \cdot k \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$V_1 \cap V_2$ ist Teilraum von $W$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$W + V_1 = W + V_2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein

**Aufgabe 2.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\text{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\text{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \text{für alle } w \in M \text{ ist } \varphi(v) = w\}$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w)$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $V$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein

**Aufgabe 3.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^3$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\emptyset$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\langle \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \rangle$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist linear}\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein

**Aufgabe 4.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(1, 0, 1), (1, 2), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 2, 3), (0, 2, 0)\}$ ist Basis des Teilraums $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ von $\mathbb{R}^3$	<input type="checkbox"/>	Ja	<input type="checkbox"/>	Nein

*Bitte wenden →*

**Aufgabe 5.**  $K$  sei ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $X \subseteq V$  eine Teilmenge von  $V$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Ist $X$ Basis von $V$ , dann ist $X$ endlich   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $X$ Basis von $V$ , dann ist $X$ auch Erzeugendensystem von $V$  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $X$ linear abhängig, dann ist $X$ kein Erzeugendensystem von $V$                                       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $X$ linear unabhängig, dann existiert kein $v \in X$ mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$     | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn ein $v \in V \setminus \langle X \rangle$ existiert, dann ist $X \setminus \{v\}$ keine Basis von $V$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 6.** Es sei  $K$  ein Körper und alle  $K^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) seien als  $K$ -Vektorräume aufgefasst. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi : K^2 \rightarrow K^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2 + x_1, x_1)$   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K^2 \rightarrow K, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K, x \mapsto 1$                                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K^2, x \mapsto (x, x + x)$                         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K, x \mapsto 0$                                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 7.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume.  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : V \rightarrow W$  seien zwei lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) \supseteq \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Kern}(\psi)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Bild}(\varphi + \psi) \subseteq \text{Bild}(\varphi) + \text{Bild}(\psi)$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) = \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Kern}(\psi)$         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Bild}(\varphi - \psi) \supseteq \text{Bild}(\varphi) + \text{Bild}(\psi)$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) = \text{Kern}(\varphi) + \text{Kern}(\psi)$            | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 8.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \rightarrow \mathbb{R}^{1999}$ ist surjektiv.        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$ ist injektiv.         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \rightarrow \mathbb{R}^{1999}$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 9.** Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| — heißt homogen, wenn $b_1 = 0$ ist.  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — ist lösbar, wenn $m = n$ ist.   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — hat einen Lösungsraum der Dimension $n - \text{Rg}[a_{ij}]$ , falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — kann unlösbar sein, wenn $b_1 \neq 0$ ist.  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — hat immer die Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$ .   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

# Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

## Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

**Aufgabe 1.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A, A', T \in K^{n \times n}$  (nicht notwendig invertierbar) mit  $AT = TA'$ . Dann gilt:

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\det A = \det A'$                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A + A') = \det A + \det A'$               | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det A = \det A'$ , wenn $AT$ invertierbar ist | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(TA') = \det(TA)$                          | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ( $x \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3.** Es seien  $K$  ein Körper und  $K[X]$  der Polynomring in einer Unbestimmten  $X$  über  $K$ . Es seien  $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ .

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{Grad}(f + g) = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Grad}(fg) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$                                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Grad}(f + g) = \text{Grad}(f - g)$  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$ mit $\text{Grad}(rq) < \text{Grad}(g)$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $g$ ein Teiler von $f$ , dann ist jede Nullstelle von $f$ auch eine von $g$ .        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 4.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A \in K^{k \times l}$ ,  $B \in K^{l \times m}$  und  $C \in K^{m \times n}$ . Dann gilt:

$\text{Rang}(AB) \leq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$   Ja  Nein

$\text{Rang}(AB) \geq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$   Ja  Nein

$\text{Rang}(ABC) = \text{Rang}(AB) + \text{Rang}(BC) - \text{Rang}(B)$   Ja  Nein

$\text{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$   Ja  Nein

$\text{Rang}(ABC) > 0$  wenn,  $ABC \neq 0$   Ja  Nein

**Aufgabe 5.** Sei  $n \geq 4$  eine natürliche Zahl und  $S_n$  die symmetrische Gruppe auf  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Es seien  $\sigma$  und  $\tau$  Permutationen aus  $S_n$ . Dann gilt:

$\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\tau \circ \sigma)$   Ja  Nein

$\text{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$   Ja  Nein

$(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$   Ja  Nein

Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln.  Ja  Nein

Es gibt ein  $\tau \in S_n$  mit  $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$   Ja  Nein

**Aufgabe 6.** Sei  $K$  ein Körper,  $M \in K^{n \times n}$ ,  $\chi_M$  das charakteristische Polynom von  $M$ ,  $t \in K$  und  $(X - t)^2$  ein Teiler von  $\chi_M$ . Dann gilt:

$t$  ist Eigenwert von  $M$ .  Ja  Nein

$M$  hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert  $t$ .  Ja  Nein

$\chi_M(M)$  bildet jeden Eigenvektor von  $M$  auf 0 ab.  Ja  Nein

Der Rang von  $M$  ist gleich  $n$ , wenn  $X$  kein Teiler von  $\chi_M$  ist.  Ja  Nein

Das Minimalpolynom von  $M$  ist durch  $(X - t)$  teilbar.  Ja  Nein

**Aufgabe 7.** Sei  $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$  und  $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$ .

Es gibt eine surjektive Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$ .  Ja  Nein

Jede Abbildung  $\varphi : B \rightarrow A$  ist surjektiv.  Ja  Nein

Die Abbildung  $\varphi : A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$  ist surjektiv.  Ja  Nein

Es gibt eine injektive Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$ .  Ja  Nein

Jede Abbildung  $\varphi : B \rightarrow A$  ist injektiv.  Ja  Nein

**Aufgabe 8.** Sind die folgenden Aussagen richtig?

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.  Ja  Nein

Eine  $n \times n$ -Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie  $n$  verschiedene Eigenwerte hat.  Ja  Nein

Jede  $n \times n$ -Matrix ist diagonalisierbar.  Ja  Nein

Eine  $n \times n$ -Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat.  Ja  Nein

Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer  $n \times n$ -Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit.  Ja  Nein

## Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

### Aufgabe 9.

Sei  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Man berechne  $\det(A)$ .

(6 Punkte)

---

### Aufgabe 10.

Seien  $V := \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und

$$\mathcal{B} := \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \rightarrow V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  eine Basisfolge von  $V$  ist. (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
- (c) Berechnen Sie  ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ . (4 Punkte)

---

### Aufgabe 11.

Sei  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\varphi, \psi \in \text{End } V$  definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T & \text{für } A \in V & \quad (\text{Transponierte zu } A) \\ \psi(A) &= A^T + 3A & \text{für } A \in V \end{aligned}$$

- (a) Man beweise, dass  $\varphi$  und  $\psi$  diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von  $\varphi$  und von  $\psi$ . (4 Punkte)
- (b) Für  $n = 2$  gebe man explizit eine Basis von  $V$  an, die aus Eigenvektoren von  $\psi$  besteht. (4 Punkte)

**Aufgabe 12.**

Sei  $A \in \mathbb{F}_5^{3 \times 3}$  die folgende Matrix ( $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ . (4 Punkte)
  - (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ . (2 Punkte)
  - (c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von  $A$ . (2 Punkte)
  - (d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)
- 

**Aufgabe 13.**

Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

(8 Punkte)



# Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

## Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

**Aufgabe 1.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A, A', T \in K^{n \times n}$  (nicht notwendig invertierbar) mit  $AT = TA'$ . Dann gilt:

$\det A = \det A'$

Ja  Nein

$\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$

Ja  Nein

$\det(A + A') = \det A + \det A'$

Ja  Nein

$\det A = \det A'$ , wenn  $AT$  invertierbar ist

Ja  Nein

$\det(TA') = \det(TA)$

Ja  Nein

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ( $x \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3.** Es seien  $K$  ein Körper und  $K[X]$  der Polynomring in einer Unbestimmten  $X$  über  $K$ . Es seien  $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ .

$\text{Grad}(f + g) = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Ja  Nein

$\text{Grad}(fg) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$

Ja  Nein

$\text{Grad}(f + g) = \text{Grad}(f - g)$

Ja  Nein

Es gibt  $q, r \in K[X]$  mit  $f = q \cdot g + r$  mit  $\text{Grad}(rq) < \text{Grad}(g)$ .

Ja  Nein

Ist  $g$  ein Teiler von  $f$ , dann ist jede Nullstelle von  $f$  auch eine von  $g$ .

