Sammlung der Blätter zur LA 1-Vorlesung 1996/97

Die vorliegende Sammlung enthält die Blätter, die im Rahmen der Vorlesung Lineare Algebra 1 von Prof. Neubüser im Wintersemester 1996/97 herausgegeben wurden. Sie enthalten eine Literaturliste, ein deutsch-engliches Glossar, einige Blätter mit Definitionen und Sätzen aus den ersten Wochen der Vorlesung, alle Übungsaufgaben und Klausuren sowie Lösungen zu einigen der Aufgaben. Die organisatorischen Hinweise haben wir so weit wie möglich herausgeworfen.

Vielleicht kann euch die Sammlung bei der Vorbereitung auf eure eigenen LA 1-Klausuren helfen. Wenn ihr sie benutzt, solltet ihr aber folgendes bedenken.

1. Die Stoffauswahl der Vorlesungen von Prof. Hiß und Prof. Neubüser ist etwas unterschiedlich (die Lineare Algebra ist halt ein sehr großes Gebiet).

2. Noch stärker unterscheidet sich die Reihenfolge, in der der Stoff in den beiden Vorlesungen entwickelt wird.

3. Der auffälligste Unterschied liegt aber in den verschiedenen Bezeichnungsweisen der beiden Vorlesungen (genauso geht es einem, wenn man zwei verschiedene Lehrbücher zur Hand nimmt). Die Abkürzung K^n bedeutet etwa bei Hiß den Zeilenraum $K^{1\times n}$, aber bei Neubüser den Spaltenraum $K^{n\times 1}$. Und während Herr Hiß in der Regel Vektorräume mit V, U, W, Vektoren mit v, u, w, Koordinatenvektoren mit $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ und Abbildungsmatrizen mit $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezeichnet, sind die entsprechenden Bezeichungen bei Herrn Neubüser V, U, W, X, Y, Z, ${}_{\mathcal{B}}X$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$. Der Satz 3.8
$$\kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(v)) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\cdot\kappa_{\mathcal{B}}(v)$$
aus der Hißschen Vorlesung würde in der Neubüserschen Schreibweise also
$${}_{\mathcal{B}}\varphi(X) = {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}X$$
heißen. Das sieht zunächst etwas fremd aus, man gewöhnt sich aber schnell daran.

Wir wünschen euch jedenfalls viel Erfolg,

eure Fachschaft

Definitionen zur Vorlesung Lineare Algebra I (WS 96/97)

Prof. Dr. Neubüser

1. **Verknüpfung**

   Auf einer Menge M ist "$\circ$" eine Verknüpfung, wenn jedem Paar (a, b) mit $a \in M$, $b \in M$ genau ein Element $a \circ b \in M$ zugeordnet ist.

2. **Gruppe**

   Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ ist eine Gruppe, wenn
   (a) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$,
   (b) ein $e \in G$ existiert, so daß $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt und es für jedes $a \in G$ ein $a^{-1} \in G$ gibt mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

   Bemerkung. Man kann hieraus herleiten, daß dann auch nur genau ein e mit $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$ und zu jedem $a \in G$ genau ein $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ existiert. e heißt das neutrale Element von G und a^{-1} das zu a inverse Element.

3. **Kommutative Gruppe**

   Eine Gruppe G mit Verknüpfung $\circ$ (kurz: $(G, \circ)$) heißt kommutativ (oder abelsch), wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

4. **Ring**

   Eine Menge R mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (kurz: $(R, +, \cdot)$) heißt Ring, wenn
   (a) $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist, d. h.,
      i. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in R$ gilt,
      ii. ein $0 \in R$ existiert, so daß $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in R$ ist und für jedes $a \in R$ ein $-a \in R$ existiert mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$, und
      iii. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$ gilt,
   (b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$ ist und
   (c) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ sowie $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$ gilt.

   Bemerkung. Um Klammern zu vermeiden, vereinbart man, daß $\cdot$ "stärker" bindet als $+$ und schreibt z. B. $a \cdot b + c$ anstelle von $(a \cdot b) + c$.

5. **Körper**

   Eine Menge K mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (kurz: $(K, +, \cdot)$) heißt Körper, wenn
   (a) $(K, +)$ eine kommutative Gruppe ist, d. h.,
      i. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ gilt,
      ii. ein $0 \in K$ existiert, so daß $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in K$ ist und für jedes $a \in K$ ein $-a \in K$ existiert mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$, und
      iii. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ gilt,
   (b) i. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in K$ ist,
      ii. ein $e \in K \setminus \{0\}$ existiert, so daß $a \cdot e = e \cdot a = a$ für alle $a \in K$ ist und für jedes $a \in K \setminus \{0\}$ ein $a^{-1} \in K \setminus \{0\}$ existiert mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, und
      iii. $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$ gilt und
   (c) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ sowie $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in K$ gilt.

   Bemerkung. Ein Körper ist also ein Ring mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

6. **Vektorraum**

   Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, \dot{+})$ eine kommutative Gruppe. V heißt K-Vektorraum, wenn jedem Paar (k, X) mit $k \in K$ und $X \in V$ ein Element $k \circ X \in V$ zugeordnet ist, so daß für alle $k, k_1, k_2 \in K$ und $X, X_1, X_2 \in V$ gilt:
   (a) $k \circ (X_1 \dot{+} X_2) = (k \circ X_1) \dot{+} (k \circ X_2)$,
   (b) $k_1 \circ (k_2 \circ X) = (k_1 \cdot k_2) \circ X$,
   (c) $(k_1 + k_2) \circ X = (k_1 \circ X) \dot{+} (k_2 \circ X)$,
   (d) $e \circ X = X$, wobei e das multiplikativ neutrale Element von K ist.

Definitionen und elementare Sätze zur Vorlesung Lineare Algebra I (WS 96/97)

Prof. Dr. Neubüser

7. **Definition (Teilraum)**

   Es sei $(V, \dot{+}, \circ)$ ein K-Vektorraum bezüglich $\dot{+}$ und $\circ$, und es sei T eine nicht leere Teilmenge von V, d. h. $T \subseteq V$ und $T \neq \emptyset$. Ist T ein K-Vektorraum bezüglich $\dot{+}$ und $\circ$, so nennen wir T einen **Teilraum** von V (englisch: subspace) und schreiben $T \leq V$.

8. **Vereinbarung**

   Von jetzt an werden wir, wenn eine explizite Unterscheidung der verschiedenen Verknüpfungen nicht unbedingt nötig ist, einfach $X + Y$ statt $X \dot{+} Y$ und cX statt $c \circ X$ schreiben, wenn X und Y Vektoren aus V sind und c ein Körperelement aus K ist. Außerdem werden wir nicht mehr immer ausdrücklich sagen, daß K ein Körper ist, wenn wir von einem K-Vektorraum reden.

9. **Satz**

   Es sei V ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$. Dann gilt: T ist ein Teilraum von V genau dann, wenn gilt
   (a) $T \neq \emptyset$,
   (b) $X, Y \in T \Longrightarrow X + Y \in T$,
   (c) $X \in T, c \in K \Longrightarrow cX \in T$.

10. **Definition (Erzeugnis)**

    Es sei V ein K-Vektorraum und $X \in V$. Dann heißt $\langle X \rangle := \{cX \mid c \in K\}$ das **K-Erzeugnis** von X.
    Bemerkung. $\langle X \rangle$ ist ein Teilraum von V, also $\langle X \rangle \leq V$.

11. **Definition (Erzeugnis)**

    Es sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ und $M \neq \emptyset$. Dann heißt

    $$\langle M \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \mid n \in \mathbb{N}, X_i \in M, c_i \in K\}$$

    das **K-Erzeugnis** von M, und M heißt ein **Erzeugendensystem** von $\langle M \rangle$.
    Bemerkung. $\langle M \rangle$ ist ein Teilraum von V, also $\langle M \rangle \leq V$.
    Bemerkung. Ist $M = \{X_1, ..., X_n\}$, so schreiben wir für $\langle M \rangle$ auch $\langle X_1, ..., X_n \rangle$.

12. **Bemerkung (Durchschnitt von Teilräumen)**

    Es sei V ein K-Vektorraum, I eine nicht leere Menge und $\{T_i \mid i \in I,\ T_i \leq V\}$ eine Menge von Teilräumen von V. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} T_i = \{X \in V \mid X \in T_i \text{ für alle } i \in I\}$ ein Teilraum von V.

13. **Definition (linear abhängig, linear unabhängig)**

    Es sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ und $M \neq \emptyset$.
    (a) M heißt **linear abhängig**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $X_1, ..., X_n \in M$ und Körperelemente $c_1, ..., c_n \in K$ gibt, so daß mindestens eins der c_i ungleich 0, aber $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = O \in V$ ist.
    (b) M heißt **linear unabhängig**, wenn M nicht linear abhängig ist, d. h., wenn für **alle** $n \in \mathbb{N}$ und **jede** Wahl von $X_1, ..., X_n \in M$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = O \Longleftrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$.

    Bemerkung. Ist M endlich, etwa $M = \{X_1, ..., X_n\}$, so gilt: M ist genau dann linear abhängig, wenn es Körperelemente $c_1, ..., c_n \in K$ gibt, so daß mindestens eins der c_i ungleich 0, aber $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = O \in V$ ist. M ist genau dann linear unabhängig, wenn gilt: $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = O \Longleftrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$.

14. **Definition (Basis)**

    Eine Teilmenge B eines K-Vektorraums V heißt eine **Basis** von V, wenn B linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$, also B ein Erzeugendensystem von V, ist.

15. **Satz (Steinitzscher Austauschsatz)**

    Es sei V ein K-Vektorraum, $M = \{Y_1, ..., Y_m\} \subseteq V$ und $N = \{X_1, ..., X_n\} \subseteq V$, so daß $\langle M \rangle = V$ und N linear unabhängig ist. Dann gilt:
    (a) $m \geq n$,
    (b) es existieren $m - n$ Elemente $Y_{i_{n+1}}, ..., Y_{i_m} \in M$, so daß $\langle X_1, ..., X_n, Y_{i_{n+1}}, ..., Y_{i_m} \rangle = V$ ist.

Matrizen, Koeffizientenspalten und lineare Abbildungen

Erläuterungen zur Matrizenschreibweise in der Vorlesung Lineare Algebra I (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

A. Matrizen

Es sei K ein Körper. Für natürliche Zahlen m und n ist

$$K^{m\times n} = \left\{ [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \right\}$$

die Menge der $m \times n$-Matrizen über K. Die Anzahl der Zeilen jeder Matrix in $K^{m\times n}$ ist m, und n ist die Anzahl der Spalten. Ist $1 \le r \le m$ und $1 \le s \le n$ und $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$, so steht die Zahl a_{rs} in der r-ten Zeile und s-ten Spalte von A.
(Merkregel: „ZVS“ für „Zeile vor Spalte“.)

Rechnen mit Matrizen:

Sind $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ und $[b_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ in $K^{m\times n}$ und $q \in K$, so ist

$$[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} + [b_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = [c_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$$

mit $c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}$ für $1 \le r \le m$, $1 \le s \le n$, und es ist

$$q \cdot [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = [d_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$$

mit $d_{rs} = q \cdot a_{rs}$ für $1 \le r \le m$, $1 \le s \le n$.

Bemerkung: $K^{m\times n}$ ist mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum.

Ist $A := [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$ und $B := [b_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} \in K^{n\times k}$, so ist

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \in K^{m\times k} \\ \| & & \| & & \| \\ [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} & \cdot & [b_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} & = & [c_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}} \\ \| & & & & \| \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \dots & \boxed{c_{rs}} & \dots & c_{rk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ms} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix} \end{array}$$

mit $c_{rs} = a_{r1} \cdot b_{1s} + a_{r2} \cdot b_{2s} + \dots + a_{rn} \cdot b_{ns} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt} \cdot b_{ts}$ für $1 \le r \le m$, $1 \le s \le k$. Das heißt, um den Eintrag in der r-ten Zeile und s-ten Spalte von $A \cdot B$ zu berechnen, muß man der Reihe nach die Einträge der r-ten Zeile von A mit den Einträgen der s-ten Spalte von B multiplizieren und diese Produkte aufaddieren.

Bemerkung:

Matrizen A und B kann man nur multiplizieren, wenn sie „zusammmenpassen“, d. h., wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist. Die Anzahl der Zeilen von $A \cdot B$ ist gleich der Anzahl der Zeilen von A, und die Anzahl der Spalten von $A \cdot B$ ist gleich der Anzahl der Spalten von B.

B. Vektoren und Koeffizientenspalten

Es sei V ein endlich erzeugbarer K-Vektorraum, und es sei $n = \dim V$. Um Vektoren in V durch (einspaltige) Matrizen (Koeffizientenspalten) beschreiben zu können, muß eine Basisfolge $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$ von V festgelegt werden.

Ist $X \in V$, so läßt sich X eindeutig als Linearkombination $X = a_1B_1 + a_2B_2 + \ldots + a_nB_n$ der Elemente aus $\mathcal{B}$ mit $a_i \in K$ ausdrücken. Die Koeffizienten dieser Zerlegung werden in eine Spalte $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} =: {}_{\mathcal{B}}X$ geschrieben.

Veranschaulichung:

$$X = \begin{array}{c} a_1 \cdot B_1 \\ + \\ a_2 \cdot B_2 \\ + \\ \vdots \\ + \\ a_n \cdot B_n \end{array} \longrightarrow {}_{\mathcal{B}}X := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^{n\times 1} = K^n$$

$\boxed{\text{In } {}_{\mathcal{B}}X \text{ stehen die Koeffizienten der Zerlegung des Vektors } X \in V \text{ in der Basis } \mathcal{B} \text{ von } V.}$

Bemerkung:

Die Abbildung, die jedem Vektor X aus V seine Koeffizientenspalte ${}_{\mathcal{B}}X \in K^{n\times 1} = K^n$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von V zuordnet, ist ein Isomorphismus von V auf K^n. Beachten Sie, daß dieser Isomorphismus von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt!

16. **Definition (endlich erzeugbar)**
Ein K-Vektorraum V heißt **endlich erzeugbar**, wenn es eine endliche Teilmenge $M \subseteq V$ gibt, so daß $\langle M \rangle = V$ ist.
Bemerkung. Jeder endlich erzeugbare K-Vektorraum besitzt eine Basis, und je zwei Basen eines endlich erzeugbaren Vektorraums bestehen aus gleich vielen Elementen.

17. **Definition (Dimension)**
Ist V ein endlich erzeugbarer K-Vektorraum und ist B eine Basis von V, so heißt $|B|$ die **Dimension** von V. Ein nicht endlich erzeugbarer Vektorraum hat die Dimension ∞.

18. **Beispiel (nicht endlich erzeugbarer Vektorraum)**
Die Menge $F = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ aller unendlichen Folgen von Elementen aus $\mathbb{Q}$ ist ein nicht endlich erzeugbarer $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

19. **Satz (äquivalente Beschreibungen von Basen)**
Es sei V ein endlich erzeugbarer K-Vektorraum, $V \neq \{O\}$ und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:
(a) B ist eine Basis von V, d. h.,
  i. B ist linear unabhängig,
  ii. $\langle B \rangle = V$,
(b) i. B ist linear unabhängig,
  ii. für jedes linear unabhängige $B' \subseteq V$ gilt $|B'| \leq |B|$ (B ist "größtmöglich" linear unabhängig),
(c) i. B ist linear unabhängig,
  ii. jedes $B' \subseteq V$ mit $B \subset B'$, d. h. $B \subseteq B'$ und $B \neq B'$, ist linear abhängig (B ist "maximal" linear unabhängig),
(d) i. $\langle B \rangle = V$,
  ii. für jedes $B' \subseteq V$ mit $\langle B' \rangle = V$ gilt $|B'| \geq |B|$ (B ist "kleinstmögliches" Erzeugendensystem),
(e) i. $\langle B \rangle = V$,
  ii. für jedes $B' \subseteq V$ mit $B' \subset B$, d. h. $B' \subseteq B$ und $B' \neq B$, gilt $\langle B' \rangle < V$, d. h. $\langle B' \rangle \leq V$ und $\langle B' \rangle \neq V$ (B ist "minimales" Erzeugendensystem).

20. **Satz (Dimensionssatz für Teilräume)**
Es seien V ein K-Vektorraum und T_1 und T_2 zwei endlich erzeugbare Teilräume von V. Dann gilt: $\dim T_1 + \dim T_2 = \dim T_1 \cap T_2 + \dim \langle T_1, T_2 \rangle$.

