RWTH Aachen – Sommersemester 2007

Zusammenfassung

Algebra II

Ulrich Loup

Ulrich.Loup@rwth-aachen.de

13. Januar 2008

Anmerkungen:

- Ich garantiere weder Vollständigkeit noch Korrektheit meiner Angaben.
- Dieses Dokument ist primär als persönliches Nachschlagewerk erstellt worden.
- Verbesserungsvorschläge oder sonstige Bemerkungen nehme ich gerne entgegen.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[PleskenAG1] *Algebra I*, Wilhelm Plesken, Vorlesungsskript, RWTH Aachen 2005/2006.

[PleskenAG2] *Algebra II*, Wilhelm Plesken, Vorlesungsskript, RWTH Aachen 2006.

[KriegTop] *Topologie*, Aloys Krieg, Vorlesungsskript, RWTH Aachen 2005.

[KriegFunk] *Analysis IV*, Aloys Krieg, Vorlesungsskript, RWTH Aachen 2005.

[LoupGC] *Zusammenfassung Gitter und Codes*, Ulrich Loup, private Zusammenfassung, 2008.

1 Übersicht

In Abschnitt 2 werden vielfältige Grundlagen der Algebra, Topologie und sogar Funktionentheorie gelegt. Diese dienen dazu, die in Abschnitt 3 aufgebaute Theorie der algebraischen Geometrie zu verstehen und die Ergebnisse, die in den Hauptsätzen formuliert sind, herzuleiten. Im Einzelnen gibt es die folgende Ziele:

Satz von Jordan-Hölder: Der Satz ist das Endergebnis eines Ausflugs in die Modultheorie. Er beschreibt den Aufbau von Moduln, die über ganz allgemeinen Ringen definiert sind: Fallen die aufsteigende (Noetherscher Modul) und absteigende (Artinscher Modul) Kettenbedingung zusammen, so hat der Modul bis auf Permutation der Faktoren genau eine Kompositionsreihe. Weiter wird gezeigt, dass diese Moduln endlich erzeugt sein müssen. Diese Endlichkeitsergebnisse pflanzen sich auf Körper aufgefasst als einfache reguläre Moduln fort.

Erweiterungen von Ringen: Die Erweiterung von Ringen oder Körpern wird hier auf drei unterschiedlichen Ebenen betrachtet:

1. **Endliche Erweiterung $S \supseteq R$:** S wird als **endlich erzeugter R-Modul** aufgefasst. Wegen der Beschränkung auf die additiv geschriebene abelsche Gruppe sind die Elemente in S daher nur R-Linearkombinationen der Erzeuger von S über R.
2. **Ganze Erweiterung $S \supseteq R$:** Die Elemente von S dürfen nun sogar Polynome in den Erzeugern von S über R sein, allerdings mit beschränktem Grad. Dies wird durch Restklassen modulo in R irreduzibler Polynome erreicht, welche die ganzen Elemente in S genannt werden. Der Begriff fällt im Falle, dass S und R Körper sind, mit der **algebraischen Körpererweiterung** zusammen. Eine ganze Ringerweiterung kann auch unendlich sein, sofern unendlich viele ganze Elemente in S vorhanden sind und kann daher im Allgemeinen nicht endlich beschrieben werden. Gibt es allerdings nur endlich viele ganze Elemente in S, so ist $S \supseteq R$ auch eine endliche Ringerweiterung beziehungsweise ein endlich erzeugter R-Modul.
3. **R-Algebra A von endlichem Typ über R:** R ist ein kommutativer Ring und A eine endlich erzeugte, kommutative R-Algebra. Mit der Algebra steht hier nicht nur die additive Gruppe sondern die gesamte Ringstruktur zur Verfügung, weswegen die Elemente von A im Allgemeinen Polynome mit nicht notwendig beschränktem Grad in den Erzeugern von A über R sind. Allgemein ist wie bei den bisher betrachteten Erweiterungen $A \cong R/I$ für ein Ideal $I \trianglelefteq R$, nur ist hier das Ideal ohne Einschränkung gegeben.
4. **transzendente Körpererweiterung E/K:** Wird E als K-Algebra aufgefasst, so ist der transzendente Erweiterungskörper von endlichem Typ über K, allerdings werden nicht alle Erzeuger modulo eines Ideals in ihrer Ordnung beschränkt, son-

dern es entsteht eine unendliche neue Menge an Elementen in $E \backslash K$. Jede Körpererweiterung E/K ist entweder algebraisch (etwa $E \cong K[X] / \langle p(X) \rangle$ für ein irreduzibles $p(X) \in K[X]$), rein transzendent (etwa $E \cong K(X)$ für die Unbestimmte X) oder transzendent als Mischform. Eine transzendente Körpererweiterung kann jedoch zerlegt werden in einen endlichen (endliche Ringerweiterung) und einen rein transzendenten Teil über die NOETHER-Normalisierung, sofern der Grundkörper bereits unendlich ist und der Erweiterungskörper als Algebra endlichen Typ über dem Grundkörper hat, das heißt, endlich erzeugt ist.

5. **Vervollständigung:** Eine Vervollständigung eines bewerteten Körpers, der durch seine Bewertung zu einem metrischen Raum wird, ist die Menge der Äquivalenzklassen von Grenzwerten der CAUCHY-Folgen, die mittels der Metrik auf diesem Körper definiert werden und mit den Grenzwerten selbst identifiziert werden können. Eine Vervollständigung besitzt keine divergenten Folgen mehr und wird daher vollständig genannt.

HILBERTS Nullstellensatz: Die affinen algebraischen Mengen werden zunächst über Teilmengen von Polynomen definiert, es wird jedoch klar, dass sich die Varietäten durch Potenzieren beziehungsweise Radizieren oder lineares Kombinieren der Polynome nicht ändern, womit $\mathcal{V}_{K'}(M) \stackrel{\text{Lineark.}}{=} \mathcal{V}_{K'}((M)) \stackrel{\text{Potenz.}}{=} \mathcal{V}_{K'}(\sqrt{(M)})$ für ein $M \subseteq R$ ist, wobei $K' \supseteq K$ zwecks möglichst allgemeiner Definition gewählt wurde und $R := K[X_1, \ldots, X_n]$ stets der Polynomring in n Unbestimmten über K ist. Ist aber K bereits algebraisch abgeschlossen, so fällt K' mit K zusammen und der HILBERTsche Nullstellensatz gilt.

Die Aussage des Satzes ist zunächst, dass die Polynome der *echten* Ideale von R stets eine gemeinsame Nullstelle besitzen. Daraus lassen sich viele Aussagen ableiten, beispielsweise folgen direkt topologische Eigenschaften, da die affinen algebraischen Mengen der trivialen Ideale von R selbst trivial sind. Weiter wird deutlich, dass das Konzept des Verschwindungsideals $\mathcal{I}_K$ als Radikal-Ideal in R in inklusionsumkehrender Weise mit den Varietäten in $\mathbb{A}^n$ einhergeht, das bedeutet, das Radikal eines Ideals $I \trianglelefteq R$ ist gleich dem Verschwindungsideal der Nullstellenmenge von I. Zusammenfassend wird also die Existenz und Eindeutigkeit der folgenden Bijektion bewiesen:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K &: \operatorname{AAM}(\mathbb{A}^n) \to \operatorname{Rad}(R) : V \mapsto \mathcal{I}_K(V) \\ \mathcal{I}_K^{-1} &: \operatorname{Rad}(R) \to \operatorname{AAM}(\mathbb{A}^n) : \underbrace{\sqrt{I}}_{=\mathcal{I}_K(\mathcal{V}_K(I))} \mapsto \underbrace{\mathcal{V}_K(I)}_{=\mathcal{V}_K(\sqrt{I})} \end{aligned}$$

Der zu Grunde gelegte Körper wird im Folgenden als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt, damit die Ergebnisse aus dem HILBERT*schen Nullstellensatz nicht verloren gehen.*

ZARISKI-Topologie: Nicht nur die Struktur der Radikal-Ideale in R ist mit der Struktur der affinen algebraischen Mengen vergleichbar sondern auch die Struktur der Primideale.

Die affinen algebraischen Mengen $\mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie. Die irreduziblen, affinen algebraischen Mengen, das heißt, solche, die nicht disjunkte Vereinigung echter, affiner algebraischer Mengen sind, sind genau die Urbilder der Primideale unter $\mathcal{I}_K$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K(\mathrm{Irred}(\mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n))) &= \mathrm{Prim}(R) \\ \mathcal{I}_K^{-1}(\mathrm{Prim}(R)) &= \mathrm{Irred}(\mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)) \end{aligned}$$

Die Zariski-Topologie induziert für eine gegebene affine algebraische Menge eine Spurtopologie, so dass die topologischen Eigenschaften direkt auf die affinen algebraischen Mengen selbst übertragbar sind.

Reguläre Funktionen: Werden die Polynome als Funktionen $(\mathbb{A}^n \supseteq M \to K \cong \mathbb{A}^1) \in \mathcal{F}(\mathbb{A}^n)$ aufgefasst, so können auch Aussagen der Funktionentheorie auf die **Polynome als holomorphe Funktionen** angewandt werden. Dazu wird R zunächst in $\mathcal{F}(M)$ eingebettet. Kern dieser Einbettung ist das Verschwindungsideal $\mathcal{I}_K$ und das Bild nach Homomorphiesatz isomorph zu $R/\mathcal{I}_K(M)$. Dies ist nach Abschnitt 2.1.2 eine endlich erzeugte K-Algebra als Unteralgebra von $\mathcal{F}(M)$, die keine nilpotenten Elemente enthält (diese wären in $\sqrt{\mathcal{I}_K(M)} = \mathcal{I}_K(M)$) – also eine affine K-Algebra. Ist $M = V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$, so wird diese Algebra mit $K[V]$ bezeichnet und ihre Elemente als reguläre Funktionen auf V. Dieser Begriff wird noch verallgemeinernd auf Funktionen $f = (f_1, \ldots, f_m) : V \to W$ mit $(f_i : V \to K) \in K[V]$ und $W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^m)$ ausgedehnt, so dass ein **Isomorphiebegriff für affine algebraische Mengen** entsteht, sofern f bijektiv ist. Da f auch stetig in der Zariski-Topologie ist, liegt dann sogar ein Homöomorphismus vor.

Äquivalenz der Kategorien: Die affinen K-Algebren $\mathfrak{AA}_K$ und die affinen algebraischen Mengen $\mathfrak{V}_K$ sind äquivalent vermöge einer kategorientheoretischen Äquivalenz, das bedeutet, dass sowohl die Objekte $(A, (a_1, \ldots, a_n)) \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{AA}_K$ $(A = K[a_1, \ldots, a_n])$, $(V, \mathbb{A}^n)$ $(V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n))$ als auch deren Morphismen $A \to B \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{AA}_K)$ (K-Algebrenhomomorphismus), $V \to W \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{V}_K)$ (reguläre Abbildung) äquivalent sind, indem zwei kontravariante Funktoren angegeben werden, die zueinander invers sind und die eine jeweils in die andere Kategorie überführen.