Ja  Nein

**Aufgabe 4.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A \in K^{k \times l}$ ,  $B \in K^{l \times m}$  und  $C \in K^{m \times n}$ . Dann gilt:

- $\text{Rang}(AB) \leq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(AB) \geq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(ABC) = \text{Rang}(AB) + \text{Rang}(BC) - \text{Rang}(B)$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(ABC) > 0$  wenn,  $ABC \neq 0$   Ja  Nein

**Aufgabe 5.** Sei  $n \geq 4$  eine natürliche Zahl und  $S_n$  die symmetrische Gruppe auf  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Es seien  $\sigma$  und  $\tau$  Permutationen aus  $S_n$ . Dann gilt:

- $\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\tau \circ \sigma)$   Ja  Nein  
 $\text{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$   Ja  Nein  
 $(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$   Ja  Nein  
 Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln.  Ja  Nein  
 Es gibt ein  $\tau \in S_n$  mit  $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$   Ja  Nein

**Aufgabe 6.** Sei  $K$  ein Körper,  $M \in K^{n \times n}$ ,  $\chi_M$  das charakteristische Polynom von  $M$ ,  $t \in K$  und  $(X - t)^2$  ein Teiler von  $\chi_M$ . Dann gilt:

- $t$  ist Eigenwert von  $M$ .  Ja  Nein  
 $M$  hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert  $t$ .  Ja  Nein  
 $\chi_M(M)$  bildet jeden Eigenvektor von  $M$  auf 0 ab.  Ja  Nein  
 Der Rang von  $M$  ist gleich  $n$ , wenn  $X$  kein Teiler von  $\chi_M$  ist.  Ja  Nein  
 Das Minimalpolynom von  $M$  ist durch  $(X - t)$  teilbar.  Ja  Nein

**Aufgabe 7.** Sei  $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$  und  $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$ .

- Es gibt eine surjektive Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$ .  Ja  Nein  
 Jede Abbildung  $\varphi : B \rightarrow A$  ist surjektiv.  Ja  Nein  
 Die Abbildung  $\varphi : A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$  ist surjektiv.  Ja  Nein  
 Es gibt eine injektive Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$ .  Ja  Nein  
 Jede Abbildung  $\varphi : B \rightarrow A$  ist injektiv.  Ja  Nein

**Aufgabe 8.** Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.  Ja  Nein  
 Eine  $n \times n$ -Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie  $n$  verschiedene Eigenwerte hat.  Ja  Nein  
 Jede  $n \times n$ -Matrix ist diagonalisierbar.  Ja  Nein  
 Eine  $n \times n$ -Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat.  Ja  Nein  
 Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer  $n \times n$ -Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit.  Ja  Nein

## Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

### Aufgabe 9.

Sei  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Man berechne  $\det(A)$ .

(6 Punkte)

---

### Aufgabe 10.

Seien  $V := \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und

$$\mathcal{B} := \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \rightarrow V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  eine Basisfolge von  $V$  ist. (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
- (c) Berechnen Sie  ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ . (4 Punkte)

---

### Aufgabe 11.

Sei  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\varphi, \psi \in \text{End } V$  definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T & \text{für } A \in V & \quad (\text{Transponierte zu } A) \\ \psi(A) &= A^T + 3A & \text{für } A \in V \end{aligned}$$

- (a) Man beweise, dass  $\varphi$  und  $\psi$  diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von  $\varphi$  und von  $\psi$ . (4 Punkte)
- (b) Für  $n = 2$  gebe man explizit eine Basis von  $V$  an, die aus Eigenvektoren von  $\psi$  besteht. (4 Punkte)

**Aufgabe 12.**

Sei  $A \in \mathbb{F}_5^{3 \times 3}$  die folgende Matrix ( $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ . (4 Punkte)
  - (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ . (2 Punkte)
  - (c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von  $A$ . (2 Punkte)
  - (d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)
- 

**Aufgabe 13.**

Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

(8 Punkte)

## Nachholklausur zur Linearen Algebra I

WS99/00

**Ankreuzteil**

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathbb{Q}$  der Körper der rationalen Zahlen und  $V$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ . Sind die folgenden Teilmengen Teilräume?

- |   |       |                             |                               |
|---|-------|-----------------------------|-------------------------------|
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ y & x \end{array} \right] \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$ | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & 1 \\ 0 & x \end{array} \right] \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$    | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{array} \right] \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$   | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \det A = 0\}$   | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 2.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{Kern}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } \varphi(v) \neq w\}$       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in M\}$ ein Teilraum von $V$     | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi^2)$ , falls $V = W$                                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $V$        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 3.** Es seien  $A, A', S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (nicht notwendig invertierbar) mit  $AS = SA'$ . Dann gilt:

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\det A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N} \implies \det A = 0$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A \cdot A^T) \geq 0$                                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A + A') = \det A + \det A'$                             | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det A = \det A'$  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(sA) = s \det(A)$ für alle $s \in \mathbb{R}$            | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 4.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $\{[1, 0, 1], [1, 1, 1]\}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .  Ja  Nein  
 $\{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [2, 2, 1]\}$  ist Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .  Ja  Nein  
 $\{[1, 0], [1, -1]\}$  ist linear unabhängig in  $\mathbb{R}^{1 \times 2}$ .  Ja  Nein  
 $\{[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 1, 1]\}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .  Ja  Nein  
 $\{[1, 1, 1], [1, 1, 0]\}$  ist Basis des Teilraums  $\langle [1, 2, 0], [2, 2, 1] \rangle$  von  $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .  Ja  Nein

---

**Aufgabe 5.** Es seien  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : W \rightarrow U$  lineare Abbildungen zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $V$ ,  $W$  und  $U$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  injektiv sind, dann ist auch  $\psi \circ \varphi$  injektiv.  Ja  Nein  
Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  surjektiv sind, dann ist auch  $\psi \circ \varphi$  surjektiv.  Ja  Nein  
Wenn  $\varphi$  surjektiv und  $\psi$  injektiv ist, dann ist auch  $\psi \circ \varphi$  injektiv.  Ja  Nein  
Wenn  $\psi \circ \varphi$  surjektiv ist, dann ist auch  $\psi$  surjektiv.  Ja  Nein  
Wenn  $\psi \circ \varphi$  injektiv ist, dann ist auch  $\psi$  injektiv.  Ja  Nein

---

**Aufgabe 6.**  $S$  sei ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 3 Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- Jedes solche  $S$  hat eine Lösung.  Ja  Nein  
Es gibt ein solches  $S$ , das eindeutig lösbar ist.  Ja  Nein  
Es gibt ein solches  $S$ , das genau 2 Lösungen hat.  Ja  Nein  
Es gibt ein solches  $S$ , das unendlich viele Lösungen hat.  Ja  Nein  
Jedes solche  $S$  hat unendlich viele Lösungen.  Ja  Nein

---

**Aufgabe 7.** Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Dann gilt:

- Ist  $A^m = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , so ist  $\text{Rang}(A) < n$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(A + B) \geq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(c \cdot c^T) = 1$ , falls  $c \neq 0$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(c^T \cdot c) = 1$ , falls  $c \neq 0$   Ja  Nein  
 $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(BA)$   Ja  Nein

---

**Aufgabe 8.** Welche der folgenden Matrizen aus  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  sind diagonalisierbar?

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  \_\_\_\_\_  Ja  Nein  
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  \_\_\_\_\_  Ja  Nein  
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  \_\_\_\_\_  Ja  Nein  
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  \_\_\_\_\_  Ja  Nein  
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  \_\_\_\_\_  Ja  Nein

## Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

### Aufgabe 9.

Sei  $V := \mathbb{R}^{1 \times 2}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  die Abbildung, die durch  $\varphi([x, y]) = [3x - 7y, x - 2y]$  gegeben ist. Seien weiter  $\mathcal{B}_1 := ([1, 2], [2, 1])$  und  $\mathcal{B}_2 := ([0, 1], [-1, 0])$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
  - (b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  Basisfolgen von  $V$  sind. (2 Punkte)
  - (c) Berechnen Sie  ${}_{B_1}[\text{id}_V]_{B_2}$  und  ${}_{B_2}[\varphi]_{B_1}$ . (2 Punkte)
  - (d) Wie erhält man  ${}_{B_1}[\varphi]_{B_1}$  und  ${}_{B_2}[\varphi]_{B_2}$  direkt aus den Ergebnissen aus (c)? (2 Punkte)
- 

### Aufgabe 10.

Sei  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und

$$a_{ij} = i \cdot j \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

Man berechne  $\text{Rang}(A)$  und  $\det(A)$ . (6 Punkte)

---

### Aufgabe 11.

Sei  $K$  ein Körper,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2 \times 2}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(X) = AX - XA$  für alle  $X \in V$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
- (b) Geben Sie je eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  und  $\text{Bild}(\varphi)$  an. (3 Punkte)
- (c) Ergänzen Sie eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  zu einer Basis von  $V$ . (3 Punkte)

**Aufgabe 12.**

Es sei  $K$  ein Körper, in dem  $1 \neq -1$  gilt. Weiter sei  $\varphi : K^{1 \times n} \rightarrow K^{1 \times n}$  die lineare Abbildung, die Vektoren „spiegelt“, es gelte also  $\varphi([x_1, x_2, \dots, x_n]) = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1]$ .