21. **Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)**
Es sei $\varphi\colon M \longrightarrow N$ eine Abbildung von einer Menge M in eine Menge N.
(a) φ heißt **surjektiv** (Abbildung auf), wenn es zu jedem $n \in N$ ein $m \in M$ gibt mit $\varphi(m) = n$.
(b) φ heißt **injektiv**, wenn aus $\varphi(m) = \varphi(m')$ für Elemente $m, m' \in M$ folgt, daß $m = m'$ ist.
(c) φ heißt **bijektiv**, wenn φ surjektiv und injektiv ist.

22. **Definition (lineare Abbildung)**
Es seien V und W zwei K-Vektorräume zu demselben Körper K. Eine Abbildung $\varphi\colon X \longmapsto \varphi(X)$ von V in W heißt eine **lineare Abbildung** von V in W, wenn
(a) $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ für alle $X, Y \in V$,
(b) $\varphi(cX) = c\varphi(X)$ für alle $c \in K, X \in V$.

23. **Definition (Epimorphismus, Monomorphismus, Isomorphismus)**
Es seien V und W zwei K-Vektorräume zu demselben Körper K, und es sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von V in W.
(a) φ heißt ein **Epimorphismus** von V auf W, wenn φ surjektiv ist.
(b) φ heißt ein **Monomorphismus** von V in W, wenn φ injektiv ist.
(c) φ heißt ein **Isomorphismus** von V auf W, wenn φ bijektiv ist.

Literatur zur Vorlesung

Artmann, B.: *Lineare Algebra.* Birkhäuser 1986, ^{3}1991. LS$^+$

Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Vieweg 1994. LS$^+$

Brieskorn, E.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.* Band I, Vieweg 1983. Band II, Vieweg 1985. Band III, Vieweg 1994. LS$^+$

Fischer, G.: *Lineare Algebra / Analytische Geometrie.* 2 Bände, rororo Vieweg 1978. LS$^+$

Greub, W. H.: *Lineare Algebra.* Springer 1967. LZ$^-$

Halmos, P. R.: *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Springer 1974. LS$^+$

Heinold, J., Riedmüller, B.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.* 2 Bände, Carl Hanser ^{2}1975 bzw. 1973. LS$^+$

Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra, vol. II, Linear Algebra.* D. v. Nostrand 1953. RZ$^+$

Jänich, K.: *Lineare Algebra.* Springer Hochschultext 1981. LS$^+$

Klingenberg, W.: *Lineare Algebra und Geometrie.* Springer ^{2}1989, ^{3}1992. LS$^+$

Koecher, M.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Springer ^{2}1985, ^{3}1992. LS$^+$

Kowalsky, H.-J.: *Lineare Algebra.* Walter de Gruyter ^{6}1972. LZ$^-$

Lang, S.: *Introduction to Linear Algebra.* Addison-Wesley 1970, ^{2}1988. LS$^+$

Lang, S.: *Linear Algebra.* Addison-Wesley 1966, ^{3}1989. LS$^+$

Lingenberg, R.: *Linare Algebra.* BI-Hochschultaschenbuch 1969. LZ$^-$

Lorenz, F.: *Lineare Algebra I, II.* 2 Bände, BI-Hochschultaschenbücher ^{2}1988/89. LS$^+$

Roman, S.: *Advanced Linear Algebra.* Springer 1992. LS$^+$

Satake, I.: *Linear Algebra.* Marcel Dekker 1975. LS$^+$

Stammbach, U.: *Lineare Algebra.* Teubner 1980. LS$^+$

Storch, U., Wiebe, H.: *Lehrbuch der Mathematik, Band II: Lineare Algebra.* BI Wissenschaftsverlag 1990. LS$^+$

Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press ^{3}1988. (L)S$^+$

Aufgabensammlungen

Artmann, B., Peterhänsel W., Sachs E.: *Beispiele und Aufgaben zur linearen Algebra.* BI-Hochschultaschenbücher, Band 783, 1978. LS$^+$

Heinold, J., Riedmüller, B., Fischer, H.: *Aufgaben und Lösungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie.* 2 Bände, Carl Hanser 1970/71. LS$^+$

Lipschutz, S.: *Theory and Problems of Linear Algebra.* McGraw-Hill, Schaum's outline series. LS$^+$

C. Lineare Abbildungen und Matrizen

Es seien V und W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume der Dimensionen n und m. Um lineare Abbildungen von V nach W durch Matrizen beschreiben zu können, müssen eine Basisfolge $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ von V und eine Basisfolge $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_m)$ von W festgelegt werden.

Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. φ ist bereits eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ festgelegt. Für jeden Vektor $B_i \in \mathcal{B}$ läßt sich das Bild $\varphi(B_i)$ eindeutig als Linearkombination

$$\varphi(B_i) = a_{1i}C_1 + a_{2i}C_2 + \ldots + a_{mi}C_m$$

der Elemente aus $\mathcal{C}$ mit $a_{ji} \in K$ ausdrücken. Die Koeffizientenspalten

$$c(\varphi(B_1)), \ldots, c(\varphi(B_n))$$

der Bildvektoren $\varphi(B_1), \ldots, \varphi(B_n)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ von W werden nebeneinander geschrieben. Die so erhaltene Matrix

$$[\, c(\varphi(B_1)) \ \ldots\ c(\varphi(B_i)) \ \ldots\ c(\varphi(B_n))\,]$$

aus $K^{m\times n}$ heißt die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Sie wird mit $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ bezeichnet.

Veranschaulichung:

$$\varphi \to \begin{array}{ccccc} \varphi(B_1) & \ldots & \varphi(B_i) & \ldots & \varphi(B_n) \\ \| & & \| & & \| \\ a_{11}\cdot C_1 & \ldots & a_{1i}\cdot C_1 & \ldots & a_{1n}\cdot C_1 \\ + & & + & & + \\ a_{21}\cdot C_2 & \ldots & a_{2i}\cdot C_2 & \ldots & a_{2n}\cdot C_2 \\ + & & + & & + \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ + & & + & & + \\ a_{m1}\cdot C_m & \ldots & a_{mi}\cdot C_m & \ldots & a_{mn}\cdot C_m \end{array} \to {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}} := \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m\times n}$$

In der i-ten Spalte der Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ stehen die Koeffizienten der Zerlegung von $\varphi(B_i)$ in der Basis $\mathcal{C}$ von W.

Bemerkung:

Die Abbildung, die jeder linearen Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ die Matrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} \in K^{m\times n}$ zuordnet, ist ein Isomorphismus von $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ auf $K^{m\times n}$. Beachten Sie, daß dieser Isomorphismus von der Wahl der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W abhängt!

D. Rechenregeln

1.) Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$, $s \in K$ und $X \in V$ gilt:

(i) $\boxed{_{\mathcal{C}}(s\cdot\psi + \varphi)_{\mathcal{B}} = s \cdot {_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{B}}} + {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}}}$

(ii) $\boxed{_{\mathcal{C}}(\varphi(X)) = {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}} \cdot {_{\mathcal{B}}X}}$

Als Spezialfall ($W = V$, $\varphi = id$) von (ii) ergibt sich:
Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V, so stehen die Koeffizientenspalten eines Vektors $X \in V$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ in folgendem Zusammenhang:

(iii) $\boxed{_{\mathcal{B}'}X = {_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}} \cdot {_{\mathcal{B}}X}}$

$_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$ heißt Basiswechselmatrix. In ihren Spalten stehen die Koeffizienten der Zerlegungen der Elemente aus $\mathcal{B}$ (oder genauer: deren Bilder unter der Identität) in der Basis $\mathcal{B}'$. Die Basiswechselmatrix ist invertierbar, und es gilt:

(iv) $\boxed{(_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}})^{-1} = {_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}}}$

2.) Ist T ebenfalls ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{D}$ eine Basisfolge von T, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}\,(W,T)$, so gilt:

(v) $\boxed{_{\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{B}} = {_{\mathcal{D}}\psi_{\mathcal{C}}} \cdot {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}}}$

3.) Aus zweimaliger Anwendung von (v) folgt sofort:
Sind U, V, W und T endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, und ist $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(U,V)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}\,(W,T)$, so gilt:

(vi) $\boxed{_{\mathcal{D}}(\beta\circ\varphi\circ\alpha)_{\mathcal{A}} = {_{\mathcal{D}}\beta_{\mathcal{C}}} \cdot {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}} \cdot {_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}}}}$

Sind $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(U,V)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}\,(W,T)$ fest gewählt, so ist durch die Vorschrift

$$\Phi(\varphi) := \beta\circ\varphi\circ\alpha \in \mathrm{Hom}\,(U,T) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$$

eine Abbildung (sogar ein Homomorphismus)

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}\,(V,W) \to \mathrm{Hom}\,(U,T)$$

definiert.

Gleichung (vi) beschreibt, wie die Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W und die Abbildungsmatrix $_{\mathcal{D}}\Phi(\varphi)_{\mathcal{A}}$ von $\Phi(\varphi)$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ von U und $\mathcal{D}$ von T zusammenhängen.

Als Spezialfall ($U = V$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}'$, $\alpha = id$, $W = T$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}'$ und $\beta = id$) erhält man aus Gleichung (vi):

(vii) $\boxed{_{\mathcal{C}'}\varphi_{\mathcal{B}'} = {_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}}} \cdot {_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}} \cdot {_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}}}$

Gleichung (vii) beschreibt, wie man die Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$ der linearen Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ mit Hilfe der Basiswechselmatrizen $_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}}$ und $_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}$ aus der Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ erhält.

Ist darüberhinaus $W = V$ sowie $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$, so folgt aus (iv) und (vii):

(viii) $\boxed{_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'} = (_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'})^{-1} \cdot {_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}} \cdot {_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}}}$

English-German Glossary to the Course in Linear Algebra I
(Winter Term '96/97)

Prof. Dr. Neubüser

abelian	kommutativ, abelsch
adjoint	adjungiert
associative law	Assoziativgesetz
assume	annehmen
assumption	Annahme
augmented matrix	erweiterte Koeffizienten-matrix
basis (bases)	Basis (Basen)
bijective	bijektiv, eineindeutig
codomain	Wertebereich
coefficient	Koeffizient
coefficient matrix	Koeffizientenmatrix
column	Spalte
commutative	kommutativ, abelsch
complex number	komplexe Zahl
composition	Hintereinanderausführung
contain	enthalten
coset	Restklasse
counterexample	Gegenbeispiel
degree	Grad
determinant	Determinante
dimension	Dimension
distributive law	Distributivgesetz
domain	Definitionsbereich
dual space	Dualraum
echelon form	Stufenform
element	Element
empty set	leere Menge
epimorphism	Epimorphismus
equation	Gleichung
extension field	Erweiterungskörper
field	Körper
finite	endlich
finitely generated	endlich erzeugbar
generate	erzeugen, aufspannen
generating system	Erzeugendensystem
group	Gruppe
homogeneous	homogen
homomorphism	Homomorphismus
hyperplane	Hyperebene
identity	neutrales Element, Eins-element
iff (if and only if)	genau dann, dann und nur dann
image	Bild
infinite	unendlich
inhomogeneous	inhomogen
injective	injektiv
inner product	Skalarprodukt
integer	ganze Zahl
intersection	Durchschnitt
inverse element	inverses Element
invertible	invertierbar
isomorphic	isomorph
isomorphism	Isomorphismus
kernel	Kern
linear equation	lineare Gleichung
linearly dependent	linear abhängig
linearly independent	linear unabhängig
map	abbilden, Abbildung
mapping	Abbildung
mapping onto	Abbildung auf
matrix (matrices)	Matrix (Matrizen)
monomorphism	Monomorphismus
natural number	natürliche Zahl
null set	leere Menge
null space	Kern (einer linearen Abbil-dung)
nullity	Dimension des Kerns
one-to-one	eineindeutig, bijektiv
operation	Verknüpfung
pair	Paar
polynomial	Polynom
proof	Beweis
proper subset	echte Teilmenge
property	Eigenschaft
prove	beweisen
rank	Rang
rational number	rationale Zahl
real number	reelle Zahl
residue class	Restklasse
ring	Ring
root	Wurzel
row	Zeile
scalar product	Skalarprodukt
sequence	Folge
set	Menge
solution	Lösung
solution space	Lösungsraum
span	aufspannen, erzeugen
span	Erzeugnis
square matrix	quadratische Matrix
subset	Teilmenge
subspace	Teilraum
subspace generated by	Erzeugnis
suppose	annehmen
surjective	surjektiv
theorem	Satz
trace of a matrix	Spur einer Matrix
transpose	transponieren
triangular matrix	Dreiecksmatrix
union	Vereinigung
unique	eindeutig
unknowns	Unbekannte
vector	Vektor
vector space	Vektorraum
vice versa	umgekehrt
void set	leere Menge
w.l.o.g. (without loss of generality)	o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)
zero column	Nullspalte
zero row	Nullzeile
zero space	Nullvektorraum
zero vector	Nullvektor

Deutsch-Englisches Glossar zur Vorlesung Lineare Algebra I
(Wintersemester 96/97)

Prof. Dr. Neubüser

abbilden	map
Abbildung	mapping, map
Abbildung auf	mapping onto
abelsch	abelian, commutative
adjungiert	adjoint
Annahme	assumption
annehmen	assume, suppose
Assoziativgesetz	associative law
aufspannen	generate, span
Basis (Basen)	basis (bases)
Beweis	proof
beweisen	prove
bijektiv	bijective, one-to-one
Bild	image
Definitionsbereich	domain
Determinante	determinant
Dimension	dimension
Dimension des Kerns	nullity
Distributivgesetz	distributive law
Dreiecksmatrix	triangular matrix
Dualraum	dual space
Durchschnitt	intersection
echte Teilmenge	proper subset
Eigenschaft	property
eindeutig	unique
eineindeutig	bijective, one-to-one
Einselement	identity
Element	element
endlich	finite
endlich erzeugbar	finitely generated
enthalten	contain
Epimorphismus	epimorphism
erweiterte Koeffizien-tenmatrix	augmented matrix
Erweiterungskörper	extension field
erzeugen	generate, span
Erzeugendensystem	generating system
Erzeugnis	subspace generated by, span
Folge	sequence
ganze Zahl	integer
Gegenbeispiel	counterexample
Gleichung	equation
Grad	degree
Gruppe	group
Hintereinanderausfüh-rung	composition
homogen	homogeneous
Homomorphismus	homomorphism
Hyperebene	hyperplane
inhomogen	inhomogeneous
injektiv	injective
inverses Element	inverse element
invertierbar	invertible
isomorph	isomorphic
Isomorphismus	isomorphism
Kern	kernel, null space
Koeffizient	coefficient
Koeffizientenmatrix	coefficient matrix
kommutativ	commutative, abelian
komplexe Zahl	complex number
Körper	field
leere Menge	empty set, void set, null set
linear abhängig	linearly dependent
linear unabhängig	linearly independent
lineare Gleichung	linear equation
Lösung	solution
Lösungsraum	solution space
Matrix (Matrizen)	matrix (matrices)
Menge	set
Monomorphismus	monomorphism
natürliche Zahl	natural number
neutrales Element	identity
Nullspalte	zero column
Nullvektor	zero vector
Nullvektorraum	zero space
Nullzeile	zero row
o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)	w.l.o.g. (without loss of generality)
Paar	pair
Polynom	polynomial
quadratische Matrix	square matrix
Rang	rank
rationale Zahl	rational number
reelle Zahl	real number
Restklasse	coset, residue class
Ring	ring
Satz	theorem
Skalarprodukt	scalar product, inner product
Spalte	column
Spur einer Matrix	trace of a matrix
Stufenform	echelon form
surjektiv	surjective
Teilmenge	subset
Teilraum	subspace
transponieren	transpose
Unbekannte	unknowns
unendlich	infinite
Vektor	vector
Vektorraum	vector space
Vereinigung	union
Verknüpfung	operation
Wertebereich	codomain
Wurzel	root
Zeile	row

1. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Die beiden umseitigen Präsenzaufgaben P1 und P2 werden am Mittwoch, dem 23. 10. 96, in der Übungsstunde erarbeitet. Die Aufgaben 1 bis 3 sind zu Hause zu bearbeiten und am Montag, dem 28. 10. 96, bis 14.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls D für Mathematik, zweite Etage im Sammelbau der Fachbereiche 1 und 8, Templergraben 64, einzuwerfen.