Dimension affiner algebraischer Mengen:

Der verwendete Dimensionsbegriff ist die Krull-Dimension, die für kommutative Ringe R und topologische Räume $\underline{X}$ definiert wird:

$$\begin{aligned} \dim R &= \begin{cases} -1 & R = \{0\} \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq I_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} & \text{sonst} \end{cases} \\ \dim \underline{X} &= \begin{cases} 1 & X = \emptyset \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid Y_0 \subsetneqq Y_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Y_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei sind die $I_j \trianglelefteq R$ Primideale mit $I_j \neq R$ und die $Y_j \subseteq X$ irreduzible abgeschlossene Mengen bezüglich $\underline{X}$.

Die NOETHER-Normalisierung $K[y_1, \ldots, y_d]$ als Teilalgebra einer K-Algebra A von endlichem Typ liefert den Transzendenzgrad $\mathrm{tr.deg}(\mathrm{Quot}(A)/K) = d = \dim A$.

Produkte affiner algebraischer Mengen: Da kartesische Produkte affiner algebraischer Mengen wieder affine algebraische Mengen sind, wird ein entsprechender Produktbegriff über affinen K-Algebren gesucht. Dies leistet das Tensorprodukt, welches zunächst über eine universelle Eigenschaft definiert wird und dann als Faktorgruppe der freien abelschen Gruppe $F = \{f : M \times N \to \mathbb{Z} \mid f(m,n) = 0$ für alle bis auf endlich viele $(m,n)\}$ (M, N Moduln) modulo des Normalteilers $F_0 \trianglelefteq F$, der die Ausgeglichenheit des Produkts $\pi : M \times N \to M \overset{K}{\otimes} N \cong F\,/F_0$ erzwingt.

2 Grundlagen

2.1 Ringe und Moduln

Zunächst werden nicht notwendig kommutative Ringe mit Eins betrachtet.

Erinnerung 1. *Sei R ein Ring mit Eins.*

1. *R heißt **Integritätsbereich**, falls R keine Nullteiler[1] enthält.*

2. *Ein $a \in R$ heißt **nilpotent**, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a^m = 0$.[2]*

3. *Ein Ring R heißt **faktoriell**, falls jedes $r \in R \setminus R^*$ eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt.*

4. *Jeder Integritätsbereich ist faktoriell.*

5. *Ist der Ring R faktoriell, so auch $R[X]$.*

6. *R heißt **Hauptidealbereich**, wenn jedes Ideal $I \trianglelefteq R$ ein **Hauptideal** ist, das bedeutet, $I = \langle a \rangle := \{\sum_{i=1}^{k} r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{N}\}$ für ein $a \in R$.[3]*

7. *$I \subseteq R$ heißt **Ideal von** R ($I \trianglelefteq R$), falls $I \neq \emptyset$ und für $a, b \in I$, $r, s \in R$ auch $ra + sb \in I$ ist.*

8. *Ein Ideal $R \neq I \trianglelefteq R$ heißt **maximales Ideal**, falls es kein $I \neq J \trianglelefteq R$ gibt mit $I \subseteq J$.*

9. *Ist $I \trianglelefteq R$ maximales Ideal, so ist der **Restklassenring** $R\,/I$ **von** R **nach** I ein Körper, da er **einfach** ist, das heißt er besitzt nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und R.*

[1] ein $0 \neq a \in R$, für das ein $0 \neq b \in R$ existiert, so dass $ab = 0$ in R

[2] Nilpotente Elemente sind also insbesondere Nullteiler.

[3] Im Falle kommutativer Ringe R ist $\langle a \rangle = aR = Ra$.

10. *Ein Ideal $R \neq I \trianglelefteq R$ heißt **Primideal**, falls mit $ab \in I$ stets $a \in I$ oder $b \in I$ ist.*[4]

11. *Ist $I \trianglelefteq R$ Primideal, so ist der Restklassenring R/I von R nach I ein Integritätsbereich.*

Um Moduln zu verstehen und deren Struktur zu analysieren, wird die Theorie der Gruppen mit Operatorbereich auf Moduln übertragen.

Definition 1. *Sei $(M, +)$[5] eine Gruppe.*

- *M heißt Ω-Gruppe, falls eine Abbildung*

$$\Omega \times M \to M : (\omega, m) \mapsto \omega m, \text{ mit } \omega(mn) = (\omega m)(\omega n)$$

für alle $m, n \in M$ und $\omega \in \Omega$[6].

- *Ist $\Omega = R$ ein Ring mit Eins und M abelsche R-Gruppe mit den Gesetzen*

$$\begin{array}{lll} \text{(M1)} & (r+s)m = (rm) + (sm) & \forall r, s \in R, m \in M, \\ \text{(M2)} & r(m+n) = (rm) + (rn) & \forall r \in R, m, n \in M, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(M3)} & r(sm) = (rs)m & \forall r, s \in R, m \in M, \\ \text{(M4)} & 1m = m & \forall m \in M, \end{array}$$

*so heißt M **(Links-)Modul**[7].*

- *Jeder Ring R ist (aufgefasst als abelsche Gruppe) ein R-Modul, der **reguläre R-Modul** $_RR$.*

Definition und Bemerkung 2. *Sei M ein R-Modul.*

1. *Für eine Menge $S \subseteq M$ heißt $\langle S \rangle := \bigcap_{S \subseteq N \leq M} N$ das **Erzeugnis von S in M**.*

2. *Da der Schnitt von Untergruppen und insbesondere Untermoduln wieder eine Untergruppe respektive ein Untermodul ist, bezeichnet $\langle S \rangle$ den kleinsten Untermodul, der S enthält.*

3. *Es ist $\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S, n \in \mathbb{N}_0\}$[8].*

4. *M heißt **endlich erzeugt**, falls $M = \langle S \rangle$ für $|S| < \infty$.*

---

[4] Das Primideal kann als Komplement einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge von R aufgefasst werden (siehe Abschnitt 2.1.4.

[5] später mit M identifiziert

[6] jedes feste $\omega \in \Omega$ induziert also einen Endomorphismus $\varphi_\omega : M \to M : m \mapsto \omega m$

[7] M1,M2 sind die Operatorgruppengesetze jeweils für die Ringoperationen

[8] Beachte: Die Elemente von $\langle S \rangle$ sind zwar endlich, die Menge selbst aber nicht notwendigerweise. Das ist nur bei endlich erzeugten Moduln der Fall.

5. *$M \neq \{0\}$ heißt* ***einfach****, falls aus $U \leq M$ folgt, dass $U \in \{M, \{0\}\}$ ist, M also nur die trivialen Untermoduln enthält.*[9]

6. *Ist $U \leq M$ ein maximaler Untermodul, das bedeutet, genau dann einfach, wenn M*

Beweis:

2. $a, b \in U \cap V$, $r \in R$. $\Longrightarrow ra + b \in U$ und $ra + b \in V$.

3. Zu zeigen: $m \in \bigcap_{S \subseteq N \leq M} N \Rightarrow m = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$.

$\square$

In abelschen Gruppen G ist $gU = Ug$ für alle Untergruppen U und $g \in G$, weswegen jede Untergruppe ein Normalteiler ist (vergleiche [LoupGC], „Normalteiler“). Dies wird im folgenden Satz benutzt.

Satz 1.
Seien R ein Ring mit Eins und M, N R-Moduln. Es gelten wie bei abelschen *Operatorgruppen die folgenden Aussagen:*

1. *Sei $N \leq M$ ein Untermodul. M/N ist ein R-Modul mit repräsentantenweiser Operation, der* ***Faktormodul von** M **modulo** N.*

2. *Homomorphiesatz: Ist $\varphi : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus, so ist* $\mathrm{Bild}(\varphi) \cong M/\mathrm{Kern}(\varphi)$.

   Genauer: Für $L \leq \mathrm{Kern}(\varphi) \leq M$ existiert genau ein R-Homomorphismus $\bar{\varphi} : M/L \to N$, so dass φ mit der kanonischen Abbildung[10] $\pi : M \to M/L : m \mapsto m + L$ *faktorisiert: $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.*

   Daraus folgt

   - $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\bar{\varphi})$
   - *$L = \mathrm{Kern}(\varphi)$ genau dann, wenn $\bar{\varphi}$ injektiv ist. Dann ist $\tilde{\varphi} : M/L \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ ein Isomorphismus.*
   - *Das folgende Diagramm kommutiert*[11]*:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & M/L \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

[9] Vergleiche Einfachheit von Ringen.
[10] oder **natürlicher Epimorphismus**
[11] Das heißt, φ stimmt genau mit der Komposition der beiden Abbildungen π und $\bar{\varphi}$ überein. Sonst wäre jede Abbildung $M \to N$ durch π und $\bar{\varphi}$ bestimmt.

Die folgenden Begriffe beschreiben die Struktur der Untermoduln eines R-Moduls.

Definition 3.
- *Eine Reihe von Untermoduln $M_0 := M \geq M_1 \geq \cdots \geq M_{k-1} \geq \{0\} =: M_k$ heißt* ***Normalreihe von** M **der Länge** k.*

  $M_i\,/M_{i+1}$ für $0 \leq i \leq k-1$ heißt ***Faktor**.*

- *Sind die Faktoren einer Normalreihe alle einfach, so heißt die Reihe* ***Kompositionsreihe**.*

Jeder R-Modul M besitzt beispielsweise die triviale Kompositionsreihe $M \geq U$ für einen maximalen Untermodul $U \leq M$.
Die Endlichkeit von Ringen und Moduln kann über eine aufsteigende (NOETHERsch) und eine absteigende Kettenbedingung (ARTINsch) ausgedrückt werden, was später bei der Transzendenz von Körpern eine Rolle spielt, da Körper NOETHERsch sind.

Definition 4. *Sei M ein R-Modul.*

- *M heißt* ***NOETHERsch**, wenn jede* aufsteigende *Kette $M_0 \leq M_1 \leq \ldots$ von Untermoduln konstant wird.*[12]
- *M heißt* ***ARTINsch**, wenn jede* absteigende *Kette $M_0 \geq M_1 \geq \ldots$ von Untermoduln konstant wird (abbricht).*[13]
- *Diese Eigenschaften übertragen sich auf Ringe R durch den regulären R-Modul ${}_RR$.*

Für NOETHERsche Ringe, bei denen die aufsteigenden Idealketten alle konstant werden, gibt es das folgende wichtige Ergebnis.

Satz 2 (HILBERTscher Basissatz).
Ist R ein NOETHERscher Ring, so ist auch $R[X]$ NOETHERsch.