- (a) Man berechne das Minimalpolynom von  $\varphi$ . (2 Punkte)
  - (b) Ist  $\varphi$  diagonalisierbar? (2 Punkte)
  - (c) Was sind die Eigenwerte von  $\varphi$ ? (2 Punkte)
  - (d) Geben Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)
- 

**Aufgabe 13.**

Es sei  $A \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$  die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie: 1 ist Eigenwert von  $A$ . (3 Punkte)
- (b) Berechnen Sie den Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert 1. (3 Punkte)
- (c) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von  $A$ . (4 Punkte)



## Nachholklausur zur Linearen Algebra I

WS99/00

**Ankreuzteil**

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathbb{Q}$  der Körper der rationalen Zahlen und  $V$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ . Sind die folgenden Teilmengen Teilräume?

- |   |       |                             |                               |
|---|-------|-----------------------------|-------------------------------|
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ y & x \end{array} \right] \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$ | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & 1 \\ 0 & x \end{array} \right] \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$    | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{ \left[ \begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{array} \right] \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$   | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \det A = 0\}$   | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 2.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |   |       |                             |                               |
|---|-------|-----------------------------|-------------------------------|
| Kern( $\varphi$ ) = $\{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } \varphi(v) \neq w\}$       | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in M\}$ ein Teilraum von $V$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern( $\varphi$ ) $\subseteq$ Kern( $\varphi^2$ ), falls $V = W$                                    | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $V$     | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild( $\varphi$ ) = $\{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$ | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 3.** Es seien  $A, A', S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (nicht notwendig invertierbar) mit  $AS = SA'$ . Dann gilt:

- |  |       |                             |                               |
|--|-------|-----------------------------|-------------------------------|
| det $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N} \implies \det A = 0$ | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| det( $A \cdot A^T$ ) $\geq 0$                                | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| det( $A + A'$ ) = det $A$ + det $A'$                         | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| det $A$ = det $A'$   | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| det( $sA$ ) = $s \det(A)$ für alle $s \in \mathbb{R}$        | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 4.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\{[1, 0, 1], [1, 1, 1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [2, 2, 1]\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .                               | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{[1, 0], [1, -1]\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^{1 \times 2}$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 1, 1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ .   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{[1, 1, 1], [1, 1, 0]\}$ ist Basis des Teilraums $\langle [1, 2, 0], [2, 2, 1] \rangle$ von $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 5.** Es seien  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : W \rightarrow U$  lineare Abbildungen zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $V$ ,  $W$  und  $U$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Wenn $\varphi$ und $\psi$ injektiv sind, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv.          | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn $\varphi$ und $\psi$ surjektiv sind, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv.        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn $\varphi$ surjektiv und $\psi$ injektiv ist, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn $\psi \circ \varphi$ surjektiv ist, dann ist auch $\psi$ surjektiv.                       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn $\psi \circ \varphi$ injektiv ist, dann ist auch $\psi$ injektiv.                         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 6.**  $S$  sei ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 3 Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Jedes solche $S$ hat eine Lösung.                           | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt ein solches $S$ , das eindeutig lösbar ist.         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt ein solches $S$ , das genau 2 Lösungen hat.         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt ein solches $S$ , das unendlich viele Lösungen hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jedes solche $S$ hat unendlich viele Lösungen.              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 7.** Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Dann gilt:

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Ist $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ , so ist $\text{Rang}(A) < n$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(A + B) \geq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(c \cdot c^T) = 1$ , falls $c \neq 0$                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(c^T \cdot c) = 1$ , falls $c \neq 0$                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(BA)$                                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 8.** Welche der folgenden Matrizen aus  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  sind diagonalisierbar?

- |   |       |                             |                               |
|---|-------|-----------------------------|-------------------------------|
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ | _____ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

## Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

### Aufgabe 9.

Sei  $V := \mathbb{R}^{1 \times 2}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  die Abbildung, die durch  $\varphi([x, y]) = [3x - 7y, x - 2y]$  gegeben ist. Seien weiter  $\mathcal{B}_1 := ([1, 2], [2, 1])$  und  $\mathcal{B}_2 := ([0, 1], [-1, 0])$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
  - (b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  Basisfolgen von  $V$  sind. (2 Punkte)
  - (c) Berechnen Sie  ${}_{B_1}[\text{id}_V]_{B_2}$  und  ${}_{B_2}[\varphi]_{B_1}$ . (2 Punkte)
  - (d) Wie erhält man  ${}_{B_1}[\varphi]_{B_1}$  und  ${}_{B_2}[\varphi]_{B_2}$  direkt aus den Ergebnissen aus (c)? (2 Punkte)
- 

### Aufgabe 10.

Sei  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und

$$a_{ij} = i \cdot j \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

Man berechne  $\text{Rang}(A)$  und  $\det(A)$ . (6 Punkte)

---

### Aufgabe 11.

Sei  $K$  ein Körper,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2 \times 2}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi(X) = AX - XA$  für alle  $X \in V$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist. (2 Punkte)
- (b) Geben Sie je eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  und  $\text{Bild}(\varphi)$  an. (3 Punkte)
- (c) Ergänzen Sie eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  zu einer Basis von  $V$ . (3 Punkte)

**Aufgabe 12.**

Es sei  $K$  ein Körper, in dem  $1 \neq -1$  gilt. Weiter sei  $\varphi : K^{1 \times n} \rightarrow K^{1 \times n}$  die lineare Abbildung, die Vektoren „spiegelt“, es gelte also  $\varphi([x_1, x_2, \dots, x_n]) = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1]$ .

- (a) Man berechne das Minimalpolynom von  $\varphi$ . (2 Punkte)
  - (b) Ist  $\varphi$  diagonalisierbar? (2 Punkte)
  - (c) Was sind die Eigenwerte von  $\varphi$ ? (2 Punkte)
  - (d) Geben Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)
- 

**Aufgabe 13.**

Es sei  $A \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$  die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie: 1 ist Eigenwert von  $A$ . (3 Punkte)
- (b) Berechnen Sie den Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert 1. (3 Punkte)
- (c) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von  $A$ . (4 Punkte)

# Test 1 im WS99/00

**T1)** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann gilt:

$V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$V \times V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$K \times V = \{s \cdot v \mid s \in K \text{ und } v \in V\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T2)** Seien  $K, V$  wie in T1),  $U$  ein Teilraum von  $V$  und  $u, v \in V$ . Dann gilt:

$u, v \in U \implies u + v \in U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$u, v \notin U \implies u + v \notin U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$u \in U, v \notin U \implies u + v \notin U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$s \in K, u \notin U \implies s \cdot u \notin U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$u \in U, v \notin U \implies u + v \in U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T3)** Sind die folgenden Teilmengen auch Teilräume des  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes  $\mathbb{R}^3$ ?

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(x, 1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(0, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\emptyset$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T4)** Sei  $V$  ein Vektorraum.

Ist $U$ Teilraum von $V$ , so ist stets $V \setminus U$ auch Teilraum.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
Es gibt einen Teilraum $U$ von $V$ , so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
Es gibt keinen Teilraum $U$ von $V$ , so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T5)** Sei  $V$  ein Vektorraum.  $X \subseteq V$  ist genau dann linear unabhängig, wenn

– für jedes $v \in X$ gilt $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
– $0 \in \langle X \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
– es ein $v \in V$ gibt mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T6)** Sind die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig?

$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(1, 1, 1), (0, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\emptyset$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(0, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T7)** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Dann gilt:

$X$ linear unabhängig $\implies Y$ linear unabhängig	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$X$ linear abhängig $\implies Y$ linear abhängig	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$X$ ist Erzeugendensystem von $V \implies Y$ ist Erzeugendensystem von $V$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$Y$ ist Erzeugendensystem von $V \implies X$ ist Erzeugendensystem von $V$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort –1 Punkt.