Schreiben Sie auf Ihre Lösungen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und den Hörsaal Ihrer Übungsgruppe! Sollte Ihre Lösung mehrer Blätter umfassen, heften Sie diese bitte zusammen. Das Aufgabenblatt braucht nicht mit abgegeben zu werden.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.

Es seien $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\mathbf{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Paare aus $\mathbb{R}$. Es seien auf $\mathbf{C}$ die Addition $+$ durch $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ und die Multiplikation $\cdot$ durch $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$ für alle $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbf{C}$ definiert.

Zeigen Sie, daß $\mathbf{C}$ ein Körper ist. Bestimmen Sie das neutrale Element e bezüglich der Multiplikation, und zeigen Sie, daß die quadratische Gleichung $x^2 + e = 0$ in $\mathbf{C}$ eine Lösung besitzt.

$\mathbf{C}$ wird üblicherweise der Körper der *komplexen Zahlen* genannt und mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Aufgabe 2.

Es seien $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Auf $\mathbb{N}_0$ sei eine Verknüpfung $\ominus$ durch $a \ominus b = |a - b|$ für alle $a,b \in \mathbb{N}_0$ definiert, wobei $-$ die gewöhnliche Subtraktion ganzer Zahlen und $|\ \ |$ den Absolutbetrag bezeichnet. Ist $\mathbb{N}_0$ mit dieser Verknüpfung eine kommutative Gruppe?

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
1\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & + & 0\cdot x_4 & + & 2\cdot x_5 & = & b_1 \\
0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & + & 3\cdot x_4 & + & 0\cdot x_5 & = & b_2 \\
0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & + & 1\cdot x_4 & + & 0\cdot x_5 & = & b_3 \\
1\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & - & 2\cdot x_4 & + & 2\cdot x_5 & = & b_4
\end{array}$$

für $\quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$

bzw. für $\quad b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 3,\ b_4 = -3$

bzw. für $\quad b_1 = 86,\ b_2 = -74,\ b_3 = 17,\ b_4 = 52$

und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P1.

(a) Diskutieren Sie fallweise die verschiedenen Möglichkeiten für die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen (d. h., mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$). Geben Sie insbesondere jeweils ein Beispiel für ein solches lineares Gleichungssystem an, welches

  (1) nicht lösbar ist,

  (2) eindeutig lösbar ist,

  (3) mehrere verschiedene Lösungen besitzt.

(b) Gibt es ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$, das genau 5 Lösungen hat?

(c) Gibt es ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ mit einer Gleichung und zwei Unbekannten, welches eindeutig lösbar ist?

Aufgabe P2.

Zeigen Sie: Definiert man auf der Menge $K = \{a,b,c\}$ zwei Verknüpfungen $+$ und $*$ durch

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

*	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

so erhält man einen Körper.

2. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hinweis: Auf den Übungsblättern werden wir Spaltenvektoren, anders als in der Vorlesung, immer mit eckigen Klammern schreiben, um Platz zu sparen.

Hausaufgaben

Aufgabe 4. (komplexe Zahlen)
Es seien $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen (vgl. Aufgabe 1) und $\mathbf{H} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{C}\}$. Auf $\mathbf{H}$ seien die Addition $\oplus$ durch $(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ und die Multiplikation $\otimes$ durch $(a_1,b_1) \otimes (a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$ für alle $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbf{H}$ definiert. Ist $\mathbf{H}$ bezüglich dieser Verknüpfungen ein Körper?

Aufgabe 5. (Vektorräume)
Es seien $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen, $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen und $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen mit den jeweils üblichen Verknüpfungen.

a) Ist $\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum? b) Ist $\mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum?
c) Ist $\mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum? d) Ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?
e) Ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum? f) Ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum?

(Kurze Antwort bzw. Gegenbeispiel genügt!)

Aufgabe 6. (Teilräume)
Es sei V der aus der Vorlesung bekannte $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3 = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume von V, also ebenfalls $\mathbb{R}$-Vektorräume?

a) $M_1 = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a \cdot b = c \cdot b\}$, b) $M_2 = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a + b = c \cdot b\}$,

c) $M_3 = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a + b = c - b\}$, d) $M_4 = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a + b = 1\}$.

Aufgabe 7. (Teilräume)
Wählen Sie aus der Menge $M = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \}$ von vier Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ dreielementige Teilmengen M_1, M_2 und M_3 so aus, daß $\langle M_1 \rangle \neq \mathbb{R}^3$, $\langle M_2 \rangle = \mathbb{R}^3$, $\langle M_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ und $M_2 \neq M_3$ gilt. Beweisen Sie jede Ihrer Behauptungen!

Abgabe: Montag, den 4. 11., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

3. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 8. (Körper und Vektorraum)
Es sei $L = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sie, daß L ein Körper ist. (Hinweis: Beachten Sie, daß $L \subseteq \mathbb{R}$ gilt.)

(b) Zeigen Sie, daß L ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ ein Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums L ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, das $\sqrt[3]{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Nehmen Sie dazu an, es sei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$, und folgern Sie daraus, daß sowohl a als auch b durch 2 teilbar sein müssen. Zeigen Sie außerdem, daß $\sqrt[3]{4}$ nicht in $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ liegt. Nehmen Sie dazu an, es gäbe $a, b \in \mathbb{Q}$ mit
(*) $$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}.$$
Multiplizieren Sie beide Seiten dieser Gleichung mit $\sqrt[3]{2}$ und eliminieren Sie mit Hilfe von (*) jedes Auftreten von $\sqrt[3]{4}$. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, können Sie nun $a + b^2 = 0$ und dann einen Widerspruch zur Annahme folgern.

(d) Welche Dimension hat L als $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(e) Finden Sie einen nicht-trivialen Teilraum T von L, der kein Körper ist. (Mit Begründung)

Aufgabe 9. (Vektorraum)
Es sei $\mathbb{F}_3$ der in Aufgabe P2 eingeführte Körper mit drei Elementen. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $\overline{0} := a$, $\overline{1} := b$ und $\overline{2} := c$. Es seien weiter

$$V = {\mathbb{F}_3}^2 := \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{F}_3\} \quad \text{und} \quad W = {\mathbb{F}_3}^3 := \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_3\}.$$

(a) Wie viele Vektoren liegen in V?

(b) Bilden Sie für jeden Vektor $X \in V$ das Erzeugnis $\langle X \rangle$. Wie viele verschiedene Teilräume von V entstehen auf diese Art?

(c) Wie viele verschiedene Teilräume hat W?

Aufgabe 10. (Erzeugendensysteme)

Es seien $M = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \} \subseteq \mathbb{Q}^5$, $U = \langle M \rangle$ und $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Zeigen Sie, daß X linear abhängig von M ist, und bilden Sie sämtliche Erzeugendensysteme von U, die aus X und zwei Elementen von M bestehen.

Aufgabe 11. (Lineare Unabhängigkeit)
Können Sie eine unendliche Teilmenge M des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ finden mit der Eigenschaft, daß alle zweielementigen Teilmengen von M linear unabhängig sind?

Abgabe: Montag, den 11. 11., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

4. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 12. (Lineare Abhängigkeit)
Im Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien die Vektoren f_1, f_2, und f_3 gegeben durch

$$f_1(x) = x+1,\quad f_2(x) = x+2,\quad f_3(x) = x^2+3x+2$$

für $x \in \mathbb{R}$. Ist die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ linear abhängig? (Antwort mit Beweis)

Aufgabe 13. (Abbildungen)
Es sei M eine endliche Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung von M in M. Beweisen Sie:

(a) Ist f injektiv, so ist f bijektiv.

(b) Ist f surjektiv, so ist f bijektiv.

Aufgabe 14. (Abbildungen)
Für jede Zahl $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3, \\ f_2(x) &= -3x, \\ f_3(x) &= x^3 - 3x \quad \text{und} \\ f_4(x) &= |x| \quad \text{(Absolutbetrag).} \end{aligned}$$

Weiterhin seien die Mengen $M_1 = \mathbb{Q}$, $M_2 = \mathbb{Z}$, $M_3 = \mathbb{N}$, $M_4 = \mathbb{R}$ und $M_5 = \{-2,-1,0,1,2\}$ gegeben. Untersuchen Sie für jedes f_i und jedes M_j, ob f_i eine injektive Abbildung, eine surjektive Abbildung oder eine bijektive Abbildung von M_j in M_j definiert.

Aufgabe 15. (Lineare Abbildungen)

(a) Welche der Abbildungen φ_1, φ_2 und φ_3 von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ sind linear? Es sei

$$\varphi_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2+x_3 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2+1 \end{bmatrix}.$$

(b) Es sei $\mathrm{F}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und es sei $\mathrm{D}(\mathbb{R})$ der Teilraum aller auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen. Es ist bekannt, daß jede Funktion aus $\mathrm{D}(\mathbb{R})$ auch integrierbar ist. Es sei $\delta\colon \mathrm{D}(\mathbb{R}) \to \mathrm{F}(\mathbb{R})$ die Abbildung, die jeder Funktion aus $\mathrm{D}(\mathbb{R})$ ihre Ableitung zuordnet, und $\gamma\colon \mathrm{D}(\mathbb{R}) \to \mathrm{F}(\mathbb{R})$ die Abbildung, die jeder Funktion $f \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$ ihre Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ zuordnet. Für $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, seien α_c bzw. β_c die Abbildungen von $\mathrm{F}(\mathbb{R})$ in $\mathrm{F}(\mathbb{R})$, die jeder Funktion $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ die Funktion f_c mit $f_c(x) = f(x+c)$ bzw. f^c mit $f^c(x) = f(x)+c$ zuordnen. Welche der Abbildungen δ, γ, α_c und β_c sind linear?

(c) Welche der unter (a) und (b) auftretenden linearen Abbildungen sind Epimorphismen, Monomorphismen, Isomorphismen, Endomorphismen oder Automorphismen?

Abgabe: Montag, den 18.11., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

5. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 16. (Teilräume)

(a) Es seien T_1, T_2 Teilräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie: $T_1 \cup T_2$ ist genau dann ein Teilraum von V, wenn $T_1 \subseteq T_2$ oder $T_2 \subseteq T_1$ ist.

(b) Es seien T_1, T_2 und T_3 Teilräume eines K-Vektorraums V, so daß $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ auch ein Teilraum von V ist. Gilt dann $T_1 \subseteq T_2 \cup T_3$ oder $T_2 \subseteq T_1 \cup T_3$ oder $T_3 \subseteq T_1 \cup T_2$?

Hinweis: Betrachten Sie einen 2-dimensionalen Vektorraum über einem Körper mit zwei Elementen!

Aufgabe 17. (Äquivalenzrelationen)
Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen auf der Menge $\mathbb{Z}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv sind. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen? (Bitte keinen Beweis, wenn eine Eigenschaft erfüllt ist, sondern jeweils nur ein kurzes Gegenbeispiel, wenn sie nicht erfüllt ist.)

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid ab > 0\}, & R_4 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a \geq b^2\}, \\ R_2 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid ab \geq 0\}, & R_5 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a^2 \geq b^2\}, \\ R_3 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid ab = 0\}, & R_6 &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a^2 = b^2\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. (Kombinatorik)

(a) Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $X \in V\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, daß $|\langle X\rangle| = |K|$ ist.

(b) Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = p^n$ Elementen (wobei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ ist), und es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $d \in \mathbb{N}$. Wie viele Vektoren hat V?

(c) M und N seien Mengen mit $|M| = 5$ bzw. $|N| = 7$ Elementen. Wie viele Abbildungen von M in N gibt es?

(d) M und N seien gegeben wie in (c). Wie viele injektive Abbildungen von M in N gibt es?

Aufgabe 19. (Restklassenringe)

(a) Stellen Sie für den Restklassenring $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\cdot\mathbb{Z}$ eine Additionstafel und eine Multiplikationstafel auf. (Bezeichnen Sie dabei die Elemente mit $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ und $\overline{4}$)

(b) Gegeben sei das Element $a = \overline{10}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{31} = \mathbb{Z}/31\cdot\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Elemente $-a$ und a^{-1}. Warum gibt es a^{-1}? Berechnen Sie a^4.

(c) Gegeben sei das Element $b = \overline{10}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{32} = \mathbb{Z}/32\cdot\mathbb{Z}$. Berechnen Sie das Element $-b$, und zeigen Sie, daß b ein Nullteiler von $\mathbb{Z}_{32}$ ist. Gibt es zu b ein inverses Element b^{-1}? Berechnen Sie b^4.

Hinweis zu (b) und (c): Benutzen Sie die Methode aus dem Beweis von Hilfssatz 1, Nr. 8 aus der Vorlesung vom 14.11.96.

Abgabe: Montag, den 25.11., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

6. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I" (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 20. (Endliche Körper)
Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{F}_p$ gilt:
$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Aufgabe 21. (Restklassen)
Es sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit drei Elementen, V der Vektorraum ${\mathbb{F}_3}^3$ und T der von $\begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$ erzeugte Teilraum von V.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V/T. Ist die Anzahl der Elemente in V/T gleich $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$ oder $24 = 3^3 - 3$?

(b) Geben Sie die Elemente von $R_1 = T + \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$, $R_2 = T + \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$ und $R_3 = T + \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$ an.

(c) Geben Sie jeweils die Elemente der Restklassen $R_1 + R_2$, $R_1 + R_3$, $\bar{0} \cdot R_1$, $\bar{1} \cdot R_1$ und $\bar{2} \cdot R_1$ an.

Aufgabe 22. (Isomorphiesatz)
Es seien U und W Teilräume eines K-Vektorraumes V. Zeigen Sie: $\langle U, W \rangle / W$ ist isomorph zu $U/(U \cap W)$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon U \to \langle U, W \rangle / W$, $X \mapsto W + X$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist, und betrachten Sie $\operatorname{Kern} \varphi$ und $\operatorname{Bild} \varphi$.

Aufgabe 23. (Homomorphiesatz)
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$.

(a) Geben Sie eine Basis von V/T_1 an.

(b) Geben Sie eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ an, so daß $T_1 = \operatorname{Kern} \varphi$ und $T_2 = \operatorname{Bild} \varphi$ ist. Ist φ eindeutig bestimmt? Falls nicht, wie viele solcher linearen Abbildungen φ gibt es?

Aufgabe 24. (Restklassenraum)
Es sei V ein Vektorraum, T ein Teilraum von V, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und $X_1, \ldots, X_n \in V$, so daß $(T + X_1, \ldots, T + X_n)$ eine Basis von V/T ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $(X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(b) $(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine Basis von V.

(c) $(X_1, \ldots, X_n)$ ist linear unabhängig in V.

Abgabe: Montag, den 2. 12., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

7. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I" (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 25. (Lineare Abbildungen)
Gegeben seien die Spaltenräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ sowie die Vektoren $A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ von W. Wir setzen $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Weiter seien in W die Standardbasis $\mathcal{C} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ und die Basis $\mathcal{C}' = (\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix})$ gegeben.

(a) Geben Sie die Koeffizientenspalten ${}_{\mathcal{C}}A_i$ der Vektoren A_1, A_2, A_3 bezüglich $\mathcal{C}$ an.

(b) Geben Sie die Koeffizientenspalten ${}_{\mathcal{C}'}A_i$ der Vektoren A_1, A_2, A_3 bezüglich $\mathcal{C}'$ an.

(c) Es sei $\varphi\colon V \to W$ die (nach einem Satz der Vorlesung eindeutig bestimmte) lineare Abbildung mit $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von V bezeichnet. Geben Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}'}\varphi_{\mathcal{B}}$ an.

(d) Weiter sei der Vektor $X = \begin{bmatrix} 12 \\ -23 \\ -26 \end{bmatrix} \in V$ gegeben. Berechnen Sie den Vektor $\varphi(X)$, und geben Sie die Koeffizientenspalten ${}_{\mathcal{C}}\varphi(X)$ und ${}_{\mathcal{C}'}\varphi(X)$ an.

Aufgabe 26. (Lineare Abbildungen))
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $W = \mathbb{Q}^2$. Dann sind
$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \text{ und } \mathcal{B}' = (\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix})$$ Basen (Basisfolgen) von V sowie $\mathcal{C} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ und $\mathcal{C}' = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix})$ Basen von W.