Beweis: Sei $I \trianglelefteq R[X]$ ein Ideal.
Zeige: I ist endlich erzeugt. (Vergleiche auch Beweis zum ersten Punkt von Bemerkung 5.)
Intuitiv: Die Koeffizienten von Polynomen $f(X) \in I$ können nur durch endlich viele Elemente erzeugt werden, da R NOETHERsch ist. Somit gibt es einen maximalen Grad k, so dass x^{k+1} durch ein Polynom von Grad k dargestellt werden kann. □

Zur Erleichterung des Umgangs mit den Begriffen „NOETHERsch“ und „ARTINsch“ zunächst einige Charakterisierungen.

Bemerkung 1.
Sei M ein R-Modul.

[12] Existenz eines *maximalen* Elements.
[13] Existenz eines *minimalen* Elements.

1. *M ist genau dann* Noether*sch, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.*[14]

   Hauptidealbereiche R und deren Moduln sind Noether*sch.*

2. *Sei $\mathcal{U} = \{U \leq M\} \neq \emptyset$.*

   (a) *M ist genau dann* Noether*sch, wenn $\mathcal{U}$ ein maximales Element enthält.*

   (b) *M ist genau dann* Artin*sch, wenn $\mathcal{U}$ ein minimales Element enthält.*

Beweis:

1. *Da jede Untermodulkette abbricht, können auch nur endlich viele Erzeuger des maximalen Elements der Kette existieren und umgekehrt bei endlich vielen Erzeugern auch nur endlich viele Elemente einer echt aufsteigenden Untermodulkette gefunden werden.*

2. *$\mathcal{U} = \{U \leq M\} \neq \emptyset$ ist eine Menge von Untermoduln.*

   (a) *Angenommen es gäbe kein maximales Element. Dann gibt es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $U' \in \mathcal{U}$ mit $U \leq U'$. So läßt sich aber eine unendlich aufsteigende Untermodulkette konstruieren, Widerspruch.*

       Umgekehrt bildet das maximale Element von $\mathcal{U}$ das Ende einer Untermodulkette.

   (b) *Analog.*

$\square$

Diese Begriffe tragen zur Charakterisierung der Struktur von R-Moduln bei in folgendem Sinne.

Satz 3.
Sei M ein R-Modul.

1. *M besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn M* Noether*sch und* Artin*sch ist.*

   Jordan-Hölder: *Genau dann sind alle Kompositionsreihen von M bis auf Permutation der isomorphen, einfachen Faktoren gleich.*

Beweis:

$\square$

Diese Eigenschaften wurden hier recht allgemein für Noethersche und Artinsche Moduln ausgemacht,[15] in speziellen Fällen ergibt sich folgendes.

[14] Bei Ringen: Jedes Ideal ist endlich erzeugt.
[15] Noch allgemeiner wäre die Definition über Gruppen.

Bemerkung 2.

1. *$\mathbb{Z}$ ist ein* NOETHER*scher Ring, somit auch* $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, x_n]$.

2. *Jeder Hauptidealbereich R ist* NOETHER*sch.*

3. *Jeder Körper K ist* NOETHER*sch und* ARTIN*sch. Außerdem ist K ein Hauptidealbereich mit den Idealen $(0) = \{0\}$ und $(1) = K$.*

4. *R-Algebren A von endlichem Typ erben die Eigenschaften* NOETHER*sch und* ARTIN*sch von R.*

Beweis:

1. *Jedes $a \in \mathbb{Z}$ hat nur endlich viele Teiler, daher liegen auch nur endlich viele Ideale über (a).*[16] HILBERT*s Basissatz $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ist* NOETHER*sch. $\mathbb{Z}$ ist allerdings* nicht ARTINsch*, da bereits $(2) \trianglerighteq (4) \trianglerighteq (8) \trianglerighteq \cdots$ eine unendlich absteigende Idealkette ist.*

2. *Sei R ein Hauptidealbereich und $s \in R$.*

3. *K ist einfach und besitzt daher nur die Ideale K und $\{0\}$, womit es nur eine mögliche Kompositionsreihe gibt: $K \trianglerighteq \{0\}$ ($K\,/\{0\} \cong K$ ist einfach). Mit anderen Worten fällt die Modulstruktur bei Körpern auf die einfachste Form zusammen.*

4. *Sei R* NOETHER*sch und $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{R\text{-}Alg.}$. Es ist $A = R[X_1, \ldots, X_n]\,/I$ für ein Ideal $I \trianglelefteq R[X_1, \ldots, X_n]$. Nach* HILBERT*s Basissatz ist $R[X_1, \ldots, X_n]$* NOETHER*sch und somit erst recht A.*

   Ist R ARTIN*sch, so ...*

□

Ketten von Idealen werden zur Definition des folgenden Dimensionsbegriffs benutzt. Dieser bezieht sich auf die Struktur der Primideale eines Rings, was in Abschnitt 3.4 Verwendung findet.

Definition und Bemerkung 5. *Sei R ein kommutativer Ring.*

- *Für $R \neq \{0\}$ und ein Primideal $P \trianglelefteq R$ bezeichnet*

  $$\mathrm{ht}(P) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq I_n = P \text{ Kette von Primidealen}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

  die ***Höhe von*** *P.*

- *Setze*

  1. $\dim R := -1$, *falls $R = \{0\}$ und ansonsten*
  2. $\dim R := \sup\{\mathrm{ht}(P) \mid P \trianglelefteq R \text{ Primideal}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

  $\dim \underline{X}$ *bezeichnet die* **KRULL-*Dimension von*** *R.*[17]

[16] Merke: $(a \cdot b) = (a, b)$.

[17] Beachte, dass, falls nur ein Primideal in R existiert, $\dim R = 0$ sein kann.

-

2.1.1 Tensorprodukte

Mittels Tensorprodukten können aus Moduln neue abelsche Gruppen konstruiert werden. Seien nun R ein Ring mit Eins und M, N R-Moduln.

Definition 6. *Sei A eine abelsche Gruppe sowie $\pi : M \times N \to A$.*

- *π heißt* ***ausgeglichen****, falls für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$ gilt*
  1. *$\pi(m + m', n) = \pi(m, n) + \pi(m', n)$ und $\pi(m, n + n') = \pi(m, n) + \pi(m, n')$,*[18]
  2. *$\pi(mr, n) = \pi(m, rn)$.*[19]
- *Das Paar (U, π) heißt* ***Tensorprodukt von*** *M* ***und*** *N* ***über*** *R, falls π ausgeglichen ist und für alle Paare (U', π') einer abelschen Gruppe U' und einem ausgeglichenen $\pi' : M \times N \to U'$ genau ein Homomorphismus φ existiert, so dass $\pi' = \varphi \circ \pi$.*

Das Tensorprodukt wird hier über eine *universelle Eigenschaft* definiert, das bedeutet, diese Eigenschaft macht ein gegebenes Paar (U, π) bereits eindeutig zu einem Tensorprodukt, ohne weitere Annahmen zu treffen. Die Definition des Tensorprodukts als Paar ist zunächst nicht anschaulich, da es sich im Endeffekt um eine Operation handelt, die zusätzliche Information ermöglicht jedoch erst das Festlegen der universellen Eigenschaft. Diese Technik erfordert allerdings einen Existenzbeweis für den definierten Begriff, die Eindeutigkeit ist meist eine einfache Folge aus der Definition. Ferner werden Möglichkeiten bereitgestellt, einen entsprechenden Isomorphiebegriff zu definieren.
Die Forderung der Ausgeglichenheit an ein $\pi : M \times N \to A$ wird durch die Konstruktion des Tensorprodukts motiviert. So kann nämlich erreicht werden, dass das Tensorprodukt $M \overset{R}{\otimes} N$ genau vom kartesischen Produkt der Basen von M und N erzeugt wird, weswegen sich die Dimensionen beim Tensorieren multiplizieren.
Aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts lässt sich die Eindeutigkeit sofort folgern:

Folgerung 1. *Sind (U_1, π_1), (U_2, π_2) Tensorprodukte von M und N über R, so gibt es genau einen Isomorphismus $\alpha : U_1 \to U_2$ mit $\pi_2 = \alpha \circ \pi_1$.*

Beweis: Betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dd, shift right, "\varphi_1"'] \\
M \times N \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & U_2 \arrow[uu, shift right, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

[18] Das heißt, π ist bilinear (vergleiche [LoupGC], „Bilinearform").
[19] Beachte: Die Multiplikation auf M, N ist nicht notwendig kommutativ.

Die Homomorphismen φ_1, φ_2 sind jeweils eindeutig bestimmt nach der universellen Eigenschaft der Tensorprodukte (U_1, π_1), (U_2, π_2), was den Isomorphismus bereits definiert. $\square$

Die Existenz wird durch die Angabe der Konstruktion eines Tensorprodukts geklärt. Da dann auch eine Beschreibung von Seiten der Ausgangsmoduln vorliegt, kann eine entsprechende Notation gewählt werden.

Definition und Bemerkung 7.

*Die **freie abelsche Gruppe***

$$F := \{f : M \times N \to \mathbb{Z} \mid f(m,n) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } (m,n)\}$$

ist eine abelsche Gruppe vermöge der komponentenweise Addition. Die Abbildung

$$[m,n] := \delta_{\{m,n\}} : F \to \mathbb{Z} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & (x,y) = (m,n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zu F und $B := \{[m,n] \mid m \in M, n \in N\}$ ist eine Basis von F, das heißt, minimal mit $F = \langle B \rangle$. Die Elemente der Gruppe F erfüllen noch nicht die gewünschten Eigenschaften für Tensorprodukte. Um die Ausgeglichenheit des Produkts zu erzwingen, wird die Faktorgruppe über dem Normalteiler

$$\begin{aligned} F_0 \ := \ & \langle [m+m', n] - [m,n] - [m',n], [m, n+n'] - [m,n] - [m,n'], \\ & [mr, n] - [m, rn] \mid m, m' \in M, n, n' \in N \rangle \end{aligned}$$

betrachtet. F/F_0 hat die Basis $B + F_0 = \{[m,n] + F_0 \mid m \in M, n \in N\}$. Das Tensorprodukt von M, N ergibt sich somit zu

$$\pi : M \times N \to F/F_0 : (m,n) \mapsto [m,n] + F_0.$$

1. *Das bis auf Isomorphie eindeutige Tensorprodukt (U, π) von M und N über R wird mit $M \overset{R}{\otimes} N = U = \mathrm{Bild}(\pi)$ bezeichnet. Die Bilder von π werden mit $\pi((m,n)) = m \otimes n$ für $m \in M, n \in N$. Die $m \otimes n$ bilden als Bilder der kommutierenden Elemente von $M \times N$ die Basis von $M \overset{R}{\otimes} N$.*

2. *Ein Element von $M \overset{R}{\otimes} M$ hat die Form einer endlichen Summe $\sum_{(m,n) \in M \times N} m \otimes n$ und heißt **Tensor**.*

3. *Ist $B_M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ eine Basis von M und $B_N = \{n_1, \ldots, n_s\}$ eine Basis von N, so ist $\{m_i \otimes n_j = [m_i, n_j] + F_0 \mid i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, s\}\}$ eine Basis von $M \overset{R}{\otimes} N$.*

$\implies \dim M \overset{R}{\otimes} N \ = \dim M \ \dim N \ .$

Beweis:

3. $M \overset{R}{\otimes} N = F/F_0 = \langle [m,n] + F_0 \mid m \in M, n \in N \rangle = \langle [m_i, n_j] + F_0 \mid i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\} \rangle$.