# Test 1 im WS99/00

**T1)** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann gilt:

$V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$V \times V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$K \times V = \{s \cdot v \mid s \in K \text{ und } v \in V\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**T2)** Seien  $K, V$  wie in T1),  $U$  ein Teilraum von  $V$  und  $u, v \in V$ . Dann gilt:

$u, v \in U \implies u + v \in U$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$u, v \notin U \implies u + v \notin U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$u \in U, v \notin U \implies u + v \notin U$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$s \in K, u \notin U \implies s \cdot u \notin U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$u \in U, v \notin U \implies u + v \in U$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**T3)** Sind die folgenden Teilmengen auch Teilräume des  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes  $\mathbb{R}^3$ ?

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(x, 1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$\{(0, 0, 0)\}$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\emptyset$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**T4)** Sei  $V$  ein Vektorraum.

Ist $U$ Teilraum von $V$ , so ist stets $V \setminus U$ auch Teilraum.	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
Es gibt einen Teilraum $U$ von $V$ , so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
Es gibt keinen Teilraum $U$ von $V$ , so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

**T5)** Sei  $V$  ein Vektorraum.  $X \subseteq V$  ist genau dann linear unabhängig, wenn

– für jedes $v \in X$ gilt $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
– $0 \in \langle X \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
– es ein $v \in V$ gibt mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ .	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**T6)** Sind die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig?

$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$\{(1, 1, 1), (0, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$\emptyset$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$\{(0, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**T7)** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Dann gilt:

$X$ linear unabhängig $\implies Y$ linear unabhängig	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein
$X$ linear abhängig $\implies Y$ linear abhängig	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$X$ ist Erzeugendensystem von $V \implies Y$ ist Erzeugendensystem von $V$	<input checked="" type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
$Y$ ist Erzeugendensystem von $V \implies X$ ist Erzeugendensystem von $V$	<input type="checkbox"/> Ja	<input checked="" type="checkbox"/> Nein

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort –1 Punkt.

# Test 2 im WS99/00

Es sei  $K$  ein Körper und  $U, V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume.

**T1)** Ist  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{R}$ -linear, so gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi(0) = 0$                                   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(1) = 1$                                   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$          | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild $\varphi = \mathbb{R}$                        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T2)** Ist  $\varphi : V \rightarrow W$  linear, so ist:

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Kern $\varphi = \{\varphi(v)   v = \mathbf{0}\}$          | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern $\varphi = \{v \in V   \varphi(v) = \mathbf{0}\}$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ surjektiv $\iff \varphi$ injektiv               | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ injektiv $\iff$ Kern $\varphi = \{\mathbf{0}\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T3)** Sind  $\varphi : U \rightarrow V$  und  $\psi : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen, so gilt:

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Kern $\varphi$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Kern $\psi$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\supseteq$ Kern $\varphi$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Bild $\psi$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Bild $\varphi$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\supseteq$ Bild $\psi$    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T4)** Welche der folgenden Abbildungen sind linear? ( $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorräume)

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$                             | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$                          | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$                            | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$                 | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T5)** Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv.         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T6)** Es sei  $\varphi : V \rightarrow W$  linear und  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Ist $\varphi$ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von $W$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $\varphi$ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von $W$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $V \cong W$ , so ist $\varphi$ ein Isomorphismus.   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $\varphi$ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ für jedes $n$ -Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von $W$ . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**T7)** Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| ist lösbar, wenn $n \geq m$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn $\text{Rg}[a_{ij}] = 0$ ist.                                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar.  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $\text{Rg}[a_{ij}]$ .                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$ , falls $b_1 = \dots = b_m = 0$ ist.       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

# Test 2 im WS99/00

Es sei  $K$  ein Körper und  $U, V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume.

**T1)** Ist  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{R}$ -linear, so gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $\varphi(0) = 0$                                   | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi(1) = 1$                                   | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$          | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$         | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| Bild $\varphi = \mathbb{R}$                        | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T2)** Ist  $\varphi : V \rightarrow W$  linear, so ist:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| Kern $\varphi = \{\varphi(v)   v = \mathbf{0}\}$          | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Kern $\varphi = \{v \in V   \varphi(v) = \mathbf{0}\}$    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi$ surjektiv $\iff \varphi$ injektiv               | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ injektiv $\iff$ Kern $\varphi = \{\mathbf{0}\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T3)** Sind  $\varphi : U \rightarrow V$  und  $\psi : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen, so gilt:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Kern $\varphi$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Kern $\psi$    | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Kern( $\psi \circ \varphi$ ) $\supseteq$ Kern $\psi$    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Bild $\psi$    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\subseteq$ Bild $\varphi$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Bild( $\psi \circ \varphi$ ) $\supseteq$ Bild $\psi$    | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T4)** Welche der folgenden Abbildungen sind linear? ( $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorräume)

- |   |  |  |
|---|--|--|
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$                             | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$                          | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$                            | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$                 | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T5)** Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |  |  |  |
|--|--|--|
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.        | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv.         | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T6)** Es sei  $\varphi : V \rightarrow W$  linear und  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- |   |  |  |
|---|--|--|
| Ist $\varphi$ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von $W$ .  | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist $\varphi$ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von $W$ .  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| Ist $V \cong W$ , so ist $\varphi$ ein Isomorphismus.   | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist $\varphi$ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ für jedes $n$ -Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von $W$ . | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T7)** Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- |  |                             |  |
|--|-----------------------------|--|
| ist lösbar, wenn $n \geq m$ .  | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn $\text{Rg}[a_{ij}] = 0$ ist.                                | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar.  | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $\text{Rg}[a_{ij}]$ .                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$ , falls $b_1 = \dots = b_m = 0$ ist.       | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.



# Test 3 im WS99/00

In allen Aufgaben sei  $K$  ein Körper.

**T1)** Seien  $A, A' \in K^{n \times n}$ . Wenn  $A'$  aus  $A$  durch elementare Zeilenumformungen entsteht, dann gilt

- $\det(A') = \det(A)$   Ja  Nein  
 $\det(A') = \pm \det(A)$   Ja  Nein  
 $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A') = 0$   Ja  Nein

**T2)** Für  $A, B \in K^{n \times n}$  und  $s \in K$  gilt:

- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$   Ja  Nein  
 $\det(s \cdot A) = s \cdot \det(A)$   Ja  Nein  
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$   Ja  Nein

**T3)** (Ergebnis eintragen). Für  $s \in K$  ist  $\det \left( \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix} \right) =$

**T4)** Sei  $A \in K^{n \times n}$  mit  $\det(A) = 0$  und  $b \in K^{n \times 1}$ . Dann ist das Gleichungssystem  $Ax = b$

- nur lösbar für  $b = \underline{0}$ .  Ja  Nein  
– für jedes  $b$  lösbar, aber nicht eindeutig.  Ja  Nein  
– für manche  $b$  lösbar, aber für kein  $b$  eindeutig lösbar.  Ja  Nein

**T5)** Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über  $\mathbb{F}_2$

- ist stets lösbar.  Ja  Nein  
– ist nie eindeutig lösbar.  Ja  Nein  
– kann genau 4 Lösungen haben.  Ja  Nein  
– kann genau 2 Lösungen haben.  Ja  Nein

**T6)** Sei  $B \in K^{3 \times 2}$ ,  $C \in K^{2 \times 3}$  und  $A = BC$ . Dann gilt:

- $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$   Ja  Nein  
 $\det(A)$  ist nicht definiert  Ja  Nein  
 $\det(A) = 0$   Ja  Nein

**T7)** Seien  $f, g \in K[X]$  Polynome und sei  $f$  vom Grad  $n > 0$ . Dann gilt:

- $fg = 0 \Rightarrow g = 0$   Ja  Nein  
für  $A \in K^{2 \times 2}$  mit  $f \cdot g(A) = 0$  ist  $g(A) = 0$   Ja  Nein  
 $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) \cdot \text{Grad}(g)$ , falls  $g \neq 0$   Ja  Nein  
 $K[X] \ni X - a \neq 0$  für jedes  $a \in K$   Ja  Nein

**T8)** Sei  $A \in \mathbb{Q}^{10 \times 10}$  mit  $A^6 = E_{10}$ .

Dann ist  $\det(A) = 1$ .  Ja  Nein

Der Rang von  $A$  ist

# Test 3 im WS99/00

In allen Aufgaben sei  $K$  ein Körper.