Es sei $\varphi\colon V \to W$ definiert durch $\varphi(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$ und $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in V$.

Berechnem Sie ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}$, ${}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{C}'}$, ${}_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}'}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}'}$, ${}_{\mathcal{C}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$, ${}_{\mathcal{B}}X$, ${}_{\mathcal{B}'}X$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi(X)$ und ${}_{\mathcal{C}'}\varphi(X)$.

Aufgabe 27. (Lineare Abbildungen)
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$
so daß

(a) φ ein Isomorphismus ist? (b) φ kein Isomorphismus ist?

Abgabe: Montag, den 9. 12., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

8. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 28. (Abbildungsmatrizen)
In Abb$(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir den von den drei durch

$$f_1(x) = e^x + e^{2x}, \qquad f_2(x) = e^x + e^{-x}, \qquad f_3(x) = 2\cdot e^x + e^{-x}$$

definierten Funktionen f_1, f_2, f_3 erzeugten Teilraum $V = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$.

(a) Zeigen Sie (wie üblich durch Betrachten geeigneter Funktionswerte), daß $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ eine Basis von V ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ mit $\varphi(f) = f'$. Hinweis: Da φ nach Aufgabe 15 linear ist, brauchen Sie nur noch zu zeigen, daß jedes f_i' in V liegt. Das geht am einfachsten, wenn Sie zunächst die durch

$$g_1(x) = e^x, \qquad g_2(x) = e^{-x}, \qquad g_3(x) = e^{2x}$$

definierten Funktionen g_1, g_2, g_3 und dann mit deren Hilfe die drei Ableitungen f_1', f_2', f_3' als Linearkombinationen in den drei Funktioen f_1, f_2, f_3 darstellen.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$.

(d) Wir betrachten nun die Abbildung $\psi: V \to V$, die jeder Funktion $f \in V$ ihre 27. Ableitung $f^{(27)}$ zuordnet. Begründen Sie, warum ψ ebenfalls linear ist.

(e) Ziel unserer Aufgabe ist es, die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ auf zwei verschiedene Weisen aus der Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ zu berechnen und zu sehen, daß der Aufwand unterschiedlich groß ist. Zeigen Sie zunächst, daß ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ eine Potenz von ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ ist, und rechnen Sie diese direkt aus. (Berechnen Sie dabei möglichst wenige Potenzen von ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$.)

(f) Überlegen Sie nun, ob Sie sich die Arbeit durch Übergang zu einer anderen Basis erleichtern können. Wie müßte eine Basis $\mathcal{C}$ von V aussehen, bezüglich derer wir eine Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ erhalten, die sich leichter potenzieren läßt als mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$? Versuchen Sie, eine solche Basis zu finden, bestimmen Sie dafür die Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$, und berechnen Sie dann der Reihe nach die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$ und schließlich ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$.

(g) Wenn Sie in (f) keinen Erfolg hatten, versuchen Sie es einmal mit der Basiswechselmatrix

$${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wie sieht die zugehörige Basis $\mathcal{C}$ aus, und warum ist jetzt das Potenzieren leichter?

Aufgabe 29. (Dimension von Vektorräumen)
Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume über den angegebenen Körpern.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \le \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) K ein Körper mit 9 Elementen, $V = \mathrm{Abb}(K, K)$.

Aufgabe 30. (Lineare Abbildungen)
Es sei n eine natürliche Zahl, K ein Körper und A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Eine Abbildung $\varphi: K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ sei definiert durch $\varphi(X) := AX - XA$ für $X \in K^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, daß φ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums $K^{n\times n}$ in sich ist.

(b) Bestimmen Sie im Spezialfall $n = 3$ und $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Kern und Bild von φ.

Aufgabe 31. (Lineare Abbildungen)
Es sei $P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3 mit der aus der Vorlesung bekannten Basis (p_0, p_1, p_2, p_3), wobei

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2, \quad p_3(x) = x^3$$

ist, und es sei T die Teilmenge aller $f \in P_3(\mathbb{R})$ mit $xf'(x) - f(x+1) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei f' die übliche Ableitung von f ist. Zeigen Sie, daß T ein Teilraum von $P_3(\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von T.

Hinweis: Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi: P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, so daß $\mathrm{Kern}\,\varphi = T$ ist.

Aufgabe 32. (Lineare Abbildungen)
Gegeben seien K-Vektorräume V und W und eine Abbildung $f: V \to W$ mit

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y) \quad \text{für alle} \quad X, Y \in V.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p, so ist f eine lineare Abbildung.

(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn K ein beliebiger anderer Körper ist?

Aufgabe 33. (Invertieren von Matrizen)

Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Abgabe: Montag, den 16. 12., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

9. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I" (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 34. (Lineare Abbildungen)
Es seien V und W endlich erzeugbare Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Es gibt Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W so, daß $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ die Form

$$_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

hat.

Aufgabe 35. (Lineare Abbildungen)
Es sei K ein beliebiger Körper. Beweisen Sie:

(a) Eine lineare Abbildung φ von einem K-Vektorraum V in einen K-Vektorraum W ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}\,\varphi$ nur aus dem Nullvektor besteht.

(b) Ist V ein K-Vektorraum und $T < V$ ein echter Teilraum von V, also $T \neq V$, und ist φ ein injektiver Homomorphismus von V auf T, so gilt $\dim V = \infty$.

Aufgabe 36. (Rang einer Matrix)
Es sei p eine Primzahl und $A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{4\times 4}$. Bringen Sie A durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform, und geben Sie den Rang der Matrix an

(a) für $p = 2$, (b) für $p = 3$, (c) für $p = 5$.

Erläutern Sie jeweils die benutzten Zeilenumformungen.

Aufgabe 37. (Lineare Gleichungssysteme)
Es sei ein <u>lösbares</u> inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{Z}_{1009}$ mit 1009 Elementen gegeben (1009 ist eine Primzahl). Für welche der Zahlen

$$\begin{array}{llll} n_1 = 1, & n_3 = 1\,000, & n_5 = 10\,000, & n_7 = 10\,000\,000, \\ n_2 = 10, & n_4 = 1\,010, & n_6 = 1\,000\,000, & n_8 = 1\,000\,000\,000 \end{array}$$

ist die Aussage „das System hat notwendigerweise mindestens n_i Lösungen" wahr, für welche ist sie falsch? Geben Sie für Ihre Antwort einen ausführlichen Beweis.

Aufgabe 38. (Lineares Gleichungssystem)
Es sei M die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 0\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & 3\,x_5 & = & 8 \\ 1\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 0\,x_3 & - & 1\,x_4 & + & 2\,x_5 & = & -5 \\ 2\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 8\,x_3 & - & 6\,x_4 & + & 4\,x_5 & = & 2 \\ 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 8\,x_3 & - & 5\,x_4 & + & 0\,x_5 & = & -7 \\ 1\,x_1 & - & 1\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 2\,x_4 & + & 2\,x_5 & = & -2 \end{array}$$

über $\mathbb{Q}$ und L der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus eine Basis von L. Erläutern Sie dabei jeden Schritt und insbesondere auch, wie Sie die Basisvektoren auswählen.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge M und stellen Sie sie als Restklasse von L dar. Erläutern Sie dabei, wie Sie eine konkrete Lösung des inhomogenen Gleichungssystems finden.

(c) Stellen Sie einen allgemeinen Lösungsvektor aus M in parametrisierter Form dar, und geben Sie M als Menge von solchen Vektoren an.

Aufgabe 39. (Teilräume)
In $V = \mathbb{R}^4$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$.

Abgabe: Dienstag, den 7.1.97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

10. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I" (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 40. (Lineare Gleichungssysteme)

Untersuchen Sie für jede der folgenden, willkürlich aus 3 und 2 gebildeten Zahlen

$$n_1 := 3 - 2 = 1, \quad n_2 := 3 + 2 = 5, \quad n_3 := 3 \cdot 2 = 6, \quad n_4 := 2^3 = 8, \quad n_5 := 3^2 = 9,$$

ob es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten über einem geeigneten Körper K_i gibt, das genau n_i Lösungen hat. Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel oder einen Gegenbeweis an.

Anmerkung: Für n_4 können wir die Frage mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht vollständig behandeln. Wie weit kommen wir?

Aufgabe 41. (Lineare Gleichungssysteme)

Es sei p eine Primzahl, und es seinen $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Gibt es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über $\mathbb{Z}_p$, das genau p^n Lösungen hat? (Antwort mit Beweis)

(b) Gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über $\mathbb{Z}_p$, das genau p^n Lösungen hat? (Antwort mit Beweis)

Aufgabe 42. (Permutationen)

Es sei $M := \{1, 2, \ldots, 10\}$, und es seien zwei Permutationen π und ρ aus S_M gegeben durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i\pi$	3	5	7	10	4	9	1	2	6	8

und

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i\rho$	6	10	5	8	7	1	3	2	9	4

.

(a) Schreiben Sie π und ρ in Zykelschreibweise.

(b) Geben Sie jeweils die Bahnen auf M unter π bzw. unter ρ an.

(c) Berechnen Sie π^{-1}, ρ^{-1}, $\pi\rho$ und $\rho\pi$. (Multiplikation der Permutationen von links nach rechts wie in der Vorlesung definiert)

(d) Bestimmen Sie für jede der Permutationen π, ρ, π^{-1}, ρ^{-1}, $\pi\rho$ und $\rho\pi$, ob sie gerade oder ungerade ist.

(e) Berechnen Sie $\rho^{-1}\pi\rho$ und $\pi^{-1}\rho\pi$. Was fällt Ihnen beim Vergleich dieser Permutationen mit π bzw. ρ auf? Können Sie daraus eine allgemeine Vermutung herleiten und beweisen?

Aufgabe 43. (Permutationen)

Betrachten Sie die Menge S_5 aller Permutationen auf der Ziffernmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Wie viele solche Permutationen gibt es?

(b) Welche Zykelstrukturen kommen dabei vor?

(c) Wie viele Permutationen aus S_5 gibt es zu jeder dieser Zykelstrukturen?

(d) Wie viele der Permutationen aus S_5 sind gerade, wie viele ungerade?

Aufgabe 44. (Permutationen)

Gegeben seien die Permutationen

$$\pi_1 = (1, 2)\,(3, 4, 5, 6) \in S_6,$$
$$\pi_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \in S_7,$$
$$\pi_3 = (1, 2, 3, 4)\,(5, 6, 7, 8) \in S_8.$$

(a) Schreiben Sie jede dieser Permutationen als Produkt von Transpositionen.

(b) Versuchen Sie, jede dieser Permutationen als Produkt von 3-Zykeln zu schreiben.

Abgabe: Montag, den 13. 1. 97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

11. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 45. (Rang von Matrizen)

Es seien A und B Matrizen über einem Körper K, so daß das Matrixprodukt AB definiert ist. Zeigen Sie: $\mathrm{Rang}\,(AB) \le \mathrm{Rang}\,(A)$ und $\mathrm{Rang}\,(AB) \le \mathrm{Rang}\,(B)$.

Aufgabe 46. (Permutationen)

Definition: Es sei π eine Permutation aus S_n. Dann heißt die kleinste positive Zahl k mit $\pi^k = \mathrm{id}$ die *Ordnung* von π (Schreibweise: $|\pi| = k$).

(a) Zeigen Sie: Besitzt die Permutation π die Zerlegung $\pi = \pi_1 \cdots \pi_r$ in ziffernfremde Zykeln $\pi_1, \ldots, \pi_r$ der Längen $n_1, \ldots, n_r$, so ist die Ordnung $|\pi|$ von π gleich $\mathrm{kgV}\,(n_1, \ldots, n_r)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, daß für je zwei ziffernfremde Zykeln π_i und π_j gilt, daß $\pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i$ ist.

(b) Welches ist die größte Zahl, die als Ordnung einer Permutation aus S_8 vorkommt?

Aufgabe 47. (Determinanten)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$

(a) mit Hilfe elementarer Umformungen,

(b) mittels Entwicklung nach der ersten Zeile.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Summen-Produkt-Formel aus der Vorlesung die Determinante der rechten oberen Untermatrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ von A.

Aufgabe 48. (Determinanten)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = i$ für $i = j$ und $a_{ij} = 1$ für $i \neq j$. Berechnen Sie die Determinante von A.

Abgabe: Montag, den 20.1.97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

12. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 49. (Determinanten)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage?

Sind $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, so ist $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$.

Aufgabe 50. (Determinanten)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper oder ein kommutativer Ring mit 1, und es seien $x_1, \ldots, x_n \in K$. Berechnen Sie die Determinante der durch $a_{ij} := x_i^{j-1}$ definierten Matrix $A = [a_{ij}] \in K^{n\times n}$. Diese Determinante wird als *Vandermondesche Determinante* bezeichnet.

Hinweis: Vollständige Induktion.

Aufgabe 51. (Determinanten)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Berechnen Sie $\det A$.

Aufgabe 52. (Determinanten)

(a) Beweisen Sie den folgenden Spezialfall des Laplaceschen Entwicklungssatzes: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $M \in K^{n\times n}$ eine Matrix der Form $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ mit quadratischen Untermatrizen A und C, so ist $\det M = \det A \cdot \det C$.

(b) Es sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $T \le V$ mit $\varphi(T) \le T$. Weiter sei $\overline{\varphi} : V/T \to V/T$ definiert durch $\overline{\varphi}(X + T) = \varphi(X) + T$ für alle $X \in V$. Zeigen Sie, daß $\det\varphi = \det\overline{\varphi} \cdot \det\varphi|_T$ ist, wobei mit $\varphi|_T$ die auf T eingeschränkte lineare Abbildung φ bezeichnet ist.

Aufgabe 53. (Eigenwerte)

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Abgabe: Montag, den 27.1.97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

13. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I" (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 54. (Polynome)

Es sei K ein Körper, $P(K)$ der Ring der Polynomabbildungen von K in K, $K[x]$ der Polynomring über K und ε der Homomorphismus von $K[x]$ auf $P(K)$, der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$$

die durch

$$\overline{f}: k \mapsto a_0 + a_1k + \ldots + a_nk^n \quad \text{für alle } k \in K$$

definierte Polynomabbildung $\overline{f} \in P(K)$ zuordnet. Wir definieren den Kern des Ringepimorphismus ε wie üblich durch

$$\operatorname{Kern} \varepsilon = \{f \in K[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(K)\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Kern} \varepsilon$ ein Teilring von $K[x]$ ist mit der Eigenschaft

$$f \cdot \operatorname{Kern} \varepsilon \subseteq \operatorname{Kern} \varepsilon \quad \text{und} \quad \operatorname{Kern} \varepsilon \cdot f \subseteq \operatorname{Kern} \varepsilon \quad \text{für alle } f \in K[x].$$

Man nennt einen solchen Teilring ein *Ideal*.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Kern} \varepsilon$ für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$ und geben Sie dafür ein Ideal-Erzeugendensystem an, d. h., eine Menge von Polynomen aus $K[x]$, so daß $\operatorname{Kern} \varepsilon$ das kleinste Ideal von $K[x]$ ist, das diese Menge enthält.

Aufgabe 55. (Polynome)

Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f = x^6 - 3x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 12x + 9$ und $g = x^2 - 2x + 3$.

(a) Dividieren Sie f mit Rest durch g.

(b) Berechnen Sie $g(A)$ und $f(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

Aufgabe 56. (Eigenvektoren)

Es sei K ein Körper, und es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{4\times 4}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert seine Vielfachheit und die Dimension des zugehörigen Eigenvektorraums, und zwar

(a) für den Fall $\operatorname{char} K = 2$, (b) für den Fall $\operatorname{char} K \neq 2$.

Aufgabe 57. (Eigenvektoren)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Finden Sie eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenvektorraums.

(c) Gewinnen Sie daraus eine Basis von $\mathbb{Q}^3$.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $T := {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{B}$ die Standardbasis und $\mathcal{C}$ die von Ihnen berechnete Eigenvektorbasis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(e) Zeigen Sie, daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat, und zwar

(1) durch Nachrechnen,

(2) durch eine ausführliche theoretische Überlegung.

Abgabe: Montag, den 3. 2. 97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

14. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hausaufgaben

Aufgabe 58. (Eigenwerte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, φ ein Endomorphismus von V und $X \in V$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $c \in K$.

(a) Es sei $\psi = \varphi - a \cdot id$ mit $a \in K$. Zeigen Sie, daß X auch ein Eigenvektor von ψ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist φ invertierbar, so ist $c \neq 0$.