□

Ist R ein Körper, so ergibt ist das Tensorprodukt über Vektorräumen, welches direkt über dem kartesischen Produkt der Basisvektoren definiert werden kann (vergleiche [LoupGC]).

Bemerkung 3.
Sind $R = K$ ein Körper und somit M, N K-Vektorräume mit Basen $B_M = \{m_1, \dots, m_r\}$ und $B_N = \{n_1, \dots, n_s\}$, so ist $M \overset{K}{\otimes} N = \langle m_i \otimes n_j \rangle = \langle (m_i, n_j) \rangle$.

Beweis: Es sind $M \cong K^r$ und $N \cong K^s$, also gilt $F \cong K^{rs} \cong F/F_0$ mit

$$\begin{aligned} F_0 &= \langle [m+m', n] - [m,n] - [m', n], [m, n+n'] - [m,n] - [m, n'], \\ &\quad [mr, n] - [m, rn] \mid m, m' \in M, n, n' \in N \rangle \\ &= \langle [0, -n], [-m, 0], [m(r-1), (1-r)n] \mid m, m' \in M, n, n' \in N \rangle \end{aligned}$$

□

2.1.2 Algebren über kommutativen Ringen

Ziele:

- Charakterisierung endlich erzeugter Ring- und Körpererweiterungen.

Sei R ein kommutativer Ring.
Ein R-Modul kann seinerseits auch ein Ring sein, wie beispielsweise der reguläre R-Modul. Dies ist zwar eine Erweiterung der Modulstruktur, kann aber viel treffender als eine Erweiterung der Ringstruktur aufgefasst werden. Dies wird im folgenden allgemein gefasst und auf diesmal kommutativen Ringen[20] definiert.

Definition und Bemerkung 8. *Sei A ein Ring (nicht notwendig kommutativ).*

- $\mathrm{Z}(A) := \{a \in A \mid ra = ar$ *für alle* $r \in A\}$ *heißt das* ***Zentrum von*** A*. Es gilt* $0, 1 \in \mathrm{Z}(A)$.
- *Der Ring A [21] heißt R-**Algebra vermittels** φ, falls ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ existiert, so dass $\mathrm{Z}(A) \leq \varphi(R)$. φ beschreibt hier die Operation von R auf A, so dass die Modulstruktur auf A entsteht.*[22]

[20] Sonst werden Algebren noch über Körpern definiert.
[21] nicht notwendig kommutativ
[22] Eine weitere Möglichkeit ist das Ausgehen von einem Modul, worauf dann die Ringstruktur definiert wird.

Charakterisierung: *A R-Algebra $\Longleftrightarrow$ A ist R-Modul und Ring mit $r(ab) = (ra)b = a(rb)$ für alle $a, b \in A$, $r \in R$.*

- *Ein R-Untermodul $B \leq A$ heißt R-**Unteralgebra**, falls $1_A \in B$ und $ab \in B$ für alle $a, b \in B$.*
- *Ist $S \subseteq A$, so ist $R[S] := \bigcap_{S \subseteq B \leq A} B$ die kleinste R-Unteralgebra, die S enthält. Für endliche $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ ist auch $R[S] = R[s_1, \ldots, s_k] = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle_{R\text{-Alg.}}$.*
- *Sei A eine R-Algebra. Existieren $s_1, \ldots, s_k$, so dass $A = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle_{R\text{-Alg.}}$, so heißt A **von endlichem Typ über** R.*

  Charakterisierung: *R-Algebra A von endlichem Typ über R $\Longleftrightarrow$ es existiert $n \in \mathbb{N}$, $I \trianglelefteq R[X_1, \ldots, X_n]$, so dass $A \cong R[X_1, \ldots, X_n] / I$.*

Beweis:

R-Algebra von endlichem Typ: Die Aussage folgt direkt aus dem Homomorphiesatz für Algebren. Betrachte

$$\varepsilon_{(s_1,\ldots,s_n)} : R[X_1, \ldots, X_n] \to R[s_1, \ldots, s_n] : X_i \mapsto s_i.$$

$\Longrightarrow A \cong R[X_1 \ldots, X_n] / \mathrm{Kern}(\varepsilon_{(s_1,\ldots,s_n)})$.

Genau dann ist also A eine R-Algebra endlichen Typs über R, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und $s_1, \ldots, s_n$ existieren, so dass $A = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle_{R\text{-Alg.}}$. Das ist genau dann der Fall, wenn der Einsetzungshomomorphismus $\varepsilon_{(s_1,\ldots,s_n)}$ wie oben beschrieben existiert.

$\square$

Sei $A = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle_{R\text{-Alg.}} \cong R[X_1, \ldots, X_n] / I$ eine R-Algebra endlichen Typs über dem kommutativen Ring R.
Ganz allgemein ist A zunächst eine Ringerweiterung von R mit endlich vielen Erzeugern, die Elemente von A sind Polynome in diesen Erzeugern. Ist aber R ein algebraisch abgeschlossener Körper, so hat bereits jedes Polynom eine Nullstelle in R und ein maximales Ideal I ist somit das triviale Ideal $(X_1 - s_1, \ldots, X_n - s_n)$ (vergleiche Beweis zu Hauptsatz 1).

Bemerkung 4.

Sei A eine R-Algebra. A ist als R-Modul genau dann Noether*sch, wenn A endlich erzeugt ist und somit als R-Algebra von endlichem Typ über R.*

Beweis: Entweder können an Hand einer unendlich aufsteigenden Untermodul-Kette auch unendlich viele Erzeuger gefunden werden oder umgekehrt an Hand unendlich vieler Erzeuger eine unendlich aufsteigende Kette von Untermoduln. $\square$

Konsequenzen der Algebrensichtweise von Ringen schlagen sich auch in der Körpertheorie bei der Untersuchung transzendenter Körpererweiterungen nieder (siehe Bemerkung 8), denn Algebren endlichen Typs gehen mit den algebraischen Körpererweiterungen einher, da sie nur im Zuge einer Ringstruktur unendlich werden können. Somit kann die Konstruktion endlicher Körper auch vollständig unter Verwendung von Algebren endlichen Typs beschrieben werden.

Definition 9. *Seien K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra.*[23]

- *A heißt **reduziert**, falls $A \setminus \{0\}$ keine nilpotenten Elemente enthält.*[24]
- *A heißt **affine K-Algebra**, falls A reduziert und von endlichem Typ über K ist.*

In Abschnitt 3.2.1 werden die affinen K-Algebren verwendet, um die Koordinatenfunktionen zu einer affinen algebraischen Menge V zu beschreiben. Es stellt sich heraus, dass die Eigenschaften an die affine K-Algebra genau den Eigenschaften der Algebra der regulären Funktionen auf V entsprechen.

2.1.3 Ringerweiterungen

Ziele:

- Charakterisierung endlicher Erweiterungen von Ringen und Körpern auf Ebene der Moduln.

Sei R ein kommutativer Ring.
Es gibt zwei verschiedene Betrachtungsweisen für die Erweiterung einer Ringstruktur R durch gegebene Erzeuger $s_1, \ldots, s_n$. Zum einen kann eine Erweiterung über Polynome geschehen, das bedeutet, die neu hinzukommenden Elemente sind alle Polynome $\sum_{i=1}^n r_i s_i^{e_i}$ für $r_i \in R$ und $e_i \in \mathbb{N}$. Zum anderen jedoch kann die Erweiterung als endlich erzeugter R-Modul aufgefasst werden, womit nur R-Linearkombinationen $\sum_{i=1}^n r_i s_i$ für $r_i \in R$ als neue Elemente in Frage kommen.

Definition 10.

- *Ein kommutativer Ring S mit $R \subseteq S$ als Teilring heißt **Ringerweiterung von R**, geschrieben $R \subseteq S$.*[25]
- *Eine Ringerweiterung $R \subseteq S$ heißt **endlich**, falls $s_1, \ldots, s_n \in S$ existieren, so dass $S = \sum_{i=1}^n Rs_i = \{\sum_{i=1}^n r_i s_i \in r_i \in R\}$.*[26]
- *Eine Ringerweiterung $R \subseteq S$ heißt **endlich erzeugt**, falls $s_1, \ldots, s_n \in S$ existieren, so dass $S = R[s_1, \ldots, s_n] = \mathrm{Bild}(\varepsilon_{(s_1,\ldots,s_n)})$.*[27]

[23] Das heißt, die Ringstruktur von A ist kommutativ und die Modulstruktur von A ein K-Vektorraum.

[24] Damit ist A aber noch kein Integritätsbereich.

[25] Die Operation von R ist mit der von S kompatibel, da $R \subseteq S$. Zugleich ist R ein Ring und S ebenfalls, womit S auch als R-Algebra aufgefasst werden kann.

[26] Das bedeutet, S ist endlich erzeugter R-Modul.

[27] In diesem Fall ist S nicht *endlich*, da $\sum_{i=1}^n r_i s_i^{e_i} \in S$ für $r_i \in R$ und $e_i \in \mathbb{N}$, das heißt, Kombinationen mit den a_i sind nicht nur auf die abelsche Gruppe von S beschränkt.

- *Ein $s \in S$ heißt* ***ganz über*** *R, falls ein normiertes*[28] *$p(X) \in R[X]$ existiert, so dass $p(s) = 0$ in S.*[29] *S heißt ganz über R, falls alle $s \in S$ ganz über R sind.*

Sei nun $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung.

Bemerkung 5.

- *$s \in S$ ist genau dann ganz über R, wenn $R \subseteq R[s]$ endlich ist.*
- *Seien R, S Körper. S ist genau dann ganz über R, wenn S algebraisch über R ist.*

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Sei s ganz über R. Dann existiert ein normiertes Polynom $p(X) \in R[X]$ mit $p(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i = 0$. Somit ist $s^n = -\sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i$. Also ist $s^n \in \sum_{i=1}^{n-1} Rs^i \leq R[s]$ und damit für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $s^k \in R[s]$.

  „$\Leftarrow$“: Sei $R \subseteq R[s]$ endlich, also $R[s] = Rs$, da sonst weitere Elemente zu R adjungiert werden müssten. Somit ist $R[s] \cong R[X]/X - s$ und damit s ganz über R vermöge $p(X) = X - s$.

- In diesem Fall sind die Definitionen von ganz und algebraisch identisch. Insbesondere ist eine ganze Erweiterung $R[a] = S$ stets algebraisch, da S Körper ist und somit $K[a] = K(a)$.