**T1)** Seien  $A, A' \in K^{n \times n}$ . Wenn  $A'$  aus  $A$  durch elementare Zeilenumformungen entsteht, dann gilt

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $\det(A') = \det(A)$                       | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A') = \pm \det(A)$                   | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A') = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T2)** Für  $A, B \in K^{n \times n}$  und  $s \in K$  gilt:

- |                                     |  |  |
|-------------------------------------|--|--|
| $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$   | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(s \cdot A) = s \cdot \det(A)$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T3)** (Ergebnis eintragen). Für  $s \in K$  ist  $\det \left( \begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix} \right) =$  0

**T4)** Sei  $A \in K^{n \times n}$  mit  $\det(A) = 0$  und  $b \in K^{n \times 1}$ . Dann ist das Gleichungssystem  $Ax = b$

- |  |  |  |
|--|--|--|
| – nur lösbar für $b = \underline{0}$ .                       | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| – für jedes $b$ lösbar, aber nicht eindeutig.                | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| – für manche $b$ lösbar, aber für kein $b$ eindeutig lösbar. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T5)** Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über  $\mathbb{F}_2$

- |                                |  |  |
|--------------------------------|--|--|
| – ist stets lösbar.            | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| – ist nie eindeutig lösbar.    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| – kann genau 4 Lösungen haben. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| – kann genau 2 Lösungen haben. | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T6)** Sei  $B \in K^{3 \times 2}$ ,  $C \in K^{2 \times 3}$  und  $A = BC$ . Dann gilt:

- |                                   |  |  |
|-----------------------------------|--|--|
| $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A)$ ist nicht definiert     | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A) = 0$                     | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T7)** Seien  $f, g \in K[X]$  Polynome und sei  $f$  vom Grad  $n > 0$ . Dann gilt:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| $fg = 0 \Rightarrow g = 0$  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |
| für $A \in K^{2 \times 2}$ mit $f \cdot g(A) = 0$ ist $g(A) = 0$                  | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) \cdot \text{Grad}(g)$ , falls $g \neq 0$ | <input type="checkbox"/> Ja            | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $K[X] \ni X - a \neq 0$ für jedes $a \in K$                                       | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein            |

**T8)** Sei  $A \in \mathbb{Q}^{10 \times 10}$  mit  $A^6 = E_{10}$ .

Dann ist  $\det(A) = 1$ .  Ja  Nein

Der Rang von  $A$  ist 10

# Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei  $K$  ein Körper.

**T1)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \dots, 10\}$  ( $x \in \mathbb{F}_{11}$ ):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**T2)** Es seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$  und  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |  |   |
|--|---|
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2 \times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3 \times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |

**T3)** Sei  $\varphi \in \text{End } V$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_{\varphi} = (X - 1)^5$  und Minimalpolynom  $\mu_{\varphi} = (X - 1)^3$ ; ferner sei  $\dim \text{Kern}(\varphi - \text{id}_V) = 2$ . Dann ist die Jordansche Normalform von  $\varphi$  (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**T4)** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\varphi \in \text{End } V$  und  $\dim V = n < \infty$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |   |
|---|---|
| $0 \in K$ kann Eigenwert von $\varphi$ sein.                    | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von $\varphi$ sein.      | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenwerte haben.                        | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenvektoren haben.                     | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ hat immer einen Eigenwert.                            | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist 0 Eigenwert, so ist $\varphi$ die Nullabbildung.            | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| Die Summe von Eigenvektoren von $\varphi$ ist auch Eigenvektor. | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.             | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |

**T5)**  $A$  und  $A'$  seien  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $K$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |   |
|---|---|
| $\chi_A = \chi_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mu_A = \mu_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich   | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \chi_A(0) \neq 0$            | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \mu_A(0) \neq 0$             | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = 0 \iff \chi_A = X^n$                | <input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

# Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei  $K$  ein Körper.

**T1)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \dots, 10\}$  ( $x \in \mathbb{F}_{11}$ ):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**T2)** Es seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$  und  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |  |  |
|--|--|
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2 \times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3 \times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T3)** Sei  $\varphi \in \text{End } V$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_{\varphi} = (X - 1)^5$  und Minimalpolynom  $\mu_{\varphi} = (X - 1)^3$ ; ferner sei  $\dim \text{Kern}(\varphi - \text{id}_V) = 2$ . Dann ist die Jordansche Normalform von  $\varphi$  (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**T4)** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\varphi \in \text{End } V$  und  $\dim V = n < \infty$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |  |
|---|--|
| $0 \in K$ kann Eigenwert von $\varphi$ sein.                    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von $\varphi$ sein.      | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenwerte haben.                        | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenvektoren haben.                     | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ hat immer einen Eigenwert.                            | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist 0 Eigenwert, so ist $\varphi$ die Nullabbildung.            | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Die Summe von Eigenvektoren von $\varphi$ ist auch Eigenvektor. | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.             | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T5)**  $A$  und  $A'$  seien  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $K$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |  |
|---|--|
| $\chi_A = \chi_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mu_A = \mu_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich   | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \chi_A(0) \neq 0$            | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \mu_A(0) \neq 0$             | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = 0 \iff \chi_A = X^n$                | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

## Ankreuzteil

20.9.2000

### Aufgabe 1.

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $1 \leq i, j \leq n$ .  
Sind folgende Aussagen richtig?

- Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig, so ist  $v_i \neq v_j$  für  $i \neq j$  .....  Ja     Nein
- Ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig, so ist  $v_i \neq v_j$  für  $i \neq j$  .....  Ja     Nein
- Ist  $(v_1, v_2)$  linear abhängig, so gibt es  $s \in K$  mit  $v_2 = s \cdot v_1$  .....  Ja     Nein
- Sind  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$  und  $(v_1, v_3)$  linear unabhängig, so ist  
      $(v_1, v_2, v_3)$  linear unabhängig .....  Ja     Nein
- $(v_1, v_2)$  ist linear unabhängig genau dann, wenn  $(v_1 + v_2, v_2)$   
     linear unabhängig ist .....  Ja     Nein

### Aufgabe 2.

Ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{F}_2$

- ist nicht eindeutig lösbar, wenn  $m > n$  ist .....  Ja     Nein
- kann genau 6 Lösungen haben, wenn  $m < n$  ist .....  Ja     Nein
- ist stets lösbar, wenn  $m < n$  ist .....  Ja     Nein
- hat immer eine nicht-triviale Lösung, wenn es homogen ist .....  Ja     Nein
- kann genau 4 Lösungen haben, wenn  $m = n - 1$  ist .....  Ja     Nein

### Aufgabe 3.

Sei  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  und  $\varphi_1 : V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi_1(f)(x) = f(x + 1)$ ,  $\varphi_2 : V \rightarrow V$  durch  $\varphi_2(f)(x) = f(x) + 1$  und  $\varphi_3 : V \rightarrow V$  durch  $\varphi_3(f)(x) = f(x^2)$  für  $f \in V$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

- $\varphi_1$  ist injektiv .....  Ja     Nein
- $\varphi_1$  ist linear .....  Ja     Nein
- $\varphi_2$  ist linear .....  Ja     Nein
- $\varphi_2$  ist surjektiv .....  Ja     Nein
- $\varphi_3$  ist linear .....  Ja     Nein

### Aufgabe 4.

Es sei  $(e_1, e_2, e_3)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Es gibt eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

- $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$  .....  Ja     Nein
- $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$  .....  Ja     Nein
- $\text{Kern}(\varphi) = \text{Bild}(\varphi)$  .....  Ja     Nein
- $\text{Kern}(\varphi) \geq \text{Bild}(\varphi)$  .....  Ja     Nein
- $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_2 + e_3) = \varphi(e_1 + e_3) = e_3$  .....  Ja     Nein

### Aufgabe 5.

Es sei  $V = K^{2 \times 2}$  mit einem beliebigen Körper  $K$ . Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von  $V$ ?