(c) Zeigen Sie: Ist φ invertierbar, so ist X auch ein Eigenvektor von φ^{-1}. Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

(d) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie: Ist $c \in K$ ein Eigenwert von A, so ist c^m ein Eigenwert von A^m.

Aufgabe 59. (Eigenwerte)

Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) die Matrix A^{1997}.

Aufgabe 60. (charakteristisches Polynom)

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ das charakteristische Polynom von A, so ist A genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0 \in K$ gilt.

(b) Ist A oder B invertierbar, so sind die charakteristischen Polynome von AB und BA gleich.

Aufgabe 61. (Fächerbasis)

Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ und φ der durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{Q}^3$. Berechnen Sie eine Fächerbasis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{Q}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$.

Aufgabe 62. (Annihilator)

(a) Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Es seien weiter Teilräume T_1 und T_2 von V gegeben. $\mathrm{An}\,(T_i)$ bezeichne den Annihilator zu T_i in V^*. Bestimmen Sie die Dimension des Annihilators von $\langle \mathrm{An}\,(T_1), \mathrm{An}\,(T_2) \rangle$.

(b) Berechnen Sie den Annihilator von $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ im Dualraum von $\mathbb{R}^4$.

Abgabe: Dienstag, den 11. 2. 97, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

Ferienübung zur Linearen Algebra I (WS 96/97)

Prof. Dr. J. Neubüser

Hinweis: Die folgenden Aufgaben sollen **nicht** abgegeben werden. Sie werden auszugsweise in den ersten Übungs- oder Diskussionsstunden zur Linearen Algebra II besprochen (sowie auf Nachfrage in den Diskussionsstunden während der vorlesungsfreien Zeit).

Aufgabe 63. (Dualraum)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, und φ, ψ seien Elemente des Dualraums V^*, so daß $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Kern}\psi$ gilt. Zeigen Sie, daß $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle \leq V^*$ ist.

Aufgabe 64. (Skalarprodukt)

Es sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ sei

$$\operatorname{Spur} A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \quad \text{(Summe der Diagonaleinträge).}$$

Es sei $\Phi\colon K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$ definiert durch $\Phi(A,B) = \operatorname{Spur}(A\cdot B)$ für $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, daß Φ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf $K^{n\times n}$ ist.

Aufgabe 65. (Skalarprodukt)

Es sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum, W sei ein Teilraum von V und Φ sei ein positiv definites Skalarprodukt auf V. Bekanntlich gilt $V = W \oplus W^\perp$, d.h., jeder Vektor $X \in V$ läßt sich eindeutig in der Form $X = X_W + X_{W^\perp}$ mit $X_W \in W$ und $X_{W^\perp} \in W^\perp$ schreiben.

(a) Zeigen Sie: Ist $Y_1, \ldots, Y_r$ eine Orthogonalbasis von W, so gilt

$$X_W = \sum_{i=1}^{r} \frac{\Phi(X, Y_i)}{\Phi(Y_i, Y_i)} Y_i \quad \text{für jedes} \quad X \in V.$$

(b) Für jedes $X \in V$ und $Y \in W$ ist $\Phi(X - Y, X - Y) \geq \Phi(X - X_W, X - X_W)$.

Definition: X_W heißt die bezüglich Φ beste Approximation von $X \in V$ durch ein Element von W.

Aufgabe 66. (Skalarprodukt)

Es sei $V \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen und $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \text{ für } f, g \in V.$$

(a) Zeigen Sie: Φ ist ein positiv definites Skalarprodukt auf V.

(b) Es sei $p \in V$ mit $p(x) = 2x^4 + x^5$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie eine bezüglich Φ beste Approximation von p durch eine Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich 3.

Aufgabe 67. (Bilinearform)

Es sei V ein reeller Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und Φ eine Bilinearform auf V mit

$$_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie Index und Signatur von Φ, und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix zu einer normierten Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

Aufgabe 68. (Orthogonale Funktionen)

Es sei $V \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen und $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \text{ für } f, g \in V.$$

Zeigen Sie, daß die trigonometrischen Funktionen $\{\sin(kx), \cos(jx) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}\}$ ein System paarweiser orthogonaler Funktionen bilden.

Hinweis:
$$\begin{aligned} \sin mx \cdot \sin nx &= \tfrac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x), \\ \sin mx \cdot \cos nx &= \tfrac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x), \\ \cos mx \cdot \cos nx &= \tfrac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x). \end{aligned}$$

Aufgabe 69. (Orthogonale Polynome)

(a) Zeigen Sie, daß es zu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein Polynom $T_n(x)$ vom Grade n (das sogenannte Tschebyscheff-Polynom T_n) gibt mit $\cos(n\varphi) = T_n(\cos(\varphi))$. Geben Sie, ausgehend von $T_0 = 1$ und $T_1 = x$, eine Rekursionsformel für T_n an.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2\cos(\varphi)\cos(n\varphi)$.

(b) Es sei V der von den Polynomen T_n für $n \geq 0$ aufgespannte Teilraum von $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ das durch

$$\Phi(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$$

definierte Skalarprodukt auf V.
Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome T_n bilden ein System orthogonaler Polynome bezüglich Φ.
Hinweis: Substituieren Sie $x = \cos(\varphi)$ und benutzen Sie Teil 1. Nehmen Sie außerdem ohne Beweis an, daß die auftretenden uneigentlichen Integrale existieren.

Aufgabe 70. (Dualraum)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ linear. Definiere

$${}^t\varphi : W^* \to V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \varphi,$$

(wobei V^*, W^* die Dualräume von V bzw. W sind). Zeigen Sie:

(a) ${}^t\varphi$ ist linear,

(b) φ ist surjektiv (bzw. injektiv) genau dann, wenn ${}^t\varphi$ injektiv (bzw. surjektiv) ist,

(c) sind B, C Basen von V bzw. W und B^*, C^* die dazu dualen Basen von V^* bzw. W^*, dann ist

$$_{B^*}({}^t\varphi)_{C^*} = ({}_C\varphi_B)^t.$$

Lösung zur Aufgabe 4.

Die Konstruktion von $\mathbf{H}$ über $\mathbb{C}$ ist die gleiche wie die von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Wir können deshalb genauso vorgehen wie in Aufgabe 1. Insbesondere können wir alle Schlüsse, die nur die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ benutzten, direkt auf die jetzige Situation übertragen. Damit folgt bereits, daß $(\mathbf{H}, \oplus, \otimes)$ die Bedingungen (a) i bis iii sowie (b) i und iii und (c) erfüllt und ein Einselement $((1,0),(0,0))$ besitzt.

Die Existenz von multiplikativ inversen Elementen haben wir allerdings nur für alle Paare (a,b) mit $a^2+b^2 \neq 0$ bewiesen. Das war in Aufgabe 1 ausreichend, weil alle Elemente aus $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ diese Eigenschaft haben, aber in $\mathbf{H} \setminus \{((0,0),(0,0))\}$ gibt es Elemente, für die das nicht gilt, z. B. das Element $h = ((1,0),(0,1))$. Um zu untersuchen, ob auch solche Elemente Inverse besitzen, nehmen wir an, es gäbe ein zu h inverses Element $((a_1,b_1),(a_2,b_2))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((1,0),(0,0)) &= ((1,0),(0,1)) \otimes ((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \\ &= ((1,0)(a_1,b_1) \ominus (0,1)(a_2,b_2),\ (1,0)(a_2,b_2) \oplus (0,1)(a_1,b_1)) \\ &= ((a_1,b_1) - (-b_2,a_2),\ (a_2,b_2) + (-b_1,a_1)) \\ &= ((a_1+b_2, b_1-a_2),\ (a_2-b_1, b_2+a_1)). \end{aligned}$$

Durch Vergleich der einzelnen Komponenten folgt einerseits $1 = a_1 + b_2$ und andererseits $0 = b_2 + a_1$. Die Annahme, h habe ein Inverses, führt damit zu einem Widerspruch. Also ist $(\mathbf{H}, \oplus, \otimes)$ kein Körper, sondern nur ein kommutativer Ring, der ein Einselement besitzt.

Bemerkung: Definieren wir auf $\mathbf{H}$ eine etwas andere Multiplikation durch

$$(a_1,b_1) \circ (a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1\overline{b_2},\ a_1b_2 + b_1\overline{a_2}),$$

wobei jeweils $\overline{a}$ die zu a konjugiert komplexe Zahl bedeutet, also $\overline{a} = (r,-s)$ für $a = (r,s) \in \mathbb{C}$, so hat jedes Element aus $(\mathbf{H}, \oplus, \circ)$ ein inverses Element bezüglich $\circ$. Trotzdem ist auch $(\mathbf{H}, \oplus, \circ)$ kein Körper, sondern nur ein Ring (Warum?). Man nennt ihn den Ring der hamiltonschen Quaternionen.

Lösung zur Aufgabe 5.

a) Nein, denn es gilt $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ und $1 \in \mathbb{Z}$, aber $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

b) Nein. Es gibt keine $\mathbb{Z}$-Vektorräume, weil $\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Zwischenbemerkung: Es sei L ein Körper und K ein Teilkörper von L. Durch Vergleich der Körper- und Vektorraumdefinitionen sieht man sofort, daß L ein Vektorraum über K ist. (Insbesondere kann man jeden Körper als Vektorraum über sich selbst auffassen.)

c) Ja, weil $\mathbb{Q}$ ein Teilkörper von $\mathbb{Q}$ ist (nach Zwischenbemerkung).

d) Ja, weil $\mathbb{Q}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist (nach Zwischenbemerkung).

e) Ja, weil $\mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist (nach Zwischenbemerkung).

f) Nein, denn es gilt $(0,1) \in \mathbb{C}$ und $1 \in \mathbb{R}$, aber $(0,1) \cdot 1 = (0,1) \notin \mathbb{R}$.

Lösung zur Aufgabe 6.

Wählen wir in V die Vektoren $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, so gilt $X_i \in M_i$ und daher $M_i \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq 4$. Nach einem Sätzchen aus der Vorlesung ist eine nicht leere Teilmenge M von V genau dann ein Teilraum von V, wenn für beliebige Vektoren $X, Y \in M$ und Elemente $k \in \mathbb{R}$ gilt, daß auch die Vektoren $X + Y$ und kX in M liegen.

a) M_1 ist kein Teilraum, denn es gilt $X_1 \in M_1$ und $X_4 \in M_1$, aber $X_1 + X_4 = X_2 \notin M_1$.

b) M_2 ist kein Teilraum, denn es gilt $X_2 \in M_2$, aber $2X_2 \notin M_2$.

c) M_3 ist gerade die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

mit einer Gleichung und drei Unbekannten über dem Körper $\mathbb{R}$. Nach einem Satz in der Vorlesung ist M_2 deshalb ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, also ein Teilraum von V.

d) Hier haben wir viele Möglichkeiten zu argumentieren, z. B.:

(1) Es gilt $X_4 \in M_4$, aber $2X_4 \notin M_4$. Nach unserem Sätzchen ist M_4 also kein Teilraum.

(2) M_4 enthält nicht den Nullvektor von $\mathbb{R}^3$, ist also kein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der Verknüpfungen von V und damit nach Definition auch kein Teilraum von V.

(3) M_4 ist gerade die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 1$$

mit einer Gleichung und drei Unbekannten über dem Körper $\mathbb{R}$. Nach einem Satz in der Vorlesung ist M_4 deshalb kein Teilraum von V.

Lösung zur Aufgabe 7.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir die gegebenen Vektoren der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 und A_4. Um die Menge dieser Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen, ermitteln wir, auf welche Weisen sich der Nullvektor aus $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ als nicht-triviale Linearkombination $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = O$ darstellen läßt. Dazu betrachten wir die A_i als die Spalten der Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems. Die Lösungsmenge ergibt sich zu $L = \{ \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$. (Nachrechnen!)

Das heißt einerseits, daß $A_3 = 2A_1 - A_2$ ist. Setzen wir also $M_1 := \{A_1, A_2, A_3\}$, so ist M_1 linear abhängig, und $\langle M_1 \rangle$ hat höchstens die Dimension 2. Folglich ist $\langle M_1 \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

Andererseits folgt, daß jede der drei Mengen $M_2 := \{A_1, A_2, A_4\}$, $M_3 := \{A_1, A_3, A_4\}$ und $M_4 := \{A_2, A_3, A_4\}$ linear unabhängig ist. Also sind $\langle M_2 \rangle$, $\langle M_3 \rangle$ und $\langle M_4 \rangle$ jeweils von der Dimension 3 und damit gleich $\mathbb{R}^3$.

Lösung zur Aufgabe 8.

Zu (a). Da $L \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ein Körper ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß L abgeschlossen ist gegenüber den Körperverknüpfungen. Das heißt:

(1) Wir müssen zeigen, daß 0 und 1 in L liegen. Das ist trivial.

(2) Wir müssen zeigen, daß L abgeschlossen ist bezüglich Addition, additiver Inversion und Multiplikation. Das können wir durch einfaches Nachrechnen tun. Sind etwa

$$X_1 = a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4} \quad \text{und} \quad X_2 = a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}$$

beliebige Elemente aus L, so gilt

$$X_1 + X_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\cdot\sqrt[3]{2} + (c_1 + c_2)\cdot\sqrt[3]{4} \in L,$$

$$-X_1 = -a_1 - b_1\sqrt[3]{2} - c_1\sqrt[3]{4} \in L$$

und

$$X_1 \cdot X_2 = (a_1a_2 + 2b_1c_2 + 2c_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + 2c_1c_2)\sqrt[3]{2} + (a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2)\sqrt[3]{4} \in L.$$

(3) Wir müssen zeigen, daß $L\setminus\{0\}$ abgeschlossen ist bezüglich der multiplikativen Inversion. Sei $X = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ also ein beliebiges Element aus $L \setminus \{0\}$. Wegen $X \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existiert $X^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir müssen nur noch zeigen, daß X^{-1} in L liegt. Das verschieben wir hinter Teil (d).

Zu (b). Hier können wir genauso argumentieren wie in der Zwischenbemerkung in Aufgabe 5. Die Existenz multiplikativ inverser Elemente in L brauchen wir dabei nicht.

Zu (c). Wir zeigen der Reihe nach, daß die Mengen $\{1\}$, $\{1, \sqrt[3]{2}\}$, und $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ linear unabhängig sind.

(1) Für $\{1\}$ ist das trivial.

(2) Wir nehmen an, es sei $\sqrt[3]{2}$ linear abhängig von $\{1\}$, d. h., es gibt ein $k \in \mathbb{Q}$ mit

$$\sqrt[3]{2} = k \cdot 1 = k \in \mathbb{Q}.$$

Sei $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Darstellung von k als gekürzter Bruch. Dann gilt

$$a = b\sqrt[3]{2},$$

also

$$a^3 = b^3 \cdot 2.$$

Folglich teilt 2 die Zahl a^3 und daher, weil 2 eine Primzahl ist, auch die Zahl a. Dann ist aber die Zahl $a^3 = 2 \cdot b^3$ durch 2^3 teilbar, und 2 teilt auch b. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, der Bruch sei gekürzt.

(3) Wir nehmen schließlich an, $\sqrt[3]{4}$ sei linear abhängig von $\{1, \sqrt[3]{2}\}$, etwa

(*) $$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten von (*) mit $\sqrt[3]{2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} 2 = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2} &= (a + b\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt[3]{2} \\ &= a\cdot\sqrt[3]{2} + b\cdot\sqrt[3]{4} \\ &= a\cdot\sqrt[3]{2} + b\cdot(a + b\sqrt[3]{2}) \quad \text{(wegen (*))} \\ &= ab + (a + b^2)\cdot\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

und damit

$$0 = (ab - 2)\cdot 1 + (a + b^2)\sqrt[3]{2}$$

Mit (2) folgt, daß beide Koeffizienten, $(ab - 2)$ und $(a + b^2)$, gleich Null sind. Daraus können wir b berechnen, indem wir etwa $a = -b^2$ einsetzen. Wir erhalten

$$0 = 2 - ab = 2 - b\cdot(-b^2) = 2 + b^3$$

und damit $b^3 = -2$ und schließlich $b = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ im Widerspruch zu unserer Annahme.

Zu (d). Da L eine Basis der Länge 3 hat, ist $\dim L = 3$.