□

Für die Erweiterung um ein ganzes Element gilt die Äquivalenz zwischen Ganzheit und Endlichkeit einer Ringerweiterung. Allerdings gilt dies bei unendlich vielen ganzen Elementen in einer Erweiterung nicht mehr.

Bemerkung 6.

Im Allgemeinen ist eine Ringerweiterung $S \supseteq R$ nicht genau dann ganz, wenn sie endlich ist.

Beweis: Beispiel: Betrachte $p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} \supseteq p\mathbb{Z}$ ist eine Ringerweiterung. Da $f(z) = 0$ mit $f(X) = X - z \in 6p\mathbb{Z}[X]$ für alle $z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, ist diese Ringerweiterung ganz und alle $z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ sind ganz über R. $\mathbb{Z} \supseteq p\mathbb{Z}$ ist aber keinesfalls endlich. □

Wie der algebraische Abschluss eines Körpers, so ist auch der ganze Abschluss eines Rings interessant. Dazu wird im Folgenden zunächst der ganze Abschluss bezüglich einer Ringerweiterung betrachtet und später erweitert.

Definition und Bemerkung 11.

- *$\overline{R} := \{a \in S \mid a \text{ ganz über } R\} \subseteq S$ heißt der* ***ganze Abschluss von R in S.***

[28] Das heißt, der Leitkoeffizient ist 1.

[29] Vergleiche „algebraisch“ in Erinnerung 2 und Bemerkung 5.

Wohldefiniertheit: $\overline{R} \subseteq S$ *ist ein Teilring von* S.

Abschlusseigenschaft: $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$.

- *Sei* R *Integritätsbereich und* $\mathrm{Quot}(R) := \{\frac{a}{b} = ab^{-1} \mid a \in R, b \in R \setminus \{0\}\}$ *der* ***Quotientenkörper von*** R. R *heißt* ***normal****, falls* R *gleich dem ganzen Abschluss* $\overline{R}$ *von* R *in* $\mathrm{Quot}(R)$ *ist.*[30]

- *Ist* R *faktoriell, so auch* ***normal****.*

Beweis:

- Seien R faktoriell und $\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R)$, wobei O.B.d.A. $\mathrm{ggt}(a,b) = 1$. Zu zeigen: $b = 1$ und somit $\frac{a}{b} \in R$.

□

Nun folgen zwei Sätze, die Aussagen über die Fortpflanzung der Primidealstruktur einer Ringerweiterung machen. Dazu werden noch einige Begriffe eingeführt.

Definition 12. *Seien* $I \trianglelefteq R$, $J \trianglelefteq S$ *Ideale.* J ***liegt über***[31] I*, falls* $I = J \cap R$ *ist.*

Die beiden Sätze tragen die Namen, die zu den entsprechenden Begriffen passen, über die sie eine Aussage machen.

Satz 4.

Lying-over: *Ist* $R \subseteq S$ *ganz, so existiert für jedes Primideal* $P \trianglelefteq R$ *ein Primideal* $Q \trianglelefteq S$*, welches über* P *liegt.*

Going-up: *Seien* $R \subseteq S$ *ganz.*

Ist $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n$ *Primidealkette in* R *und liegt* $Q_0 \trianglelefteq S$ *über* P_0*, so existiert eine Primidealkette* $Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_n$ *in* S*, deren Glieder* Q_i *über* P_i *liegen für alle* $1 \leq i \leq n$*.*

Going-down: *Seien* $R \subseteq S$ *ganz,* S *Integritätsbereich und* R *normal.*

Sind $P_0, P_1 \trianglelefteq R$ *Primideale mit* $P_0 \subsetneqq P_1$ *und liegt das Primideal* $Q_1 \trianglelefteq S$ *über* P_1*, so existiert auch ein Primideal* $Q_0 \trianglelefteq S$ *mit* $Q_0 \subsetneqq Q_1$*, welches über* P_0 *liegt.*

Diese Sätze lassen viele Folgerungen zu. Hier ist eine, die im Zusammenhang mit der Krull-Dimension interessant ist.

Folgerung 2. *Sind* $R \subseteq S$ *ganz und* S *Integritätsbereich sowie* R *normal, dann gilt* $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(Q \cap R)$ *für jedes Primideal* $Q \trianglelefteq S$*.*

Beweis:

□

[30] „Normal" wird in [PleskenAG1] auf Seite 10 als „ganz abgeschlossen" bezeichnet.

[31] Englisch: J lies over I.

2.1.4 Lokale Ringe

Ziele:

- Identifikation der multiplikativ abgeschlossenen Mengen eines Ringes als Komplemente von Primidealen.

Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring.
In diesem Abschnitt werden zwei Verallgemeinerungen des Quotientenkörpers von R vorgenommen. Dazu werden zunächst allgemeinere Idealbegriffe erklärt.

Definition 13.

- *$I \subseteq R$ heißt* ***Linksideal von*** *R, falls $I \neq \emptyset$ und für $a, b \in I$, $r, s \in R$ auch $ra + sb \in I$ ist.*
- *$I \subseteq R$ heißt* ***Rechtsideal von*** *R, falls $I \neq \emptyset$ und für $a, b \in I$, $r, s \in R$ auch $ar + bs \in I$ ist.*
- *$I \subseteq R$ heißt* ***zweiseitiges Ideal von*** *R, falls I Links- und Rechtsideal von R ist.*
- *Eine Menge $M \subseteq R$ heißt* ***multiplikativ abgeschlossen****, falls $M \neq \emptyset$, $0 \neq M$ und aus $a, b \in M$ folgt, dass $ab \in M$.*

  Multiplikativ abgeschlossene Teilmengen von R sind Untermonoide von R.

Lemma 1. *Ist $R \neq \{0\}$ und $R \backslash R^*$ ein Links- oder Rechtsideal, dann ist $R \backslash R^*$ ein zweiseitiges Ideal.*

Beweis:

□

Die erste Verallgemeinerung bezieht sich auf die Nennermenge, die nun nicht mehr der ganze Ring (ohne 0) sein muss, wegen der Eigenschaften von Einheiten aber multiplikativ abgeschlossen!

Definition und Bemerkung 14.

- *Für eine multiplikativ abgeschlossene Menge $N \subseteq R$*[32] *heißt $\frac{R}{N} := \{\frac{r}{n} = rn^{-1} \mid r \in R, n \in N\} =: RN^{-1} = N^{-1}R$* ***Quotientenring****, falls $\frac{R}{N} \subseteq \mathrm{Quot}(R)$.*[33]
- *$\frac{R}{N}$ ist ein Teilring von $\mathrm{Quot}(R)$.*
- *$R \setminus \{0\}$ ist die größte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, womit $\frac{R}{R\setminus\{0\}} = \mathrm{Quot}(R)$ ist.*

[32] $a, b \in N \Longrightarrow ab \in N$

[33] Das bedeutet, $\frac{r}{n}$ sind die Äquivalenzklassen $[r, n]$ der R-Vielfachen von $\frac{r}{n}$, also sind die Elemente von $\frac{R}{N}$ gekürzt.

Beweis:

- Zu zeigen: $\frac{R}{N}$ ist ein Ring.
- $R \setminus \{0\}$ ist multiplikativ abgeschlossen wegen der Definition von $\cdot : R \times R \to R$.

$\square$

Multiplikativ abgeschlossene Mengen eines Rings sind die Komplemente der Primideale und umgekehrt. Somit kann der Quotientenring auch durch Primideale erklärt werden.

Definition und Bemerkung 15. *Sei $P \trianglelefteq R$.*

- *Genau dann ist $R \setminus P$ multiplikativ abgeschlossen, wenn P Primideal in R ist.*
- *Ist P Primideal, so heißt der Quotientenring $R_P := \frac{R}{R\setminus P}$* ***Lokalisierung auf*** *P.*
- *$\{0\}$ ist das kleinste Primideal in R.*

Beweis:

- Die beiden Definitionen sind genau komplementär:

  „$\Rightarrow$": $ab \in P \Longrightarrow ab \notin R \setminus P \Longrightarrow a \notin R \setminus P$ oder $b \notin R \setminus P \Longrightarrow a \in P$ oder $b \in P \Longrightarrow a \in P$ oder $b \in P$.

  „$\Leftarrow$": $a, b \in R \setminus P \Longrightarrow a, b \notin P \Longrightarrow ab \notin P \Longrightarrow ab \in R \setminus P$.

$\square$

Die zweite Verallgemeinerung des Quotientenkörpers geht von einer Charakterisierung der Nichteinheiten von R aus.

Definition und Bemerkung 16. *Sei $R \neq \{0\}$.*

- *R heißt* ***lokal****, falls $R \setminus R^*$ ein zweiseitiges Ideal von R ist.*
- *Ist $P \trianglelefteq R$ ein Primideal, so ist die Lokalisierung R_P auf P lokal.*

Beweis: R_P ist nach Definition und Bemerkung 14 ein Ring. Es gilt

$$R_P^* = \left(\frac{R}{R \setminus P}\right)^* = \left\{\frac{a}{b} \middle| \frac{b}{a} \in \frac{R}{R \setminus P}\right\} = \frac{R \setminus P}{R \setminus P}.$$

Damit ist $R_P \setminus R_P^* = \frac{P}{R\setminus P} =: I \subseteq R_P$. Dies ist ein Ideal in R_P, denn: Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \frac{P}{R\setminus P}$, $\frac{r}{s} \in \frac{R}{R\setminus P}$.

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in I$, da $ad+bc \in P$ wegen $P \trianglelefteq R$ und $bd \in R \setminus P$ wegen $R \setminus P$ multiplikativ abgeschlossen.

2. $\frac{r}{s}\frac{a}{b} = \frac{ra}{sb} \in I$, da wie oben $ra \in P$ und $sb \in R \setminus P$.

3. $I \neq \emptyset$, da $R \setminus P, P \neq \emptyset$.

Nach Lemma 1 ist damit $R_P \setminus R_P^*$ zweiseitig und folglich R_P lokal. □

Der Quotientenring erfüllt wie in Abschnitt 2.1.1 eine *universelle Eigenschaft*, die im Folgenden vorgestellt wird.

Bemerkung 7.
Sei $\frac{S}{R}$ der Quotientenring
Seien T ein Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, $\alpha : R \to \frac{S}{R} : r \mapsto \frac{r}{1}$ die Einbettung von R in $\frac{R}{S}$ und $\varphi R \to T$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(S) \subseteq T^*$. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\psi : \frac{R}{S} \to T$, so dass $\varphi = \psi \circ \alpha$.

2.1.5 NOETHER-Normalisierung

Die Eigenschaften von Ringerweiterungen liefern für deren Quotientenkörper ebenfalls bestimmte Eigenschaften. Das Hauptergebnis dieser Sichtweise wird im Folgenden formuliert. Dazu sei K ein unendlicher Körper, das bedeutet, $\mathrm{char}(K) = 0$.