- $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid \text{Rg } A = 1\}$  .....  Ja     Nein
- $\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid A^2 = 0\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid A = A^T\}$  .....  Ja     Nein

**Aufgabe 6.**

Für jeden Körper  $K$ , jedes  $n \in \mathbb{N}$ , alle  $A, B \in K^{n \times n}$  und alle  $s \in K$  gilt:

- $\det(A + B) = \det A + \det B$  .....  Ja     Nein
- $\det(sA) = s \det A$  .....  Ja     Nein
- $\det(AB) = \det(BA)$  .....  Ja     Nein
- $\det A = \det B \implies \det(A - B) = 0$  .....  Ja     Nein
- Ist  $A^2 = E_n$ , so ist  $\det A = 1$  .....  Ja     Nein

**Aufgabe 7.**

Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei  $\chi = \chi_A = \det(X \cdot E_n - A)$  das charakteristische Polynom und  $\mu = \mu_A$  das Minimalpolynom von  $A$ . Dann gilt für jedes solche  $A$ :

- Ist  $f \in \mathbb{C}[X]$  mit  $f(A) = 0$ , so ist  $\chi \mid f$  .....  Ja     Nein
- Ist  $f \in \mathbb{C}[X]$  mit  $\chi \mid f$ , so ist  $f(A) = 0$  .....  Ja     Nein
- Ist  $A^n = 0$ , so ist  $\chi = X^n$  .....  Ja     Nein
- Ist  $A^n = 0$ , so ist  $\mu = X^n$  .....  Ja     Nein
- Ist  $\mu = X^n - 3$ , so ist  $\chi = X^n - 3$  .....  Ja     Nein

**Aufgabe 8.**

Für alle Vektorräume  $V$  und alle  $\varphi \in \text{End } V$  gilt:

- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 1, so ist  $\varphi$  invertierbar .....  Ja     Nein
- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 0, so ist  $\varphi$  nicht invertierbar .....  Ja     Nein
- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 1, so hat  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  ebenfalls den Eigenwert 1  Ja     Nein
- Hat  $\varphi^2$  den Eigenwert 0, so hat  $\varphi$  ebenfalls den Eigenwert 0 .....  Ja     Nein
- Ist  $\varphi^2 = \text{id}_V$  und  $t$  Eigenwert von  $\varphi$ , so ist  $t \in \{1, -1\}$ . .....  Ja     Nein

**Aufgabe 9.** Sei  $2 < n \in \mathbb{N}$  und  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{2n \times 2n}$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \equiv j \pmod{2} \text{ (d.h. } i - j \text{ ist gerade)} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt:

- $\text{Rg } A = n$  .....  Ja     Nein
- $\text{Rg } A = 2$  .....  Ja     Nein
- $\det A = 1$  .....  Ja     Nein
- $A$  ist diagonalisierbar .....  Ja     Nein
- Das Minimalpolynom ist  $X^3 - n^2X$  .....  Ja     Nein

**Aufgabe 10.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A, B \in K^{n \times n}$ .

- Ist  $A$  kongruent zu einer Diagonalmatrix, dann ist  $A$  symmetrisch ..  Ja     Nein
- Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix ...  Ja     Nein
- Sind  $A$  und  $B$  kongruent, so sind sie ähnlich .....  Ja     Nein
- Sind  $A$  und  $B$  kongruent, so haben sie die gleiche Determinante ....  Ja     Nein
- Sind  $A$  und  $B$  ähnlich, so haben sie die gleiche Spur .....  Ja     Nein

## Aufgaben mit Begründung

### Aufgabe 11.

Bestimmen Sie alle  $t \in \mathbb{R}$ , für die das Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} tx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + tx_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) lösbar ist,
  - (b) eindeutig lösbar ist.
  - (c) Zu jedem  $t$  gebe man die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an. (6 Punkte)
- 

### Aufgabe 12.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V = K^{2 \times 2}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V \\ A &\mapsto A^T + A \end{aligned}$$

und  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ . Hierbei ist  $E_{ij}$  die Matrix, die an der Stelle  $(i, j)$  eine Eins und sonst lauter Nullen hat, und  $A^T$  ist die transponierte Matrix zu  $A$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist.
  - (b) Berechnen Sie  $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ .
  - (c) Geben Sie je eine Basis von Bild  $\varphi$  und von Kern  $\varphi$  an.
  - (d) Welche Bedingung muss  $K$  erfüllen, damit  $V = \text{Bild } \varphi + \text{Kern } \varphi$  ist? (6 Punkte)
- 

### Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist. Alle Umformungen sind zu erklären. (6 Punkte)

---

### Aufgabe 14.

Es sei  $V = \mathbb{F}_2^{4 \times 1}$  und

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto Av \end{aligned} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$$

- (a) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von  $\varphi$ .
  - (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $\varphi$ .
  - (c) Geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis an.
  - (d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von  $\varphi$ . (7 Punkte)
-

## Ankreuzteil

20.9.2000

### Aufgabe 1.

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $1 \leq i, j \leq n$ .

Sind folgende Aussagen richtig?

- Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig, so ist  $v_i \neq v_j$  für  $i \neq j$  .....  Ja     Nein
- Ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig, so ist  $v_i \neq v_j$  für  $i \neq j$  .....  Ja     Nein
- Ist  $(v_1, v_2)$  linear abhängig, so gibt es  $s \in K$  mit  $v_2 = s \cdot v_1$  .....  Ja     Nein
- Sind  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$  und  $(v_1, v_3)$  linear unabhängig, so ist  
      $(v_1, v_2, v_3)$  linear unabhängig .....  Ja     Nein
- $(v_1, v_2)$  ist linear unabhängig genau dann, wenn  $(v_1 + v_2, v_2)$   
     linear unabhängig ist .....  Ja     Nein

### Aufgabe 2.

Ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten über dem Körper  $\mathbb{F}_2$

- ist nicht eindeutig lösbar, wenn  $m > n$  ist .....  Ja     Nein
- kann genau 6 Lösungen haben, wenn  $m < n$  ist .....  Ja     Nein
- ist stets lösbar, wenn  $m < n$  ist .....  Ja     Nein
- hat immer eine nicht-triviale Lösung, wenn es homogen ist .....  Ja     Nein
- kann genau 4 Lösungen haben, wenn  $m = n - 1$  ist .....  Ja     Nein

### Aufgabe 3.

Sei  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  und  $\varphi_1 : V \rightarrow V$  definiert durch  $\varphi_1(f)(x) = f(x + 1)$ ,  $\varphi_2 : V \rightarrow V$  durch  $\varphi_2(f)(x) = f(x) + 1$  und  $\varphi_3 : V \rightarrow V$  durch  $\varphi_3(f)(x) = f(x^2)$  für  $f \in V$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

- $\varphi_1$  ist injektiv .....  Ja     Nein
- $\varphi_1$  ist linear .....  Ja     Nein
- $\varphi_2$  ist linear .....  Ja     Nein
- $\varphi_2$  ist surjektiv .....  Ja     Nein
- $\varphi_3$  ist linear .....  Ja     Nein

### Aufgabe 4.

Es sei  $(e_1, e_2, e_3)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Es gibt eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

- $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$  .....  Ja     Nein
- $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$  .....  Ja     Nein
- $\text{Kern}(\varphi) = \text{Bild}(\varphi)$  .....  Ja     Nein
- $\text{Kern}(\varphi) \geq \text{Bild}(\varphi)$  .....  Ja     Nein
- $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_2 + e_3) = \varphi(e_1 + e_3) = e_3$  .....  Ja     Nein

### Aufgabe 5.

Es sei  $V = K^{2 \times 2}$  mit einem beliebigen Körper  $K$ . Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von  $V$ ?