Zu (a). Um zu zeigen, daß X^{-1} in L liegt, betrachten wir die Folge der Potenzen

$$(1, X, X^2, X^3).$$

Wegen $\dim L = 3$ ist sie linear abhängig. Es gibt also eine nicht-triviale $\mathbb{Q}$-Linearkombination

$$k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3 = 0.$$

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $k_0 \neq 0$ ist. (Sonst dividieren wir einfach beide Seiten durch eine geeignete Potenz von X. Das ist möglich, weil wir uns im Körper $\mathbb{R}$ befinden.) Also können wir durch k_0 dividieren. Multiplizieren wir noch mit X^{-1}, so ergibt sich

$$X^{-1} + \frac{1}{k_0}\cdot(k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot X + k_3 \cdot X^2) = 0,$$

also

$$X^{-1} = -\frac{1}{k_0}\cdot(k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot X + k_3 \cdot X^2) \in L.$$

Zu (e). Wir betrachten etwa den Teilraum

$$T := \langle 1, \sqrt[3]{2}\rangle = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

von L. Dann ist $\sqrt[3]{2} \in T$, aber $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \notin T$. Also ist T kein Teilkörper von L.

Anmerkung.

Es ist nicht ratsam, zum Nachweis der Existenz von multiplikativ inversen Elementen in L das Inverse von X tatsächlich auszurechnen. Wenn man das tut und dabei, ebenso wie wir es in der obigen Lösung gemacht haben, bereits benutzt, daß die Menge $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ in L linear unabhängig ist, kommt man etwa auf ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Da wir die Theorie der linearen Gleichungssysteme in der Vorlesung noch nicht entwickelt haben, können wir die Tatsache, daß dieses Gleichungssystem lösbar ist, nur dadurch beweisen, daß wir eine Lösung berechnen, und das können wir mit unseren derzeitigen Kenntnissen nur dadurch tun, daß wir uns durch mehrere Fallunterscheidungen kämpfen. Davor sollte Sie der Hinweis bewahren, daß $L \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Obwohl die benutzten Hilfsmittel in der obigen Lösung ganz einfach sind, ist es nicht leicht, auf einen solchen Ansatz zu kommen. In den abgegebenen Bearbeitungen zeigt sich, daß es besser gewesen wäre, wenn wir hier noch einen deutlicheren Hinweis (wie in Teil (c) der Aufgabe) gegeben hätten.

Das inverse Element zu $X = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ ist übrigens

$$X^{-1} = \frac{(a^2 - 2bc) + (2c^2 - ab)\cdot\sqrt[3]{2} + (b^2 - ac)\cdot\sqrt[3]{4}}{a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc}.$$

Die folgende Aufgabe stammt aus dem 4. Übungsblatt der LA1-Vorlesung vor drei Jahren. Der dort vorkommende Vektorraum M ist ein Zeilenraum, der völlig analog zu unserem Spaltenraum $\mathbb{Q}^3$ aus Zeilen statt aus Spalten gebildet wird.

Aufgabe (WS 93/94).

Es sei $M := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Menge aller Tripel (a, b, c) mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten M als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. In M seien die Vektoren $S_1 := (1, 0, 0)$, $S_2 := (0, 1, 0)$ und $S_3 := (0, 0, 1)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Menge $S := \{S_1, S_2, S_3\}$ eine Basis von M ist.

Lösung.

Offensichtlich ist S ein Erzeugendensystem von M, denn jedes Element (a, b, c) von M läßt sich als $\mathbb{Q}$-Linearkombination

$$a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1)$$

der Vektoren S_1, S_2, S_3 darstellen. Andererseits ist diese Darstellung eindeutig, denn nehmen wir an, es sei

$$a_1 \cdot (1, 0, 0) + b_1 \cdot (0, 1, 0) + c_1 \cdot (0, 0, 1) = a_2 \cdot (1, 0, 0) + b_2 \cdot (0, 1, 0) + c_2 \cdot (0, 0, 1)$$

für irgendwelche $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Q}$ für $i \in \{1, 2\}$, so folgt

$$(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$$

und damit $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$. Also ist S linear unabhängig und folglich eine Basis von M.

Hier ist wieder ein Beispiel von früher (diesmal handelt es sich tatsächlich um eine Aufgabe aus dem 4. Übungsblatt von vor zwei Jahren; die Aufgabe neulich war schon ein Jahr älter).

Wir hatten damals die folgende Schreibweise eingeführt. Ist T ein Vektorraum und sind A und B Teilräume von T, so setzen wir $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Man sieht leicht, daß $A + B = \langle A, B \rangle$ ist (weil A und B Teilräume sind).

Aufgabe (WS 94/95).

Es sei V ein Vektorraum, und es seien A, B und C Teilräume von V.

(a) Zeigen Sie: Ist $C \subseteq A$, so gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

(b) Gelten allgemein die Beziehungen

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

und

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)\,?$$

Lösung.

(a) Ist v ein beliebiger Vektor aus $A \cap (B + C)$, so gilt insbesondere $v \in B + C$, also etwa $v = b + c$ mit $b \in B$ und $c \in C \subseteq A$. Wegen $v \in A$ und $c \in A$ gilt auch $b = v - c \in A$, also $b \in A \cap B$, und damit $v = b + c \in (A \cap B) + C$.

Ist umgekehrt v ein beliebiger Vektor aus $(A \cap B) + C$, so hat v die Form $v = b + c$ mit $b \in A \cap B \subseteq B$ und $c \in C$. Also gilt $v \in B + C$. Andererseits liegt $v = b + c$ wegen $b \in A \cap B \subseteq A$ und $c \in C \subseteq A$ in A. Folglich gilt $v \in A \cap (B + C)$.

(b) Um zu zeigen, daß die beiden Beziehungen nicht allgemein gelten, geben wir für jede ein konkretes Gegenbeispiel an. Dazu wählen wir als V den in Aufgabe 9 untersuchten Vektorraum $\mathbb{F}_3{}^2$ und setzen

$$V_0 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\},$$

$$A := \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\},$$

$$B := \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}, \text{ und}$$

$$C := \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Dann gilt

$$A \cap (B + C) = A \neq V_0 = (A \cap B) + (A \cap C)$$

und

$$A + (B \cap C) = A \neq V = (A + B) \cap (A + C).$$

Lösung zur Aufgabe 12.

Es sei $f_0 : x \mapsto 0$ die Nullabbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Wir müssen prüfen, ob sich f_0 auf nicht-triviale Weise als $\mathbb{R}$-Linearkombination von f_1, f_2 und f_3 darstellen läßt. Wir nehmen daher an, es sei

$$f_0 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$

mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, das heißt, es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)(x) \\ &= a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) \\ &= a_1 \cdot (x+1) + a_2 \cdot (x+2) + a_3 \cdot (x^2 + 3x + 2). \end{aligned}$$

Wählen wir für x etwa der Reihe nach die naheliegenden Werte -2 und -1, so erhalten wir $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$. Daraus folgt dann auch $a_3 = 0$. Die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist also linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Eine nicht lineare Beziehung zwischen f_1, f_2 und f_3 gibt es allerdings: Es ist $f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Lösung zur Aufgabe 14.

Vorbetrachtung. f_1 bis f_4 legen keine Bilder auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fest, also definieren sie auch keine Abbildungen von $\mathbb{R}$. Wegen $2^3 = 8 \notin M_5$ und $-3 \cdot 2 = -6 \notin M_5$ definieren f_1 und f_2 keine Abbildungen in M_5, und wegen $-3 \cdot 1 \notin \mathbb{N}$ und $1^3 - 3 \cdot 1 \notin \mathbb{N}$ definieren f_2 und f_3 keine Abbildungen in M_3. Alle anderen Paare (f_i, M_j) liefern Abbildungen von M_j in M_j. Wir brauchen also nur noch diese auf Injektivität und Surjektivität zu untersuchen.

$f_1(x) = x^3$. Sind $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq y$, so ist auch $x^3 \neq y^3$. Also ist f_1 injektiv auf $\mathbb{Q}$ und damit erst recht auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$. Andererseits gibt es nach Aufgabe 8 keine rationale und damit erst recht keine ganze Zahl x mit $x^3 = 2$. Also ist f_1 nicht surjektiv auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$.

$f_2(x) = -3x$. f_2 ist offensichtlich bijektiv auf $\mathbb{Q}$ und injektiv auf $\mathbb{Z}$, aber nicht surjektiv auf $\mathbb{Z}$, weil dort nur ganzzahlige Vielfache von 3 als Bilder auftreten.

$f_3(x) = x^3 - 3x$. Machen wir und eine Wertetabelle für M_5, $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_3(x) & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}$, so sehen wir, daß $f_3(-1) = f_3(2)$ ist. Also ist f_3 nicht injektiv auf M_5 und erst recht nicht auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Außerdem sehen wir, daß 1 in der Tabelle nicht als Bild vorkommt. f_3 ist also nicht surjektiv auf M_5. Um zu zeigen, daß f_3 auch nicht surjektiv auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ ist, zeigen wir etwa, das es keine rationale Zahl x mit $f_3(x) = 3$ gibt. Das machen wir so, wie wir es in Aufgabe 8 gelernt haben. Wir nehmen an, es sei $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ ein gekürzter Bruch mit $\frac{a^3}{b^3} - \frac{3a}{b} = 3$, also $a^3 - 3ab^2 = 3b^3$. Daraus folgt sofort, daß 3 ein Teiler von a ist. Dann muß 3 aber auch ein Teiler von b sein, und das ist ein Widerspruch.

$f_4(x) = |x|$. f_4 ist offensichtlich bijektiv auf $\mathbb{N}$, aber wegen $f_4(-1) = f_4(1)$ und $f_4(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ weder injektiv noch surjektiv auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und M_5.

Ergebnis. Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

	$M_1 = \mathbb{Q}$	$M_2 = \mathbb{Z}$	$M_3 = \mathbb{N}$	$M_4 = \mathbb{R}$	$M_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$f_1(x) = x^3$	injektiv	injektiv	injektiv	—	—
$f_2(x) = -3x$	bijektiv	injektiv	—	—	—
$f_3(x) = x^3 - 3x$	Abb.	Abb.	—	—	Abb.
$f_4(x) = \|x\|$	Abb.	Abb.	bijektiv	—	Abb.

Noch einmal zu Aufgabe 12.

In vielen Bearbeitungen der Aufgabe 12 haben wir Beweise für die lineare Unabhängigkeit von $\{f_1, f_2, f_3\}$ gefunden, die ungefähr folgendermaßen argumentieren.

> Es sei $f_0 : x \mapsto 0$ die Nullabbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Wir müssen prüfen, ob sich f_0 auf nicht-triviale Weise als $\mathbb{R}$-Linearkombination von f_1, f_2 und f_3 darstellen läßt. Wir nehmen daher an, es sei
>
> $$f_0 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$
>
> mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, das heißt, es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$
>
> $$\begin{aligned} 0 &= (a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)(x) \\ &= a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) \\ &= a_3 \cdot x^2 + (a_1 + a_2 + 3a_3) \cdot x + (a_1 + 2a_2 + 2a_3) \cdot 1. \qquad (1) \end{aligned}$$
>
> Hieraus folgt
>
> $$a_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0, \qquad (2)$$
>
> und dieses lineare Gleichungssystem für a_1, a_2, a_3 hat offensichtlich nur die triviale Lösung.

In diesem Beweis fehlt ein wichtiges Argument. Das wird deutlich, wenn wir die Situation ein wenig verallgemeinern, indem wir statt $\mathbb{R}$ einen beliebigen Körper K nehmen und dann f_1, f_2, f_3 als Abbildungen von K in K betrachten (wobei wir die Zahlen 1, 2, 3 entsprechend durch das Einselement e und die Elemente $e + e$ bzw. $e + e + e$ von K ersetzen). Dann können wir unsere Behauptung nicht mehr beweisen, denn es gibt Körper, und sogar unendlich viele, für die $\{f_1, f_2, f_3\}$ linear abhängig ist. Einfachstes Beispiel: Für $K = \mathbb{Z}_2$ ist $f_3 = f_0$.

Frage:

Wo ist die Stelle in unserem Beweis, die für $\mathbb{Z}_2$ nicht funktioniert?

Vielleicht versuchen Sie einmal, das herauszufinden, bevor Sie weiterlesen.

Antwort:

Es ist der Schritt von (1) nach (2). Das durchaus nicht triviale Argument, das hier fehlt, ist folgende Überlegung. Definieren wir die Abbildungen p_0, p_1, p_2 von K in K durch $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ für $x \in K$, so folgt aus (1)

$$f_0 = a_3 \cdot p_2 + (a_1 + a_2 + 3a_3) \cdot p_1 + (a_1 + 2a_2 + 2a_3) \cdot p_0. \qquad (3)$$

Wenn wir jetzt noch wissen, daß $\{p_0, p_1, p_2\}$ linear unabhängig ist, können wir schließen, daß jeder der drei Koeffizienten in (3) gleich Null sein muß. Diese Voraussetzung gilt aber nicht über jedem Körper: Für $K = \mathbb{Z}_2$ etwa ist $p_1 = p_2$.

Wir müssen also begründen, daß $\{p_0, p_1, p_2\}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig ist. Das können wir etwa dadurch tun, daß wir auf den entsprechenden Beweis aus der Vorlesung vom 12.11. verweisen. Beachten Sie: Dieser Beweis enthält u. a. den Schluß

$$2a_2 = 0 \implies a_2 = 0.$$

Das gilt bekanntlich in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Z}_2$.

Bemerkung:

Letztendlich greift auch diese Lösung von Aufgabe 12 auf das Einsetzen geeigneter konkreter Werte für x zurück. Daß wir das hier nicht explizit tun müssen, liegt nur daran, daß uns der zitierte Beweis diese Arbeit schon abgenommen hat.

Einige Bemerkungen zu Aufgabe 18 (a).

Die Aufgabe 18 (a) scheint große Schwierigkeiten gemacht zu haben. Sie ist kaum richtig bearbeitet worden. Fast alle abgegebenen Lösungen fangen ganz richtig mit der Feststellung an, daß nach Definition des Erzeugnisses als Menge der endlichen K-Linearkombinationen auf den Erzeugenden gilt, daß

$$\langle X\rangle = \{k\cdot X \mid k \in K\} \qquad (1)$$

ist, schließen dann aber zu Unrecht daraus, daß $|\langle X\rangle| = |K|$ ist. Im Spezialfall $|K| < \infty$ auf den wir uns hier der Einfachheit halber beschränken wollen, können wir aus (1) aber etwa tatsächlich nur schließen, daß, weil alle Vektoren aus $\langle X\rangle$ unter den $|K|$ Linearkombinationen $k\cdot X$ vorkommen, ihre Anzahl höchstens gleich $|K|$, also $|\langle X\rangle| \leq |K|$ ist. Dazu drei Beispiele.

(1) Alles, was wir bisher gesagt haben, gilt auch, wenn wir als X den Nullvektor X_0 von V wählen. Ganz offensichtlich ist aber $|\langle X_0\rangle| = 1 \neq |K|$. Der Unterschied zum Fall $X \neq X_0$ ist, daß $\{X_0\}$ zwar auch ein Erzeugendensystem, aber keine Basis von $\langle X_0\rangle$ ist, und das reicht nicht. Wir brauchen die lineare Unabhängigkeit von $\{X_0\}$, um zu beweisen, daß die $|K|$ verschiedenen Linearkombinationen $k\cdot X$ paarweise verschiedene Vektoren darstellen, daß $\langle X\rangle$ also mindestens $|K|$ verschiedene Elemente enthält.

(2) Es ist dies genau das gleiche Problem, das wir in Aufgabe 12 hatten (vgl. die Bemerkungen auf der Rückseite des 6. Übungsblattes). Auch dort ging es darum, daß aus den formal verschiedenen Definitionen von p_1 und p_2 durch $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ noch nicht folgte, daß p_1 und p_2 linear unabhängig oder auch nur verschieden sein müssen.

