Klausur Computeralgebra SS15 – Ersttermin

28.07.2015

Für Vollständigkeit und Korrektheit wird keine Garantie übernommen.

Aufgabe 1. (12 Punkte)

Es sei $G = \langle a := (1,2,3), b := (1,5)(2,6)(3,4) \rangle \leq \mathrm{S}_6$.

1. Bestimmen Sie $|G|$.
2. Liegt die Permutation $g := (1,3,2)(4,6,5)$ in G?

Aufgabe 2. (10 Punkte)

1. Definieren Sie den Begriff p-Sylowgruppe einer endlichen Gruppe G.
2. Zeigen Sie: Ist P eine p-Sylowgruppe von G, so ist P genau dann ein Normalteiler von G, wenn P eine charakteristische Untergruppe von G ist.
3. Bestimmen Sie die Anzahl der 7-Sylowuntergruppen in der S_8.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

1. Formulieren Sie das Burnsidesche Fixpunktlemma.
2. Wieviele verschiedene Perlenketten aus 5 Perlen mit 2 Farben gibt es?

Aufgabe 4. (8 Punkte)

1. Definieren Sie das semidirekte Produkt.
2. Zeigen Sie, dass es eine nicht-abelsche Gruppe von Ordnung $605 = 5 \cdot 11^2$ gibt.

Aufgabe 5. (10 Punkte)

1. Formulieren Sie den chinesischen Restsatz.
2. Bestimmen Sie die kleinste positive Lösung des folgenden Kongruenzsystems über $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 5 \pmod 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (8 Punkte)

1. Formulieren Sie das Eisensteinsche Irreduziblitätskriterium.
2. Zeigen Sie, dass $f(x) = x^4 + 14x^3 - 28x^2 + 56 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 7. (14 Punkte)

1. Definieren Sie den Begriff Primelement in einem Integritätsbereich R.
2. Definieren Sie den Begriff irreduzibles Element in einem Integritätsbereich R.
3. Zeigen Sie, dass in einem Integritätsbereich R jedes Primelement irreduzibel ist.
4. Ist $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[x]$ prim?

Aufgabe 8. (10 Punkte)

1. Definieren Sie den Begriff der Hilbertreihe eines $\mathbb{Z}$-graduierten Moduls über einer K-Algebra.
2. Bestimmen Sie die Hilbertreihe des Invariantenringes $\mathbb{C}[x,y]^G$, wobei

$$G := \left\langle a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

Aufgabe 9. (8 Punkte)

1. Geben Sie die elementarsymmetrischen Polynome in 3 Variablen an.
2. Schreiben Sie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen.

Aufgabe 10. (12 Punkte)

1. Formulieren Sie das Henselsche Lemma für das Liften von Nullstellen von Polynomen über $\mathbb{Z}_p$.
2. Bestimmen Sie alle $p \in \{3,5,7\}$, sodass ein $a \in \mathbb{Z}_p$ existiert mit $a^2 = -3$. Falls ein solches a existiert, so bestimmen Sie darüber hinaus ein $a_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \equiv a \pmod{p^3}$.