- $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid \text{Rg } A = 1\}$  .....  Ja     Nein
- $\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid A^2 = 0\}$  .....  Ja     Nein
- $\{A \in V \mid A = A^T\}$  .....  Ja     Nein



**Aufgabe 6.**

Für jeden Körper  $K$ , jedes  $n \in \mathbb{N}$ , alle  $A, B \in K^{n \times n}$  und alle  $s \in K$  gilt:

- det( $A + B$ ) = det  $A$  + det  $B$  .....  Ja  Nein
- det( $sA$ ) =  $s$  det  $A$  .....  Ja  Nein
- det( $AB$ ) = det( $BA$ ) .....  Ja  Nein
- det  $A$  = det  $B \implies$  det( $A - B$ ) = 0 .....  Ja  Nein
- Ist  $A^2 = E_n$ , so ist det  $A = 1$  .....  Ja  Nein

**Aufgabe 7.**

Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei  $\chi = \chi_A = \det(X \cdot E_n - A)$  das charakteristische Polynom und  $\mu = \mu_A$  das Minimalpolynom von  $A$ . Dann gilt für jedes solche  $A$ :

- Ist  $f \in \mathbb{C}[X]$  mit  $f(A) = 0$ , so ist  $\chi \mid f$  .....  Ja  Nein
- Ist  $f \in \mathbb{C}[X]$  mit  $\chi \mid f$ , so ist  $f(A) = 0$  .....  Ja  Nein
- Ist  $A^n = 0$ , so ist  $\chi = X^n$  .....  Ja  Nein
- Ist  $A^n = 0$ , so ist  $\mu = X^n$  .....  Ja  Nein
- Ist  $\mu = X^n - 3$ , so ist  $\chi = X^n - 3$  .....  Ja  Nein

**Aufgabe 8.**

Für alle Vektorräume  $V$  und alle  $\varphi \in \text{End } V$  gilt:

- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 1, so ist  $\varphi$  invertierbar .....  Ja  Nein
- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 0, so ist  $\varphi$  nicht invertierbar .....  Ja  Nein
- Hat  $\varphi$  den Eigenwert 1, so hat  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  ebenfalls den Eigenwert 1 .....  Ja  Nein
- Hat  $\varphi^2$  den Eigenwert 0, so hat  $\varphi$  ebenfalls den Eigenwert 0 .....  Ja  Nein
- Ist  $\varphi^2 = \text{id}_V$  und  $t$  Eigenwert von  $\varphi$ , so ist  $t \in \{1, -1\}$ . .....  Ja  Nein

**Aufgabe 9.** Sei  $2 < n \in \mathbb{N}$  und  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{2n \times 2n}$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \equiv j \pmod{2} \text{ (d.h. } i - j \text{ ist gerade)} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt:

- Rg  $A = n$  .....  Ja  Nein
- Rg  $A = 2$  .....  Ja  Nein
- det  $A = 1$  .....  Ja  Nein
- $A$  ist diagonalisierbar .....  Ja  Nein
- Das Minimalpolynom ist  $X^3 - n^2X$  .....  Ja  Nein

**Aufgabe 10.** Es seien  $K$  ein Körper und  $A, B \in K^{n \times n}$ .

- Ist  $A$  kongruent zu einer Diagonalmatrix, dann ist  $A$  symmetrisch .....  Ja  Nein
- Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix .....  Ja  Nein
- Sind  $A$  und  $B$  kongruent, so sind sie ähnlich .....  Ja  Nein
- Sind  $A$  und  $B$  kongruent, so haben sie die gleiche Determinante .....  Ja  Nein
- Sind  $A$  und  $B$  ähnlich, so haben sie die gleiche Spur .....  Ja  Nein

## Aufgaben mit Begründung

### Aufgabe 11.

Bestimmen Sie alle  $t \in \mathbb{R}$ , für die das Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} tx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + tx_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) lösbar ist,
- (b) eindeutig lösbar ist.
- (c) Zu jedem  $t$  gebe man die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an. (6 Punkte)

### Aufgabe 12.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V = K^{2 \times 2}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V \\ A &\mapsto A^T + A \end{aligned}$$

und  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ . Hierbei ist  $E_{ij}$  die Matrix, die an der Stelle  $(i, j)$  eine Eins und sonst lauter Nullen hat, und  $A^T$  ist die transponierte Matrix zu  $A$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist.
- (b) Berechnen Sie  $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ .
- (c) Geben Sie je eine Basis von Bild  $\varphi$  und von Kern  $\varphi$  an.
- (d) Welche Bedingung muss  $K$  erfüllen, damit  $V = \text{Bild } \varphi + \text{Kern } \varphi$  ist? (6 Punkte)

### Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist. Alle Umformungen sind zu erklären. (6 Punkte)

### Aufgabe 14.

Es sei  $V = \mathbb{F}_2^{4 \times 1}$  und

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto Av \end{aligned} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$$

- (a) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von  $\varphi$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $\varphi$ .
- (c) Geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis an.
- (d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von  $\varphi$ . (7 Punkte)

## Ankreuzteil

### Aufgabe 1.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V = K^{2 \times 2}$  der  $K$ -Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume (d.h. Untervektorräume)?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\{A \in V \mid \det A = 0\}$ .....  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A^2 = E_2\}$ ( $E_2$ ist die Einheitsmatrix) .....                                       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + A^T = \underline{0}\}$ ( $\underline{0}$ ist die Nullmatrix) .....                   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + sE_2 = \underline{0}$ für ein $s \in K\}$ .....                                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0}\right\}$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$ .....  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

### Aufgabe 2.

Welche der folgenden Abbildungen sind  $\mathbb{R}$ -linear?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 1$ .....       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$ .....                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x - 1, x + 1)$ .....         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (2x, 0)$ .....                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ .....      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

### Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{m \times n}$  und  $\underline{0} \neq b \in K^{m \times 1}$ , wobei  $\underline{0}$  der Nullvektor ist.

Weiter seien  $L = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = b\}$  und  $L_0 = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = \underline{0}\}$ .

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Teilraum heißt Untervektorraum)

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $L$ ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ .....   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $L_0$ ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $L \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist .....               | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $v \in L$ , so ist $L = \{v + w \mid w \in L_0\}$ .....                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $ L  = 1$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist .....                        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $ L_0  = 1 \implies  L  = 1$ .....   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m < n$ , so ist $L \neq \emptyset$ .....                                  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m > n$ , so ist $L = \emptyset$ .....                                     | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

### Aufgabe 4.

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_n)$  **linear abhängig** genau dann, wenn

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| es $s_1, \dots, s_n \in K$ gibt mit $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ .....                                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| für alle $s_1, \dots, s_n \in K$ gilt $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ .....                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| aus $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ mit $s_i \in K$ folgt $s_1 = \dots = s_n = 0$ .....                  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| es $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .....    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| es ein $v \in V$ gibt mit $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .....                                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

**Aufgabe 5.**

Es sei  $V$  ein 2-dimensionaler  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Tragen Sie die richtigen **Zahlen** ein.

Die Anzahl

- der Vektoren von  $V$  ist .....
- der 1-dimensionalen Teilräume von  $V$  ist .....
- der Basisfolgen von  $V$  ist .....
- der Basen (d.h. Basismengen) ist .....
- der linearen Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow V$  ist .....
- der injektiven linearen Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow V$  ist .....
- der bijektiven linearen Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow V$  ist .....
- der linearen Abbildungen (d.h. Linearformen)  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$  ist .....
- der injektiven linearen Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$  ist .....
- der surjektiven linearen Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$  ist .....

**Aufgabe 6.**

Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{Q}$  mit  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus (d.h. surjektive, lineare Abbildung) und  $\psi : W \rightarrow V$  ein Monomorphismus (d.h. injektive, lineare Abbildung). Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Für beliebige Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  ist  ${}_{B'}[\varphi]_B \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$  .....  Ja  Nein
- Für beliebige Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  ist  $\text{Rg}({}_B[\psi]_{B'}) = 2$  ...  Ja  Nein
- Es gibt Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  mit  ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ..  Ja  Nein
- Es gibt Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  mit  ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ..  Ja  Nein
- Für jede Basis  $B$  von  $V$  ist  ${}_B[\psi \circ \varphi]_B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  .....  Ja  Nein
- Für jede Basis  $B$  von  $V$  ist  $\det({}_B[\psi \circ \varphi]_B) = 0$  .....  Ja  Nein

**Aufgabe 7.**

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End } V$ . Weiter sei  $\mu \in K[X]$  das Minimalpolynom und  $\chi \in K[X]$  das charakteristische Polynom von  $\varphi$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Es ist stets  $\text{Grad } \mu < n$  .....  Ja  Nein
- Es ist stets  $\text{Grad } \chi = n$  .....  Ja  Nein
- Ist  $\varphi$  injektiv, so ist 0 kein Eigenwert von  $\varphi$  .....  Ja  Nein
- Genau dann ist  $t \in K$  Eigenwert von  $\varphi$ , wenn  $\mu(t) = 0$  ist .....  Ja  Nein
- Ist  $\mu = \chi$ , so ist  $\varphi$  diagonalisierbar .....  Ja  Nein
- Ist  $\varphi^{2n} = 0$ , so ist  $\varphi^n = 0$  .....  Ja  Nein
- Ist  $\mu = X - 1$ , so ist  $\varphi = \text{id}_V$  .....  Ja  Nein
- Ist  $\chi = (X - 1)^n$ , so ist  $\varphi = \text{id}_V$  .....  Ja  Nein

## Aufgaben mit Begründung

### Aufgabe 8.

(a) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}?$$

(4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine solche Abbildung explizit an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

### Aufgabe 9.

Es seien  $n \geq 2$  und  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n$  mit:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 2 & \text{für } i = j > 1 \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Man berechne

(a)  $\det[a_{i,j}]$ , (3 Punkte)

(b)  $\det[b_{i,j}]$ . (3 Punkte)

### Aufgabe 10.

Es sei  $V = P_2(\mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynomfunktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad kleiner oder gleich 2 und  $\varphi : V \rightarrow V$  sei definiert durch  $\varphi(f)(x) = f'(x) + f(x-1)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $f \in V$ . Dabei steht  $f'$  für die Ableitung von  $f$ .