(3) Hier ist noch ein anderes Beispiel dafür, daß die Anzahl der Elemente nicht gleich der Anzahl der formal verschiedenen Ausdrücke zu sein braucht, mit denen die Elemente beschrieben sind. In der Vorlesung haben wir den Restklassenraum V/T eines Vektorraums V nach einem Teilraum T durch

$$V/T = \{T + X \mid X \in V\}$$

definiert. Wählen wir z. B. als V den Vektorraum K^2 über einem Körper $K = \{0,1\}$ mit zwei Elementen, so ist nach unserer Definition

$$V/T = \{T + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, T + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, T + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\}.$$

Trotzdem ist $|V/T|$ im allgemeinen nicht gleich 4, denn nach dem Dimensionssatz für Faktorräume endlich erzeugter Vektorräume ist

$$|V/T| = |K|^{\dim V/T} = |K|^{\dim V - \dim T} = 2^{2-\dim T},$$

also gleich 1 oder 2 oder 4, je nach der Dimension von T.

Einige Bemerkungen zu Aufgabe 19 (b) und (c).

Sinn einer solchen Aufgabe ist es natürlich nicht, irgendwie das inverse Element a^{-1} zu erahnen oder zu erraten und dann durch eine sogenannte „Probe“ zu verifizieren, sondern vorzuführen, wie man es berechnet. Dabei sollte der gegebene Hinweis für einen besonders geringen Arbeitsaufwand sowohl beim Lösen als auch beim Korrigieren der Aufgabe sorgen. Leider wurde diese Absicht dadurch unterlaufen, daß fast niemand den Hinweis beachtet hat.

Worauf wir dabei verwiesen hatten, war der Beweis für die Existenz eines multiplikativ inversen Elementes in K_0. Die entscheidende Beweisidee war dabei, das Element, zu dem ein Inverses gesucht wird, der Reihe nach, etwa von links, mit allen Elementen von K_0 zu multiplizieren und dann einfach in der Liste der Produkte nachzusehen, wo das Einselement auftaucht. Diese Idee ist konstruktiv. Sie liefert daher ein simples Verfahren zur Berechnung des multiplikativ inversen Elements zu einem Element ungleich Null in einem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p$. Und wenn wir einen Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ nehmen, der kein Körper ist, können wir dasselbe Verfahren benutzen, um zu testen, ob unser Element ein Nullteiler ist, indem wir unter den Produkten nach dem Nullelement statt nach dem Einselement suchen.

Wir legen also für unsere beiden Restklassenringe $\mathbb{Z}_{31}$, der ein Körper ist, und $\mathbb{Z}_{32}$, der kein Körper ist, die entsprechenden Listen für a bzw. b an (mit den gegebenen Zahlen 10 und 31 bzw. 10 und 32 ist das wirklich ganz einfach).

	x	$x\cdot a$ in $\mathbb{Z}_{31}$	
	$\overline{0}$	$\overline{0}$	
	$\overline{1}$	$\overline{10}$	
	$\overline{2}$	$\overline{20}$	
	$\overline{3}$	$\overline{30}$	
	$\overline{4}$	$\overline{9}$	
	$\overline{5}$	$\overline{19}$	
	$\overline{6}$	$\overline{29}$	
	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$= a^3$
	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$= a^4$
	$\overline{9}$	$\overline{28}$	
$a =$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$= a^2$
	$\overline{11}$	$\overline{17}$	
	$\overline{12}$	$\overline{27}$	
	$\overline{13}$	$\overline{6}$	
	$\overline{14}$	$\overline{16}$	
	$\overline{15}$	$\overline{26}$	
	$\overline{16}$	$\overline{5}$	
	$\overline{17}$	$\overline{15}$	
	$\overline{18}$	$\overline{25}$	
	$\overline{19}$	$\overline{4}$	
	$\overline{20}$	$\overline{14}$	
$-a =$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	
	$\overline{22}$	$\overline{3}$	
	$\overline{23}$	$\overline{13}$	
	$\overline{24}$	$\overline{23}$	
	$\overline{25}$	$\overline{2}$	
	$\overline{26}$	$\overline{12}$	
	$\overline{27}$	$\overline{22}$	
$a^{-1} =$	$\overline{28}$	$\overline{1}$	
	$\overline{29}$	$\overline{11}$	
	$\overline{30}$	$\overline{21}$	

	x	$x\cdot b$ in $\mathbb{Z}_{32}$	
	$\overline{0}$	$\overline{0}$	
	$\overline{1}$	$\overline{10}$	
	$\overline{2}$	$\overline{20}$	
	$\overline{3}$	$\overline{30}$	
	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$= b^3$
	$\overline{5}$	$\overline{18}$	
	$\overline{6}$	$\overline{28}$	
	$\overline{7}$	$\overline{6}$	
	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$= b^4$
	$\overline{9}$	$\overline{26}$	
$b =$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$= b^2$
	$\overline{11}$	$\overline{14}$	
	$\overline{12}$	$\overline{24}$	
	$\overline{13}$	$\overline{2}$	
	$\overline{14}$	$\overline{12}$	
	$\overline{15}$	$\overline{22}$	
	$\overline{16}$	$\overline{0}$	
	$\overline{17}$	$\overline{10}$	
	$\overline{18}$	$\overline{20}$	
	$\overline{19}$	$\overline{30}$	
	$\overline{20}$	$\overline{8}$	
	$\overline{21}$	$\overline{18}$	
$-b =$	$\overline{22}$	$\overline{28}$	
	$\overline{23}$	$\overline{6}$	
	$\overline{24}$	$\overline{16}$	
	$\overline{25}$	$\overline{26}$	
	$\overline{26}$	$\overline{4}$	
	$\overline{27}$	$\overline{14}$	
	$\overline{28}$	$\overline{24}$	
	$\overline{29}$	$\overline{2}$	
	$\overline{30}$	$\overline{12}$	
	$\overline{31}$	$\overline{22}$	

Aus der Liste für $\mathbb{Z}_{31}$ liest man sofort ab, daß $a^{-1} = \overline{28}$ ist, und durch Entlanghangeln in der Liste erhält man ebenso mühelos die vierte Potenz von a als

$$a^4 = a\cdot a\cdot a\cdot a = \overline{10}\cdot a\cdot a\cdot a = \overline{7}\cdot a\cdot a = \overline{8}\cdot a = \overline{18}.$$

Entsprechend sieht man in der Liste für $\mathbb{Z}_{32}$, daß $\overline{16}\cdot b = \overline{0}$, also b wegen $b \neq \overline{0}$ und $\overline{16} \neq \overline{0}$ ein Nullteiler ist, und man erhält wieder ohne Rechnen

$$b^4 = b\cdot b\cdot b\cdot b = \overline{10}\cdot b\cdot b\cdot b = \overline{4}\cdot b\cdot b = \overline{8}\cdot b = \overline{16}.$$

Bemerkung. Das Verfahren, das wir hier benutzt haben, ist natürlich für Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ mit großem n nicht mehr brauchbar. Dafür werden wir später etwas Besseres kennenlernen.

Vorbemerkungen zu den Aufgaben 37, 40 und 41.

Diese Aufgaben dienen der Vertiefung der folgenden Ergebnisse.

(1) Ein homogenes lineares Gleichungssystem (mit m Gleichungen und n Unbekannten über einem Körper K) ist immer lösbar. Die Menge L der Lösungen ist ein K-Vektorraum der Dimension $d = n - r$, wobei r der Rang der Koeffizientenmatrix ist. Insbesondere ist im Falle eines endlichen Körpers
$$|L| = |K|^d.$$

(2) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem (mit m Gleichungen und n Unbekannten über einem Körper K) ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

Wenn es lösbar ist, ist die Menge M der Lösungen eine Restklasse
$$M = Y + L$$
nach dem Lösungsraum L des zugehörigen homogenen Systems. Dabei ist Y eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems. Insbesondere ist dann
$$|M| = |L|.$$

(3) Spezialfall: Hat ein lineares Gleichungssystem mindestens eine nicht-triviale Lösung, aber insgesamt nur endlich viele Lösungen, das heißt, ist $1 < |L| < \infty$, so ist K endlich und deshalb $|K| = p^k$ für eine Primzahl p und ein $k \in \mathbb{N}$, und es ist
$$|L| = |K|^d = p^{k \cdot d}.$$

Lösung zur Aufgabe 37.

Es sei M die Lösungsmenge des gegebenen (lösbaren) inhomogenen linearen Gleichungssystems mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper $K = \mathbb{Z}_{1009}$ und L der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems. Dann ist $|M| = |L| = |K|^d = 1009^d$ mit $d = 5 - r$, wobei r der Rang der Koeffizientenmatrix ist. Wegen $r \leq 3$ ist
$$|M| = 1009^{5-r} \geq 1009^2 = 1\,018\,081.$$
Also ist die gegebene Aussage wahr für alle Zahlen n_1 bis n_6.

Hieraus folgt allerdings noch nicht, daß sie für n_7 oder n_8 falsch ist. Wenn wir das behaupten, müssen wir es beweisen, etwa durch konkrete Angabe eines geeigneten Beispiels. Ein solches Beispiel ist
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bar{1} \cdot x_1 & + & \bar{0} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & + & \bar{0} \cdot x_4 & + & \bar{0} \cdot x_5 & = & \bar{1} \\
\bar{0} \cdot x_1 & + & \bar{1} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & + & \bar{0} \cdot x_4 & + & \bar{0} \cdot x_5 & = & \bar{0} \\
\bar{0} \cdot x_1 & + & \bar{0} \cdot x_2 & + & \bar{1} \cdot x_3 & + & \bar{0} \cdot x_4 & + & \bar{0} \cdot x_5 & = & \bar{0}
\end{array}$$
Dieses System ist offensichtlich inhomogen und lösbar, und es ist
$$|M| = |L| = 1009^{5-3} = 1\,018\,081 < h_7 < n_8.$$
Also ist die gegebene Aussage tatsächlich falsch für n_7 und erst recht für n_8.

Lösung zur Aufgabe 40.

$n_1 = 1$. Ein (homogenes oder inhomogenes) lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten über einem Körper K hat, wenn es lösbar ist, genau $|K|^{3-r}$ Lösungen, wobei r der Rang der Koeffizientenmatrix ist. Wegen $|K| > 1$ und $r \leq 2$ ist $|K|^{3-r} > 1$. Also gibt es kein derartiges System, das genau eine Lösung hat.

$n_2 = 5$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{1} \cdot x_1 & + & \bar{0} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & = & \bar{1} \\
\bar{0} \cdot x_1 & + & \bar{1} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & = & \bar{0}
\end{array}$$
über $K = \mathbb{Z}_5$ ist offenbar lösbar und hat genau $|M| = |K|^{3-r} = 5^1 = 5$ Lösungen.

$n_3 = 6$. Nach Vorbemerkung (3) gibt es kein (homogenes oder inhomogenes) lineares Gleichungssystem mit genau 6 Lösungen.

$n_4 = 8$. Wenn es ein solches inhomogenes lineares Gleichungssystem mit genau 8 Lösungen gibt, folgt mit den Bezeichnungen von Vorbemerkung (3), daß $|M| = 8 = 2^3 = 2^{k \cdot d}$ ist, also $k = 1$ und $d = 3$ oder $k = 3$ und $d = 1$. Da das System inhomogen ist, ist aber $r \geq 1$, also $d = 3 - r \leq 2$, also $d = 1$ und $k = 3$. Das heißt: Der zugrundeliegende Körper muß ein Körper mit 8 Elementen sein.

Wir wissen noch nicht, ob es überhaupt solche Körper gibt. Wenn wir aber einen solchen Körper K hätten (etwa mit neutralen Elementen 0 und 1), könnten wir das inhomogene lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{ccccccc}
1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 1 \\
0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 0
\end{array}$$
über K betrachten. Es ist lösbar und hat genau $|M| = |K|^{3-r} = 8$ Lösungen.

Somit erhalten wir unser zur Zeit bestmögliches Ergebnis: Es gibt genau dann ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten über einem geeigneten Körper, das genau 8 Lösungen hat, wenn es einen Körper mit 8 Elementen gibt.

$n_5 = 9$. Analog zum Fall n_4 erhalten wir jetzt die Bedingungen $|M| = 9 = 3^2 = 3^{k \cdot d}$ und $d \leq 2$. Wir können sie erfüllen, indem wir etwa das inhomogene lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{1} \cdot x_1 & + & \bar{0} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & = & \bar{1} \\
\bar{0} \cdot x_1 & + & \bar{0} \cdot x_2 & + & \bar{0} \cdot x_3 & = & \bar{0}
\end{array}$$
über $K = \mathbb{Z}_3$ betrachten. Es ist lösbar und hat genau $|M| = |K|^{3-r} = 3^2 = 9$ Lösungen.

Lösung zur Aufgabe 41.

Nach der Vorbemerkung (3) hat ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über dem Körper $K = \mathbb{Z}_p$ genau dann genau p^n Lösungen, wenn $n = d = n - r$ ist, d. h., wenn die Koeffizientenmatrix den Rang 0 hat.

(a) Das homogene lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über $\mathbb{Z}_p$, dessen Koeffizientenmatrix nur Nullen enthält, erfüllt diese Bedingung. Also ist die Antwort hier ja.

(b) Der Rang der Koeffizientenmatrix eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems ist gleich dem Rang seiner erweiterten Koeffizientenmatrix und damit größer als Null. Also ist die Antwort hier nein.

1. Halbklausur zur Linearen Algebra I (20. 12. 96)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 51 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Auf der Menge $M = \mathbb{Q}\setminus\{1\}$ definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch $a \circ b = (a-1)\cdot(b-1)+1$ für $a, b \in M$.

(a) Zeigen Sie, daß $\circ$ assoziativ ist. (Hinweis: Multiplizieren Sie dabei die Klammerausdrücke nicht aus.)

(b) Gibt es in M ein neutrales Element bezüglich $\circ$?

(c) Ist M eine Gruppe?

6 Punkte

Aufgabe 2.
Im Vektorraum $V = K^2$ über einem Körper K sei die Teilmenge $M = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a + b = a^2 \}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob M ein Teilraum von V ist

(a) für den Fall $K = \mathbb{Z}_2$, (b) für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$.

4 Punkte

Aufgabe 3.
Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear?

(a) $\varphi_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$, (b) $\varphi_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 + x_2 \\ 2 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}\,\varphi_i$ und von $\mathrm{Bild}\,\varphi_i$, wenn φ_i linear ist.

9 Punkte

Aufgabe 4.
Auf $\mathbb{Z}$ sei die Relation $R = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq 2b \}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob R reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung)

3 Punkte

Aufgabe 5.
Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{19}$ sei das Element $a = \overline{9}$ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der in den Hausaufgaben geübten Methode, also ohne a zu potenzieren und ohne euklidischen Algorithmus,

(a) das Element a^7, (b) das Element a^{-1}.

4 Punkte

Aufgabe 6.
In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ sowie der Teilraum $T = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Folge der Restklassen $(T + X, T + Y)$ linear unabhängig ist.

6 Punkte

Aufgabe 7.
Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.

5 Punkte

Aufgabe 8.
Im Spaltenraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ gegeben. Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(X) = Y$, $\varphi(Y) = X$ und $\varphi(Z) = Z$? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? (Auf die Begründung kommt es an.)

6 Punkte

Aufgabe 9.
In $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien die Funktionen f_1, f_2, g_1 und g_2 gegeben durch

$$f_1(x) = 2e^{3x} - e^{-2x}, \quad f_2(x) = -e^{3x} + e^{-2x}, \quad g_1(x) = e^{3x}, \quad g_2(x) = e^{-2x}.$$

Wir betrachten den Teilraum $V = \langle f_1, f_2 \rangle$. Offensichtlich sind $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ und $\mathcal{B} = (g_1, g_2)$ Basen von V, und es gibt zwei lineare Abbildungen φ und ψ von V in V mit $\varphi(f) = f'$ und $\psi(f) = f^{(19)}$ (neunzehnte Ableitung von f) für $f \in V$ (nicht zu beweisen). Berechnen Sie

(a) die Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$,

(b) die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$. (Hier genügt es, wenn Sie die großen Zahlen in den Matrizen als Summen von Potenzen schreiben.)

8 Punkte

Semesterklausur zur Linearen Algebra I (15. 2. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 16 gegebenen Aufgaben für insgesamt 84 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Auf der Menge $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der positiven geraden Zahlen definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch $a \circ b = \frac{a \cdot b}{2}$ für alle $a, b \in M$.

(a) Ist $\circ$ assoziativ?

(b) Gibt es in M ein neutrales Element bezüglich $\circ$? Wenn ja, welches?

(c) Ist $(M, \circ)$ eine Gruppe? *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Ist $M_1 = \{f \in V \mid f(3) + f(5) = f(8)\}$ ein Teilraum von V?