Definition 17. *Sei A eine K-Algebra von endlichem Typ über K.*
Eine Teilalgebra $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$ heißt **NOETHER-*Normalisierung***, *falls*

1. *$y_1, \ldots, y_d$ algebraisch unabhängig über K sind und*

2. *$K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$ eine endliche Ringerweiterung ist.*[34]

Die Existenz einer NOETHER-Normalisierung bedeutet, dass jede K-Algebra endlichen Typs eine endliche Ringerweiterung eines Polynomrings [35] ist. Dieses Ergebnis wird im Folgenden bewiesen.

Satz 5.
Für jede K-Algebra A von endlichem Typ über K gibt es eine NOETHER-*Normalisierung $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$, so dass $A \supseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ eine endliche Ringerweiterung ist.*

Beweis: **Konstruktion einer NOETHER-Normalisierung**:
Gegeben ist die kommutative K-Algebra $A = K[x_1, \ldots, x_n] = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ für ein $I \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_n]$ von endlichem Typ über K und ein Ideal $A \neq J \trianglelefteq A$. Betrachte drei Fälle.

1. Fall: $x_1, \ldots, x_n$ sind algebraisch unabhängig über K, das bedeutet, $I = \{0\}$ und $A = K[x_1, \ldots, x_n] = K[X_1, \ldots, X_n]$ und $J = (a) = aA$ für ein $a \in K$.

2. Fall: Wie 1. Fall nur $J \trianglelefteq A$ beliebig.

[34] Beziehungsweise A eine endliche $K[y_1, \ldots, y_d]$-Algebra ist.
[35] aufgefasst jeweils als Algebren

3. Fall: $\{0\} \neq I \overset{\neq}{\lhd} K[X_1, \dots, X_n]$ und $J \trianglelefteq A$ beliebig.

$\square$

Aus dem HILBERTschen Basissatz folgt direkt, da K ein Körper und damit NOETHERsch:

Folgerung 3. *Jede* NOETHER-*Normalisierung ist* NOETHER*sch.*

Die Existenz einer NOETHER-Normalisierung $K[y_1, \dots, y_d] \subseteq A$ liefert den Zusammenhang zwischen der Dimension der endlichen Ringerweiterung $K \subseteq A$ und dem Transzendenzgrad der Körpererweiterung $\mathrm{Quot}(A)/K$.

Satz 6.
Seien A eine K-Algebra von endlichem Typ über K sowie $K[y_1, \dots, y_d] \subseteq A$ eine NOETHER-*Normalisierung. Dann gilt*

1. $\dim A \ = d$ *und,*

2. *ist A zusätzlich Integritätsbereich, so ist* $\mathrm{ht}(P) = d$ *für alle Primideale $P \trianglelefteq A$.*[36]

Beweis:

$\square$

Die NOETHER-Normalisierung $K[y_1, \dots, y_d]$ zu einer gegebenen K-Algebra $A = K[x_1, \dots, x_n]$ endlichen Typs ist wiederum eine K-Algebra endlichen Typs, allerdings von algebraisch unabhängigen Elementen erzeugt und somit als Quotientenkörper aufgefasst eine rein transzendente Körpererweiterung. Die Erweiterung $K[y_1, \dots, y_d]/A$ ist
Schematisch:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dd, dash, "K\text{-alg.}"'] \arrow[dr, dash, "\text{alg. unabh.}"] & \\
& K(y_1, \dots, y_n) \arrow[dl, dash, "\text{endlich}"] \\
A = K[x_1, \dots, x_n] &
\end{tikzcd}$$

Die maximale Höhe aller Primideale ist also durch die NOETHER-Normalisierung bestimmbar. Über einem Integritätsbereich liegen sogar alle Primideale in dieser Höhe.

2.2 Körper

Sei K stets ein Körper.

[36] Alternativ formuliert: Jede maximale Primidealkette von A hat Länge d.

Erinnerung 2.

- *$E \supseteq K$ heißt **Erweiterungskörper von** K, falls E Körper ist und $\cdot_E|_K = \cdot_K$, $+_E|_K = +_K$. E/K heißt dann **Körpererweiterung** und K **Teilkörper von** E.*
- *Sei E/K Körpererweiterung.*
  - *$a \in E$ heißt **algebraisch über** K, falls $f \in K[X]$ existiert mit $f(a) = 0$ in E.*[37] *E/K heißt algebraisch, falls alle $a \in E$ algebraisch sind.*
  - *$a \in E$ heißt **transzendent über** K, falls a nicht algebraisch über K ist.*[38] *E/K heißt transzendent, falls ein $a \in E$ existiert, das transzendent ist.*
  - *Transzendente Körpererweiterungen sind unendlich, endliche Körpererweiterungen sind algebraisch.*

Sei E/K eine Körpererweiterung.
Zunächst wird zu Gunsten eines geeigneten Basisbegriffs die Transzendenz verallgemeinert.

Definition 18.

- *$a_1, \dots, a_n \in E$ heißen **algebraisch unabhängig**, falls $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ für alle $f \in K[X_1, \dots, X_n]$.*[39]
- *E/K heißt **rein transzendent**, falls ein über K algebraisch unabhängiges $S \subseteq E$ existiert mit $K(S) = E$.*
- *$S = \{a_1, \dots, a_n\}$ heißt **Transzendenzbasis von** E/K, falls $E/K(S)$ algebraisch ist:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dash, "\textit{algebraisch}"] \\ K(S) \arrow[d, dash, "\textit{rein transzendent}"] \\ K \end{tikzcd}$$

- *Ist $S \subseteq E$ eine endliche Transzendenzbasis, dann heißt $\operatorname{tr.deg}(E/K) := |S|$ der **Transzendenzgrad von** E/K.*

Es gibt bei Körpererweiterungen also zum einen *algebraische Elemente*, die Restklasse nach einem im Grundkörper irreduziblen Polynom (Minimalpolynom) sind und den Erweiterungskörper endlich erweitern, zum anderen *transzendente Elemente*, die den Erweiterungskörper unendlich erweitern (um alle rationalen Funktionen über diesem Element). Endlicher und unendlicher Anteil der Körpererweiterung kann als Basis angegeben werden, wobei die Reihenfolge der Erweiterung und auch die Wahl der Basiselemente nicht eindeutig ist.

[37] $f = \mu_a(X)$ **Minimalpolynom von** a **über** K sowie $E = K(a) = K[a] \cong K[X]/\langle f(X) \rangle$, falls E/K **einfache Körpererweiterung**

[38] Im Falle der einfachen Körpererweiterung heißt das: $E = K(a) \cong K(x)$.

[39] Ist $n = 1$, so fällt der Begriff mit transzendent zusammen.

Beispiel 1. *Sei $E := K(x)$. $x^2 \in E$ ist transzendent über K, womit $K(x^2)/K$ transzendent vom Grad 1 ist. Da sich die Transzendenzgrade addieren, darf nicht* $\text{tr.deg}(E/K(x^2)) > 0$ *sein, womit $E/K(x^2)$ algebraisch ist. Nach einer kurzen Überlegung ergibt sich*

$$K(x) \cong K(x^2)[X]\,/X^2 - x^2\ ,$$

womit x die Restklasse $\overline{X}$ ist und $\{\overline{X}, x^2\}$ Basis von E/K.

Im Folgenden wird aber noch Existenz von Transzendenzbasen und die Eindeutigkeit derer Länge gezeigt.

Satz 7.

1. *Transzendenzbasen existieren.*
2. *Der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung ist eindeutig bestimmt.*

Beweis:

1. Sei $S \subseteq E$.

   Zeige: S ist Transzendenzbasis von E/K genau dann, wenn S maximale über K algebraisch unabhängige Menge ist.

2. Seien $S, S' \subseteq E$ zwei endliche Transzendenzbasen von E/K.

   Zeige: $|S| = |S'|$.

□

Nun können die Ergebnisse über kommutative Ringe, deren Moduln und der Algebren über diesen benutzt werden, um die Bedingungen an die Transzendenz zu stellen.

Bemerkung 8.
Ist E/K eine transzendente Körpererweiterung, dann ist E als K-Algebra nicht von endlichem Typ über K.

Beweis: Konstruiere unendliche K-Basis B von E.
Da das K-Algebren-Erzeugnis $\langle B\rangle_{K\text{-Alg.}}$ außer den Elementen aus K nur aus den Polynomen in den Elementen von B besteht, nicht aber deren Inversen, genügt weder $B = \{x\}$ noch $B = \{x, \frac{1}{x}\}$, da hier zum Beispiel $\frac{1}{x^2-2} \notin B$.
Setze $B = \{x, \frac{1}{x}\} \cup \{\frac{1}{p_i(x)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ für irreduzible Polynome $p_i(x)$ mit $\deg p_i = i$.
B ist unendlich.
Sei dazu $\frac{1}{p(x)} \in \{\frac{1}{p_1(x)}, \ldots, \frac{1}{p_k(x)}\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{1}{p_i^{\alpha_i}(x)}$ für $a_i \in K$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.
Da $p(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i}(x)}{HN}$, wobei HN der Hauptnenner ist, liegt in $p(x)$ ein reduzibles Polynom vor, weswegen $\frac{1}{p(x)}$ nicht unter den Elementen von B sein kann, womit B unendlich ist.
Obiger Beweis läßt schließen, dass B auch ein Erzeugendensystem ist, welches mindestens nötig ist, um $K(x)$ zu erzeugen.

□

Folgerung 4. *Ist umgekehrt E/K eine Körpererweiterung und E eine K-Algebra von endlichem Typ über K, so ist E/K algebraisch.*

Beweis: Die Aussage ist Negation von Bemerkung 8. □

2.2.1 Vervollständigung

Ziele:

- Weiteres Werkzeug zur Konstruktion eines Erweiterungskörpers.
- Verallgemeinerung der Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ zu $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ über von der Körperbewertung induzierten metrischen Raum.
- Herleitung der p-adischen Zahlen.

Der Begriff „Vervollständigung“ bezieht sich auf die Erweiterung des Körpers um noch fehlende Elemente, die nicht mittels bisher entwickelter algebraischer Begriffe erreicht werden kann. Dazu werden die Körperelemente bewertet und auf dieser Grundlage eine Metrik definiert. Diese ist wiederum Mittel zur Definition eines Grenzwertbegriffs bezüglich CAUCHY-Folgen. Betrachtet man nun alle Grenzwerte dieser Folgen, so findet sich der Grundkörper darin wieder aber auch einige andere Elemente. Die Äquivalenzklassen aller Grenzwerte bilden einen neuen Körper, die Vervollständigung.
Die Bewertung von Körperelementen ist eine Abbildung in die reellen Zahlen, mit Hilfe derer Vergleiche zwischen den Elementen gemacht werden können etwa über den Absolutbetrag paarweiser Differenzen.

Definition 19. *Eine Abbildung $\nu : K \to \mathbb{R}$ heißt* ***(archimedische) Bewertung auf*** *K oder* ***Absolutbetrag auf*** *K, falls gilt:*

1. Positive Definitheit[40]: $\nu(a) > 0$ *für alle* $a \in K^*$ *und* $\nu(0) = 0$,
2. Verträglichkeit mit Multiplikation: $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$ *für alle* $a, b \in K$,
3. Dreiecksungleichung: $\nu(a + b) \leq \nu(a) + \nu(b)$ *für alle* $a, b \in K$.