(a) Man zeige:  $\varphi$  ist linear. (1 Punkt)

(b) Man berechne  $A = {}_B[\varphi]_B$  für die Basisfolge  $B = (p_0 + p_1, -p_0 + p_1, p_2)$ ; dabei ist  $p_i \in V$  definiert durch  $p_i(x) = x^i$  und  $p_0(x) = 1$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, 2$ .  
(Es braucht nicht bewiesen zu werden, dass  $B$  eine Basis ist.) (2 Punkte)

(c) Man berechne die Eigenwerte von  $\varphi$  und gebe zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)

(d) Ist  $\varphi$  diagonalisierbar? (1 Punkt)

(e) Was ist die Jordansche Normalform von  $\varphi$ ? (1 Punkt)

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\Phi$  eine Bilinearform auf  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  mit Gram-Matrix

$$[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $S$  die Standardbasis von  $V$  ist.

(a) Ist  $\Phi$  nicht ausgeartet? Ist  $\Phi$  positiv definit? *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis  $B$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$  und berechnen Sie  $[\Phi]_B$ .

*(4 Punkte)*

---

## Ankreuzteil

### Aufgabe 1.

Es sei  $K$  ein Körper und  $V = K^{2 \times 2}$  der  $K$ -Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume (d.h. Untervektorräume)?

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\{A \in V \mid \det A = 0\}$ .....  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A^2 = E_2\}$ ( $E_2$ ist die Einheitsmatrix) .....                                       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + A^T = \underline{0}\}$ ( $\underline{0}$ ist die Nullmatrix) .....                   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid A + sE_2 = \underline{0}$ für ein $s \in K\}$ .....                                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0}\right\}$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$ .....  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
- 

### Aufgabe 2.

Welche der folgenden Abbildungen sind  $\mathbb{R}$ -linear?

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 1$ .....       | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$ .....                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x - 1, x + 1)$ .....         | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (2x, 0)$ .....                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ .....      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
- 

### Aufgabe 3.

Es sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{m \times n}$  und  $\underline{0} \neq b \in K^{m \times 1}$ , wobei  $\underline{0}$  der Nullvektor ist.

Weiter seien  $L = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = b\}$  und  $L_0 = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = \underline{0}\}$ .

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Teilraum heißt Untervektorraum)

- |  |                             |                               |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $L$ ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ .....   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $L_0$ ist Teilraum von $K^{n \times 1}$ der Dimension $n - \text{Rg } A$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $L \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist .....               | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $v \in L$ , so ist $L = \{v + w \mid w \in L_0\}$ .....                    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $ L  = 1$ genau dann, wenn $\text{Rg } A = m$ ist .....                        | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $ L_0  = 1 \implies  L  = 1$ .....   | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m < n$ , so ist $L \neq \emptyset$ .....                                  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $m > n$ , so ist $L = \emptyset$ .....                                     | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
- 

### Aufgabe 4.

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_n)$  **linear abhängig** genau dann, wenn

- |   |                             |                               |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| es $s_1, \dots, s_n \in K$ gibt mit $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ .....                                | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| für alle $s_1, \dots, s_n \in K$ gilt $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ .....                              | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| aus $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ mit $s_i \in K$ folgt $s_1 = \dots = s_n = 0$ .....                  | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ ..... | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| es $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .....    | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| es ein $v \in V$ gibt mit $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .....                                      | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
-

**Aufgabe 5.**

Es sei  $V$  ein 2-dimensionaler  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Tragen Sie die richtigen **Zahlen** ein.

Die Anzahl

der Vektoren von $V$ ist .....	4
der 1-dimensionalen Teilräume von $V$ ist .....	3
der Basisfolgen von $V$ ist .....	6
der Basen (d.h. Basismengen) ist .....	3
der linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist .....	16
der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist .....	6
der bijektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V$ ist .....	6
der linearen Abbildungen (d.h. Linearformen) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist .....	4
der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist .....	0
der surjektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist .....	3

**Aufgabe 6.**

Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{Q}$  mit  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus (d.h. surjektive, lineare Abbildung) und  $\psi : W \rightarrow V$  ein Monomorphismus (d.h. injektive, lineare Abbildung). Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Für beliebige Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  ist  ${}_{B'}[\varphi]_B \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$  ....  Ja     Nein
- Für beliebige Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  ist  $\text{Rg}({}_B[\psi]_{B'}) = 2$  ...  Ja     Nein
- Es gibt Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  mit  ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ..  Ja     Nein
- Es gibt Basen  $B$  und  $B'$  von  $V$  bzw.  $W$  mit  ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ..  Ja     Nein
- Für jede Basis  $B$  von  $V$  ist  ${}_B[\psi \circ \varphi]_B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  ..  Ja     Nein
- Für jede Basis  $B$  von  $V$  ist  $\det({}_B[\psi \circ \varphi]_B) = 0$  ..  Ja     Nein

**Aufgabe 7.**

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\varphi \in \text{End } V$ . Weiter sei  $\mu \in K[X]$  das Minimalpolynom und  $\chi \in K[X]$  das charakteristische Polynom von  $\varphi$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Es ist stets  $\text{Grad } \mu < n$  ..  Ja     Nein
- Es ist stets  $\text{Grad } \chi = n$  ..  Ja     Nein
- Ist  $\varphi$  injektiv, so ist 0 kein Eigenwert von  $\varphi$  ..  Ja     Nein
- Genau dann ist  $t \in K$  Eigenwert von  $\varphi$ , wenn  $\mu(t) = 0$  ist ..  Ja     Nein
- Ist  $\mu = \chi$ , so ist  $\varphi$  diagonalisierbar ..  Ja     Nein
- Ist  $\varphi^{2n} = 0$ , so ist  $\varphi^n = 0$  ..  Ja     Nein
- Ist  $\mu = X - 1$ , so ist  $\varphi = \text{id}_V$  ..  Ja     Nein
- Ist  $\chi = (X - 1)^n$ , so ist  $\varphi = \text{id}_V$  ..  Ja     Nein



## Aufgaben mit Begründung

### Aufgabe 8.

(a) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$\text{Kern } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Bild } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}?$$

(4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine solche Abbildung explizit an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

### Aufgabe 9.

Es seien  $n \geq 2$  und  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n$  mit:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 2 & \text{für } i = j > 1 \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Man berechne

(a)  $\det[a_{i,j}]$ , (3 Punkte)

(b)  $\det[b_{i,j}]$ . (3 Punkte)

### Aufgabe 10.

Es sei  $V = P_2(\mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynomfunktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad kleiner oder gleich 2 und  $\varphi : V \rightarrow V$  sei definiert durch  $\varphi(f)(x) = f'(x) + f(x-1)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $f \in V$ . Dabei steht  $f'$  für die Ableitung von  $f$ .

(a) Man zeige:  $\varphi$  ist linear. (1 Punkt)

(b) Man berechne  $A = {}_B[\varphi]_B$  für die Basisfolge  $B = (p_0 + p_1, -p_0 + p_1, p_2)$ ; dabei ist  $p_i \in V$  definiert durch  $p_i(x) = x^i$  und  $p_0(x) = 1$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, 2$ .  
(Es braucht nicht bewiesen zu werden, dass  $B$  eine Basis ist.) (2 Punkte)

(c) Man berechne die Eigenwerte von  $\varphi$  und gebe zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)

(d) Ist  $\varphi$  diagonalisierbar? (1 Punkt)

(e) Was ist die Jordansche Normalform von  $\varphi$ ? (1 Punkt)

---

**Aufgabe 11.**

Es sei  $\Phi$  eine Bilinearform auf  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  mit Gram-Matrix

$$[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $S$  die Standardbasis von  $V$  ist.

(a) Ist  $\Phi$  nicht ausgeartet? Ist  $\Phi$  positiv definit? *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis  $B$  von  $V$  bezüglich  $\Phi$  und berechnen Sie  $[\Phi]_B$ .

*(4 Punkte)*

---