(b) Ist $M_2 = \{f \in V \mid f(2) \cdot f(4) = f(8)\}$ ein Teilraum von V?

Antwort jeweils mit Begründung. *4 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei φ die durch $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}$ gegebene Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.

(b) Berechnen Sie eine Basis von Kern φ.

(c) Berechnen Sie eine Basis von Bild φ. *6 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei V ein 2-dimensionaler K-Vektorraum. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{ (X, Y) \in V \times V \mid (X, Y) \text{ ist linear abhängig} \}$$

definierte Relation auf V reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Im dreidimensionalen K-Vektorraum $V = K^3$ seien Vektoren X_1, X_2, Y_1, Y_2 gegeben, so daß jede der Folgen (X_1, X_2) und (Y_1, Y_2) linear unabhängig ist. Wir setzen $T = \langle X_1, X_2 \rangle$ und betrachten im Restklassenraum V/T die Folge (R_1, R_2) der Restklassen $R_1 = T + Y_1$ und $R_2 = T + Y_2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (Auf die Begründung Ihrer Antwort kommt es an.)

(a) (R_1, R_2) ist linear unabhängig.

(b) (R_1, R_2) ist linear abhängig.

(c) Beides kann vorkommen, es hängt von der Wahl der Vektoren ab. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Für verschiedene Körper K sei jeweils der Vektorraum $V = K^3$ gegeben und darin die Vektoren $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Für welche Körper K gibt es zu jeder Wahl von Vektoren $Y_1, Y_2, Y_3 \in V$ eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(X_i) = Y_i$ für $i = 1, 2, 3$? Antwort mit Beweis.

Hinweis: Beachten Sie die Charakteristik von K. *6 Punkte*

Aufgabe 7.
In $V = \mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$.

(b) Wir nehmen weiter an, die obigen Basisvektoren B_1 und B_2 seien Eigenvektoren eines Endomorphismus φ von V mit den zugehörigen Eigenwerten $c_1 = 5$ und $c_2 = -5$. Geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ an.

(c) Berechnen Sie aus den unter (a) und (b) berechneten Matrizen die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und dann die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$ für $\psi = \varphi^{11}$. (Soweit darin hohe Potenzen von Zahlen vorkommen, brauchen Sie diese nicht auszumultiplizieren.) *8 Punkte*

Aufgabe 8.
In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$. *6 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie: Ist φ ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von V, so ist $\dim V = \infty$. *4 Punkte*

Aufgabe 10.

(a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten lösbar? (Antwort mit Beweis)

(b) Wie viele Elemente kann ein Körper haben, über dem es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt? Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Nur aufzählen, ohne Beweis)

(c) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten (über einem geeigneten Körper), das genau 64 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis) *4 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	7	8	11	10	9	12	3	2	6	5	1	4

gegebene Permutation auf der Menge $M = \{1, 2, \dots, 12\}$.

(a) Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykel.

(b) Geben Sie die Bahnen auf M unter π an.

(c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.

(d) Zeigen Sie, daß man π nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben kann.

(e) Berechnen Sie die Ordnung von π.

(f) Wie viele Elemente der Gruppe S_{12} haben die gleiche Zykelstruktur wie π? (Sie brauchen das Ergebnis nicht auszumultiplizieren, müssen es aber begründen.) *8 Punkte*

Aufgabe 12.
Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei A und alle vorkommenden Unterdeterminanten jeweils nach der ersten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen und keine Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten.) *3 Punkte*

Aufgabe 13.
Es sei $\mathbb{Z}_2[x]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}_2$ und $P(\mathbb{Z}_2)$ der Ring aller Polynomabbildungen von $\mathbb{Z}_2$ in $\mathbb{Z}_2$, und es sei ε der Homomorphismus von $\mathbb{Z}_2[x]$ auf $P(\mathbb{Z}_2)$, der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_2[x]$$

die durch

$$\overline{f}: k \mapsto a_0 + a_1k + \ldots + a_nk^n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_2$$

definierte Polynomabbildung $\overline{f} \in P(\mathbb{Z}_2)$ zuordnet. Weiter sei

$$g = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \quad \text{und} \quad G = \{f \cdot g \mid f \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq \mathbb{Z}_2[x].$$

Beweisen Sie: Es ist $G = \operatorname{Kern}\varepsilon$ (also gleich $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(\mathbb{Z}_2)\}$).
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $G \subseteq \operatorname{Kern}\varepsilon$ und dann $\operatorname{Kern}\varepsilon \subseteq G$. *9 Punkte*

Aufgabe 14.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. *7 Punkte*

Aufgabe 15.
Es sei V ein K-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $T \leq V$. Geben Sie (jeweils ohne Beweis) eine Definition an für

(a) den Dualraum V^* von V,

(b) den Annihilator $\operatorname{An}(T)$ in V^*,

(c) die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*. *3 Punkte*

Aufgabe 16.
Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \rangle \leq V$. Berechnen Sie den Annihilator von T im Dualraum V^* von V. Stellen Sie dabei die Elemente φ aus $\operatorname{An}(T)$ durch ihre Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}$ dar. (Wichtig ist eine ausreichende Erläuterung Ihrer Rechnung.) *5 Punkte*

Ersatzklausur zur Linearen Algebra I (11. 4. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 14 gegebenen Aufgaben für insgesamt 85 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch

$$a \circ b = a + b + 3 \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ist $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine Gruppe? (Antwort mit Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, T ein echter Teilraum von V (also $T \leq V$ und $T \neq V$) und $W = \mathrm{Hom}(V, V)$.

(a) Ist $M_1 = \{\varphi \in W \mid T \leq \mathrm{Kern}\, \varphi\}$ ein Teilraum von W?

(b) Ist $M_2 = \{\varphi \in W \mid \mathrm{Kern}\, \varphi \leq T\}$ ein Teilraum von W?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{Z}_2^3$ der 3-dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ mit 2 Elementen. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{(X, Y) \in V \times V \mid X + Y = 0 \in V\}$$

definierte Relation auf V reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist.
Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *1 + 1 + 1 = 3 Punkte*

Aufgabe 4.

Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein konkretes Gegenbeispiel) jeweils die folgenden Behauptungen.

(a) Ist R ein Ring und sind a und b Nullteiler von R, so ist auch $a + b$ ein Nullteiler von R.

(b) Ist R ein Ring und sind a und b Nullteiler von R, so ist auch $a \cdot b$ ein Nullteiler von R.

3 + 3 = 6 Punkte

Aufgabe 5.

Es sei $V \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3, und es sei

$$T = \langle x^3 + x - 2,\ 2x^3 - x^2 - 1,\ 3x^3 - 2x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von V/T. (Eine ausreichende Erläuterung der Rechenschritte ist wichtig. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.) *5 Punkte*

Aufgabe 6.

Es sei K ein beliebiger Körper und V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis (B_1, B_2, B_3). Wir betrachten die Teilräume $T_1 = \langle B_1 \rangle$ und $T_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$ von V. Es sei

$$F = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V) \mid \varphi(T_1) \leq T_1 \ \text{ und } \ \varphi(T_2) \leq T_2\}$$

die Menge aller linearer Abbildungen von V nach V, die T_1 und T_2 jeweils in sich abbilden.

(a) Zeigen Sie, daß F ein Teilraum von $\mathrm{Hom}(V, V)$ ist.

(b) Welche Dimension hat F? (Antwort mit Begründung.) *2 + 4 = 6 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Durch die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ seien eine weitere Basis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V und eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$.

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$.

(c) Kann man mit Hilfe der oben genannten Matrizen das Bild $\varphi(X)$ des Vektors $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ aus V berechnen?
(Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?) *2 + 2 + 2 = 6 Punkte*

Aufgabe 8.

In $V = \mathbb{Z}_5^3$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben.

Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$. (Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz.) *4 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das genau 16 Lösungen hat?

(b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 32 Lösungen hat?

(Antwort jeweils mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.
Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei π die durch

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline i\pi & 9 & 5 & 1 & 7 & 12 & 6 & 10 & 11 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{array}$$

gegebene Permutation aus S_{12}, und es sei $\rho = (1, 11, 4, 8)(2, 9, 3)(5, 12, 7, 10, 6) \in S_{12}$.

(a) Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykel.

(b) Berechnen Sie die Permutationen $\pi \cdot \rho$ und $\rho \cdot \pi$ (in Zykelschreibweise).

(c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.

(d) Kann man ρ als Produkt von Dreierzykeln schreiben? (Antwort mit Begründung.)

(e) Berechnen Sie die Ordnung von π. *1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und φ der durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Fächerbasis C von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix ${}_{C}\varphi_{C}$.

3 + 1 + 5 = 9 Punkte

Aufgabe 12.
Gilt für alle Paare (φ, ψ) von linearen Abbildungen φ und ψ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, daß

(a) Φ_1 mit $\Phi_1(X,Y) = \varphi(X) + \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist,

(b) Φ_2 mit $\Phi_2(X,Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist?

(Antwort jeweils mit Beweis oder konkretem Gegenbeispiel.
Quantoren nicht vergessen!)

3 + 3 = 6 Punkte

Aufgabe 13.
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.)

5 + 1 = 6 Punkte

Aufgabe 14.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $C = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{C}$ sowie die Matrix ${}_{C}\Phi_{C}$ an. (Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.)

(d) Durch die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sei eine weitere Basis $\mathcal{A}$ von V gegeben. Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{A}}$ von Φ bezüglich $\mathcal{A}$.

7 + 1 + 2 + 2 = 12 Punkte

Aus einer LA I-Klausur vom 3. 2. 1995

Zu Aufgabe 1:

Solch Definieren ist mir zu dumm,
drum bleib ich besser stumm.
Diese Mathematisiererei
ist mir eh – einerlei.
Davon bin ich nicht besessen,
ihr seht's selbst: Hab's all vergessen.

Mathe ist doch leicht zu schaffen –
doch wer's nicht kann, der sollt es lassen.

Die Klausur ist vorüber,
es prasselt hernieder
allzu schlechte Noten –
das ist verboten!
Aber was soll ich auch hier?
Fahr jetzt heim –
trink mir ein Bier
und – reim.

Tschüs!

Anmerkung. Der Autor erzählte uns einige Tage später, er habe sich entschlossen, sein Mathematikstudium abzubrechen und sich ganz seinem Germanistikstudium zuzuwenden.

Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.
Welche Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}_{128} = \mathbb{Z}/128\,\mathbb{Z}$ sind Nullteiler?
Geben Sie nicht eine Liste aller dieser Elemente, sondern eine Beschreibung, die es gestattet, durch Betrachtung einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ sofort zu entscheiden, ob $\overline{z} = 128\,\mathbb{Z} + z$ ein Nullteiler ist oder nicht.
(Mit Begründung.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $X \in V$.
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $W := \mathrm{Hom}(V,V)$ der linearen Abbildungen von V nach V.
(a) Ist $M_1 = \{\varphi \in W \mid X \in \mathrm{Kern}\,\varphi\}$ ein Teilraum von W?
(b) Ist $M_2 = \{\varphi \in W \mid \langle X \rangle = \mathrm{Kern}\,\varphi\}$ ein Teilraum von W?
Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei K ein Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei V_n ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Wir definieren jeweils auf V_n eine Relation R_n durch

$$R_n = \{\,(X,Y) \in V_n \times V_n \mid (X,Y) \text{ ist linear abhängig}\,\}.$$

(a) Für welche n ist R_n reflexiv, für welche nicht?
(b) Für welche n ist R_n symmetrisch, für welche nicht?
(c) Für welche n ist R_n transitiv, für welche nicht?
Antwort jeweils mit Beweis. (Quantoren nicht vergessen!) *1 + 1 + 2 = 4 Punkte*

Aufgabe 4.
Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei der Teilraum $T = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben. Berechnen Sie eine Basis von V/T.
(Formulierung und Begründung sind wichtig.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ seien zwei Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$ mit der Basiswechselmatrix $_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ gegeben. Es sei $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Wir betrachten den durch $_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$ definierten Endomorphismus φ von V und das durch $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$ definierte Skalarprodukt Φ auf V.
(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Matrizen $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und $_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$.
(b) Was bedeutet es für die Basisvektoren B_1 und B_2, daß die Komponente $[_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}]_{12}$ von $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ (also der Eintrag in der ersten Zeile, zweiten Spalte von $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$) gleich 0 ist?
(c) Was bedeutet es für den Basisvektor B_2, daß die Komponente $[_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}]_{12}$ von $_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ gleich 0 ist?
3 + 1 + 1 = 5 Punkte

Aufgabe 6.
Es sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen über K und $\varphi : V \to K$ die Abbildung, die jede Matrix $[a_{ij}]$ aus V auf die Summe $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}$ ihrer Einträge abbildet.
(a) Zeigen Sie: φ ist ein lineares Funktional von V.
(b) Berechnen Sie eine Basis von Bild φ.
(c) Berechnen Sie eine Basis von Kern φ.
Formulieren Sie das Ergebnis jeweils in einem Schlußsatz. *3 + 2 + 4 = 9 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 7.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 7 Unbekannten über einem beliebigen Körper hat mehr als 10 Lösungen.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei K ein Körper, V ein 7-dimensionaler K-Vektorraum, W ein 3-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

Jede Restklasse von Kern φ enthält mehr als 10 Elemente.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 9.
Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 0 & 4\\3 & 1 & 2\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben.) *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und φ der durch $_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 3 & 1\\1 & -3 & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.
(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten.
(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum.
(c) Berechnen Sie eine Fächerbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$.
3 + 1 + 5 = 9 Punkte

Aufgabe 11.
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Basis von V. Berechnen Sie den Annihilator des Teilraums

$$T = \langle\, p_0 + 2p_1 + p_2 + 3p_3,\ 2p_0 + 3p_1 + p_2 + 5p_3 \,\rangle \leq V$$

im Dualraum V^* von V. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.) *5 Punkte*

Aufgabe 12.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 4\\2 & 3 & 5\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ gegeben.
(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix $_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.
(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)
(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)
(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.) *7 + 1 + 2 = 10 Punkte*

Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Ist $M_1 = \{A \in V \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$ ein Teilraum von V?

(b) Ist $M_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ ein Teilraum von V?

Antwort jeweils mit Begründung. *3 + 2 = 5 Punkte*

(Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalglieder.)

Aufgabe 2.

Es sei $V \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3, und es sei

$$T = \langle x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + x + 2,\ 2x^3 + x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von V/T.

Erläutern Sie Ihre Rechnung und formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz. *5 Punkte*

Aufgabe 3.

Über dem Körper $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit 5 Elementen seien der Vektorraum $V = \mathbb{Z}_5^3$ sowie die Teilräume $T_1 = \langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \rangle$ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$.

Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz. *4 Punkte*

Aufgabe 4.

(a) Beweisen Sie: Es gibt höchstens vier verschiedene (also nicht isomorphe) Körper, über denen es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt.

(b) Über welchen dieser vier Körper gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 64 Lösungen hat?

Anleitung: Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für ein solches Gleichungssystem an, oder beweisen Sie, daß es kein solches Gleichungssytem gibt.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *4 + 4 = 8 Punkte*

Aufgabe 5.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ seien zwei Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$ mit der Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ gegeben. Es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir betrachten den durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$ definierten Endomorphismus φ von V und das durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$ definierte Skalarprodukt Φ auf V.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$.

(b) Welche Eigenschaft des Basisvektors C_1 (bzw. C_2) kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ ablesen?

(c) Welche Eigenschaft des Basisvektors B_1 (bzw. B_2) kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ ablesen?

(d) Welche Eigenschaft der Basisvektoren C_1 und C_2 kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ ablesen?

(e) Kann man das Bild $\varphi(X)$ des Vektors $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$ mit Hilfe der oben genannten Matrizen berechnen? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht? *4 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

(a) Ist n gerade, so gibt es einen Endomorphismus φ von V mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$. (Konkretes Beispiel mit Begründung.)

(b) Ist n ungerade, so gibt es keinen solchen Endomorphismus. *5 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabe 7.

Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben.)

Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche (das Ergebnis ist ganzzahlig). *5 Punkte*

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Berechnen Sie

(a) die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten,

(b) zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum,

(c) eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. *3 + 3 + 1 = 7 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz. Beachten Sie dabei, daß $\mathcal{B}$ nicht die Standardbasis von V zu sein braucht.)

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) *5 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.) *7 + 1 + 2 = 10 Punkte*