Gilt an Stelle der Dreiecksungleichung die
Ultrametrische Dreiecksungleichung: $\nu(a + b) \leq \max\{\nu(a), \nu(b)\}$,
so heißt ν ***nicht-archimedische Bewertung****.*

Eine nicht-archimedische Bewertung $\nu : K \to G$ in eine abelsche Gruppe $(G, +) \cong (\mathbb{Z}, +)$ heißt ***diskrete Bewertung****.*

[40] Vergleiche [LoupGC].

Das Paar (K, ν) heißt ***bewerteter Körper****, falls ν eine nicht-archimedische oder archimedische Bewertung ist.*

Sei nun (K, ν) ein bewerteter Körper. Die nun exemplarisch eingeführte *p-adische Bewertung* liefert die p-adischen Zahlen, zu welchen auch Kapitel VI, §4 aus [KriegTop] Aufschluss gibt.

Definition und Bemerkung 20.

- *Ist ν nicht-archimedisch, so ist ν auch archimedisch. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht.*
- *Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{Q}$. Die Abbildung*

$$\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : a \mapsto \begin{cases} 0 & a = 0 \\ p^{-z}, & 0 \neq a = \frac{r}{s}p^z,\ r, s, z \in \mathbb{Z},\ p \nmid rs \Longleftrightarrow p \nmid r \wedge p \nmid s \end{cases}$$

  ist eine nicht-archimedische Bewertung auf $\mathbb{Q}$, genannt ***p-adische Bewertung****.*

- *ν_p ist eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$.*

Beweis:

- Sei $\nu : K \to \mathbb{R}$ archimedisch, also gilt $\nu(a + b) \leq \max\{\nu(a), \nu(b)\}$. Daraus folgt die Dreiecksungleichung:

$$\nu(a + b) \leq \max\{\nu(a), \nu(b)\} \leq \max\{\nu(a), \nu(b)\} + \min\{\nu(a), \nu(b)\} = \nu(a) + \nu(b).$$

- Durch Nachrechnen.
- $\nu_p(\mathbb{Q}) = \{0\} \cup \{p^z \mid z \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

□

Die Eigenschaften von Körpern wirken sich auf die Bewertung aus, so dass einige nützliche Werkzeuge bewiesen werden können.

Lemma 2. *Sei (K, ν) ein bewerteter Körper.*

1. *$\nu(1) = 1$.*

Beweis:

1. Sei $a \in K$. $\nu(a) = \nu(a \cdot 1) = \nu(a) \cdot \nu(1) = \nu(a) \cdot 1$.

□

Eine Bewertung auf K induziert eine Ringstruktur als Teilring von K in folgendem Sinne.

Definition und Bemerkung 21. *Sei ν nicht-archimedisch.*

1. $R_\nu := \{a \in K \mid \nu(a) \leq 1\}$ *ist Teilring von K, genannt der* ***Bewertungsring von*** (K, ν).

2. *Die Einheiten von R_ν sind gegeben durch* $R_\nu^* = \{a \in K \mid \nu(a) = 1\}$.

3. *Ein Integritätsbereich R heißt* ***Bewertungsring in*** K*, falls $R \neq K$ und $x \in R$ oder $\frac{1}{x} \in R$ für $x \in K^*$.*

   - *Der Bewertungsring ist lokal.*
   - *Der Bewertungsring ist normal.*

Beweis:

1. Es gilt $\nu(1) = 1$, da sich die Eigenschaft der 1 auf ν mit der Multiplikation überträgt.

   Seien $a, b \in R_\nu$ und $\nu(a), \nu(b) \leq 1$. Wegen $\nu(a+b) \leq \max\{\nu(a), \nu(b)\} \leq 1$ ist $a+b \in R_\nu$ und wegen $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b) \leq 1$ auch $ab \in R$.

2. Wäre $a \in R_\nu^*$ mit $\nu(a) < 1$, dann gälte für $a^{-1} \in R_\nu^*$

$$\nu(aa^{-1}) = \underbrace{\nu(a)}_{<1}\underbrace{\nu(a^{-1})}_{\leq 1} < 1 = \nu(1)$$

   im Widerspruch zu $\nu(aa^{-1}) = \nu(1) = 1$.

3. - Zu zeigen: $R \setminus R^*$ ist zweiseitiges Ideal von R.
   - Zu zeigen: $R = \overline{R}$ in $\mathrm{Quot}(R)$.

□

Die Bewertung eines Körpers liefert eine Metrik beziehungsweise eine Ultrametrik im Falle nicht-archimedischer Bewertungen und somit die Verbindung zur Topologie.

Definition und Bemerkung 22. • *Sei X eine Menge. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt* ***Metrik auf*** X *und* (X, d) ***metrischer Raum****, falls*

1. $d(x, y) > 0$ *für* $x \neq y \in X$ *und* $d(x, x) = 0$ *für alle* $x \in X$,[41]
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$.

d heißt ***Ultrametrik auf*** X *und* (X, d) ***ultrametrischer Raum****, falls statt der Dreiecksungleichung die ultrametrische Dreiecksungleichung gilt:*

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \text{ für alle } x, y, z \in X.$$

[41] Äquivalent dazu: $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

- *Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{T}_d := \{U \subseteq X \mid U$ offen$\}$ heißt **durch d induzierte Topologie auf X**, wobei $U \subseteq X$ **offen** ist, wenn für alle $x \in U$ auch die **offene Kugel um x mit Radius ε** $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ in U liegt.*

1. *Ist (K, ν) ein bewerteter Körper, so definiert $d_\nu : K \times K \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \nu(x - y)$ eine Metrik auf K beziehungsweise eine Ultrametrik, falls ν nicht-archimedisch ist.*

Beweis:

1. Zeige: d_ν ist eine Metrik.

   Seien $x, y, z \in K$.

   (a) $d_\nu(x, x) = \nu(x - x) = \nu(0) = 0$ und $d_\nu(x, y) = \nu(x - y) > 0$, falls $x \neq y$ und somit $x - y \in K^*$.

   (b) Sei O.B.d.A. $x \neq y$. $d_\nu(x, y) = \nu(x - y) = \nu(x - y)$??

   (c)

$\square$

Mittels einer Metrik lassen sich auch die Glieder einer Folge vergleichen, wodurch die Definition eines Cauchy-Kriteriums möglich ist und somit eines Konvergenzbegriffs, mittels welchem Folgen verglichen werden können, so dass für eine Vervollständigung geeignete Äquivalenzklassen definiert werden können.

Definition und Bemerkung 23. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

- *Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $x_i \in X$ heißt **Cauchy-Folge**, falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Index $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ für alle $n < i, j$.*
- *(X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.*
- *Vervollständigung von (X, d):*
  - *$\mathcal{C}(X) :=$ Menge aller Cauchy-Folgen.*
  - *$\sim \subset \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ mit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (y_i)_{i \in \mathbb{N}} :\Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} d(x_i, y_i) = 0$.[42]*

    $\sim$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

    $\hat{X} := \mathcal{C}(X) / {\sim} = \{[(x_i)_{i \in \mathbb{N}}] \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X)\}$.
  - *$\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R} : ([(x_i)_{i \in \mathbb{N}}], [(y_i)_{i \in \mathbb{N}}]) \mapsto \lim_{i \to \infty} d(x_i, y_i)$.*

    $\hat{d}$ existiert und ist wohldefiniert.

    $\hat{d}$ ist Metrik auf $\hat{X}$.

[42] Das heißt, die Folgen laufen irgendwann zusammen.

– *$\alpha : X \to \hat{X} : x \mapsto [(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x$ Grenzwert von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ ist stetige Einbettung und $\alpha(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$. $(\hat{X},\ \hat{d})$ heißt* ***Vervollständigung von*** *(X, d).*

1. *$(\hat{X}, \hat{d})$ ist vollständig.*
2. *Sei (K, ν) ein bewerteter Körper und (K, d_ν) der zugehörige metrische Raum, dann ist die Vervollständigung $(\hat{K}, \hat{d}_\nu)$ ein Körper mit vertreterweise Verknüpfungen:*

$$[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] + [(y_i)_{i\in\mathbb{N}}] = [(x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}], \qquad [(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_i)_{i\in\mathbb{N}}] = [(x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{N}}].$$

Beweis:

1. Sei $(\star) = ([(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $(\hat{X}, \hat{d})$. Es ist

$$([(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]_j)_{j\in\mathbb{N}} = ([(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}])_{j\in\mathbb{N}} = [(x_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}] = [(x_i)_{i\in\mathbb{N}}],$$

womit alle Folgenglieder von $(\star)$ in einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ liegen beziehungsweise alle CAUCHY-Folgen konvergieren.

2.
   - $[(0)_{i\in\mathbb{N}}]$ ist Nullelement.
   - $[(-x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ ist additive Inverse von $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$.
   - $[(1)_{i\in\mathbb{N}}]$ ist Einselement.
   - $[(x_i^{-1})_{i\in\mathbb{N}}]$ ist multiplikative Inverse von $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$.

□

Intuitiv ist als die Vervollständigung eines Körpers die Hinzunahme jeglicher Grenzwerte von CAUCHY-Folgen, so dass der so gewonnene Erweiterungskörper vollständig ist.

Bemerkung 9.
Die Elemente einer Vervollständigung $(\hat{X},\ \hat{d}_\nu)$ sind formal Äquivalenzklassen $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ von CAUCHY-*Folgen, sie können aber anschaulicher durch ihre Grenzwerte $\lim_{i\to\infty} \nu(x_i)$ selbst identifiziert werden.*[43]

Aus der Analysis ist die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ bekannt. $\mathbb{R}$ enthält nach obiger Konstruktion also alle möglichen Grenzwerte von Folgen (genauer: die Äquivalenzklassen der Folgen mit gleichem Grenzwert). Die Identifikation von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist beispielsweise durch konstante Folgen verwirklichbar.
Das CAUCHY-Kriterium ist nicht nur auf Folgen sondern auch auf Reihen $\sum_i a_i$ anwendbar.

Definition und Bemerkung 24. *Sei (K, d_ν) ein metrischer Raum über dem bewerteten Körper (K, ν).*
Falls die Folge $\sum_{i=1}^n a_i$ für $n \to \infty$ konvergiert, so heißt $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^\infty a_i$.
Ist (K, d_ν) vollständig, so konvergiert $\sum_{i=1}^\infty a_i$ genau dann, wenn $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.

[43]Siehe zum Beispiel den Absatz zu den p-adischen Zahlen.

Beweis: Sei (K, d_ν) vollständig.
„$\Rightarrow$": $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiere, das bedeutet, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = c \in K$. Somit gibt es ein $1 \ll N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=1}^{N} a_i = c$ für alle $N \geq N_0$.[44] Somit gilt $a_i = 0$ für $i > N_0$. Damit ist aber die Folge der Summanden ab dem Index $N_0 + 1$ konvergent mit $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.
„$\Leftarrow$": Klar. □

Durch Folgen und Reihen können aber auch die irrationalen Zahlen beschrieben werden, zum Beispiel ist $\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{i})^i$.

Anwendung: p-adische Zahlen Betrachte zunächst die Vervollständigung $(\mathbb{Q}_p, \nu_p)$ von $(\mathbb{Q}, \nu_p)$. Die Elemente von Q_p sind Äquivalenzklassen $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ von Cauchy-Folgen, deren Grenzwerte alle gleich bezüglich ν_p sind, das bedeutet, falls die ursprünglichen Elemente in $\mathbb{Q}$ alle zu p^z teilerfremde Zähler und Nenner für ein $z \in Z$ haben, bilden sie das gleiche Element in $\mathbb{Q}_p$, welches durch p^z identifiziert werden kann. Betrachte also die Einbettung

$$\mathbb{Q}_p \to p^{\mathbb{Z}} : [(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \mapsto \lim_{n\to\infty} \nu_p(x_i) = p^z, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Jede Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}_p$ konvergiert nach Bemerkung 24. Folgender Satz kann sich daher zu Nutze gemacht werden.

Definition und Bemerkung 25. *Für jedes $a \in \mathbb{Q}_p$ existiert eine eindeutige Reihendarstellung*

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i, \quad a_i \in Z,$$

*die p-**adische Entwicklung** von a.* Darstellung:

$$a = \underbrace{a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_{-1}}_{\textit{Koeff. gebrochener } p\textit{-Potenzen}} \quad , \quad \underbrace{a_1 a_2 \ldots}_{\textit{Koeff. ganzzahliger } p\textit{-Potenzen}}$$

n ist die Anzahl der gebrochenen p-Potenz-Anteile.

Beweis: Genauer: Sei $0 \neq a \in \mathbb{Q}_p$, $m \in \mathbb{Z}$ mit $\nu_p(a) = p^z$ und $n := \max\{0, m\}$. Dann gibt es eindeutige $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a_i \leq p - 1$, $i \geq -n$, so dass $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i$.
Fallunterscheidung:

1. $m \leq 0$ und $n = 0$.
2. $m > 0$ und $n = m$.

□

Das einfachste Beispiel einer p-adischen Darstellung einer Zahl ist die Binärdarstellung.

[44] Dies gilt nur, weil d_ν nicht-archimedisch ist.

2.3 Topologie

Erinnerung 3. *Sei X eine Menge.*

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ot}(X)$ *heißt* ***Topologie auf*** X*, falls*

  (T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

  (T2) *Ist* $U_i \in \mathcal{T}$ *für* $i \in I$ *und Indexmenge* I*, so auch* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

  (T3) *Sind* $U, V \in \mathcal{T}$*, so ist auch* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

  $(X, \mathcal{T})$ *heißt dann* ***topologischer Raum****. Die* $U \in \mathcal{T}$ *heißen* ***offen*** *und* $V \subseteq X$ ***abgeschlossen****, falls* $X \setminus V$ *offen ist.*

- *Seien* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum,* $V \subseteq X$. $\mathcal{T} \cap V := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{T}\}$ *ist eine Topologie auf* V *und heißt* ***Spurtopologie von*** $\mathcal{T}$ ***auf*** V.[45]

- *Sei* $B \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ot}(X)$. $\langle B\rangle := \{\bigcup_{i\in I} b_i, b \cap b' \mid i \in I, b_i, b, b' \in B\} \cup \{\emptyset, X\}$ *ist die* ***von*** B ***erzeugte Topologie auf*** X.

Beweis: Sei $\mathcal{T}$ Topologie auf X, $V \subseteq X$.
Zeige: $\mathcal{T} \cap V$ ist eine Topologie auf V.

(T1) $V \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T} \cap V$ und $V \cap X = V \in \mathcal{T} \cap V$.

(T2) Seien I Indexmenge und $U_i \cap V \in \mathcal{T} \cap V$ für $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$. Es gilt

$$\bigcup_{i\in I}(U_i \cap V) = \underbrace{\bigcup_{i\in I} U_i}_{\in\mathcal{T}} \cap \underbrace{\bigcup_{i\in I} V}_{=V} \in \mathcal{T} \cap V.$$

(T3) Seien $U_1 \cap V, U_2 \cap V \in \mathcal{T} \cap V$. Es gilt

$$(U_1 \cap V) \cap (U_2 \cap V) = U_1 \cap V \cap U_2 \cap V = \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in\mathcal{T}} \cap V \in \mathcal{T} \cap V.$$

□

Für die allgemein über Topologien betrachtete Funktionentheorie beziehungsweise Abschnitt 2.5 sind folgende Begriffe noch von Nutzen.

Erinnerung 4. *Seien* $(X, \mathcal{T}_x)$*,* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topologische Räume und* $f : X \to Y$ *eine Abbildung.*

- f *ist* ***stetig*** *genau dann, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

[45] In [KriegTop], Seiten 31f wird diese Topologie als *Initialtopologie* der *kanonischen Injektion* $i : V \to X : x \mapsto x$ eingeführt, was hier zu weit ausholen ließe.

- *Für jedes offene $V \in \mathcal{T}_X$ ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$ offen in $(X, \mathcal{T}_x)$ oder*
- *für jedes abgeschlossene $V \subseteq X$ ist $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_x)$.*[46]

- *f heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.*
- Charakterisierung: *f ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn $f(\mathcal{T}_X) = \mathcal{T}_Y$ ist.*

Sei nun $\underline{X} := (\mathcal{T}, X)$ ein topologischer Raum.[47]
Die Betrachtung der algebraischen Geometrie unter topologischen Gesichtspunkten ist von einigen weiteren grundlegenden Begriffen geprägt, welche in Abschnitt 3.2 auf die ZARISKI-Topologie angewandt werden.

Definition und Bemerkung 26. *1. $\underline{X}$ heißt **NOETHERsch**, falls eine der äquivalenten Bedingungen gilt:*

(a) Jedes $\{M \subseteq X \mid X \setminus M \in \mathcal{T}\}$ hat ein minimales Element.

(b) Jede absteigende Kette abgeschlossener $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ wird konstant.

*2. Für eine Indexmenge I heißt $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine **offene Überdeckung von** X, falls $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ und $U_i \in \mathcal{T}$ für alle i.*

*3. $\underline{X}$ heißt **quasi-kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

4. Ist $\underline{X}$ NOETHERsch, so auch quasi-kompakt.

*5. $\underline{X}$ heißt **HAUSDORFFsch**, falls je zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ durch eine Umgebung getrennt sind: $\mathcal{U}(x_1) \cap \mathcal{U}(x_2) = \emptyset$.*

*6. $\underline{X}$ heißt **kompakt**, falls $\underline{X}$ quasi-kompakt und HAUSDORFFsch ist.*[48]

Ferner wird im algebraischen Kontext ein stärkerer Zusammenhangsbegriff benötigt.

Definition und Bemerkung 27.
- *$\underline{X}$ heißt **zusammenhängend**, falls es keine nichtleeren, offenen, disjunkten Mengen $X_1, X_2 \subset X$ gibt, so dass $X = X_1 \uplus X_2$.*
- *$\underline{X}$ heißt **irreduzibel**, falls es keine abgeschlossenen Mengen $X_1, X_2 \subset X$ gibt, so dass $X = X_1 \uplus X_2$.*
- *Ist $\underline{X}$ irreduzibel, so auch zusammenhängend.*

[46]Dies sind Charakterisierungen der Stetigkeit gemäß [KriegTop], Seite 23.
[47]Notation in Anlehnung an [KriegTop].
[48]Kompaktheit ist also stärker als Quasi-Kompaktheit, wird hier aber nicht benötigt.

Beweis: Sei $\underline{X}$ irreduzibel.
Angenommen, $\underline{X}$ wäre nicht zusammenhängend. Seien demzufolge $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ disjunkt und nichtleer, so dass $X = X_1 \uplus X_2$. Es gälte aber damit auch $X = (X \setminus X_1) \uplus (X \setminus X_2)$ für die abgeschlossenen Mengen $X \setminus X_1$, $X \setminus X_2$. Widerspruch. $\square$

Das einfachste Beispiel zusammenhängender Mengen sind die Einermengen $\{x\}$, $x \in X$. Für die hier eingeführten Begriffe ist nicht nur die Zariski-Topologie ein „gutes“ Beispiel.

Beispiel 2. *Sei $\mathcal{T}_{nat} \subset \mathcal{P}\mathrm{ot}(\mathbb{R})$ die Menge aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die so genannte* ***natürliche Topologie auf*** *$\mathbb{R}$.*

- *Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist jedes offene Intervall $]a, b[$ irreduzibel.*
- *Geschlossene Intervalle sind nicht irreduzibel, aber zusammenhängend.*

Bemerkung 10.
Sei $\underline{X} = (\mathcal{T}, X)$ Noetherscher topologischer Raum. Dann gibt es abgeschlossene, irreduzible Teilmengen $U_1, \dots, U_k \subseteq X$, so dass $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Setze

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \mid A \text{ abgeschl. und nicht Vereinigung endl. vieler irreduzibler Teilm. von } A\}$$

die Menge der Mengen, die der Behauptung widersprechen und insbesondere nicht irreduzibel sind. Somit ist nach Annahme $X \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Sei $A \in \mathcal{A}$ minimal und $A = A_1 \cup A_2$, so dass $A_i \subsetneqq A$ und abgeschlossen. Also sind $A_I \notin \mathcal{A}$ für $i = 1, 2$. Daher ist A_i Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen von X.

$\square$

Sei $\underline{X} = (\mathcal{T}, X)$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.

Definition und Bemerkung 28.

- *Sind $U, V \subseteq X$ abgeschlossen in $\underline{X}$, so ist $U \cap V$ abgeschlossen in $\underline{X}$.*
- *$\overline{Y} := \bigcap_{Y \subseteq U \subseteq X \text{ abgeschlossen}} U$ heißt* ***Abschluss von Y in $\underline{X}$****.*[49]
- *$\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$.*

Beweis:

- Seien $U, V \subseteq X$ abgeschlossen in $\underline{X}$. Dann sind $X \setminus U$, $X \setminus V$ offen. Dann ist $U \cap V = X \setminus ((X \setminus U) \cup (X \setminus V))$ abgeschlossen in $\underline{X}$, da $(X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ offen in $\underline{X}$.
- Mit dem ersten Punkt ist klar, dass $\overline{Y}$ abgeschlossen ist.

[49] Das heißt, die kleinste Menge

- $\bigcap_{U \subseteq X \text{ abgeschlossen}} U = \emptyset$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X.
  $\overline{X} = \bigcap_{X \subseteq U \subseteq X \text{ abgeschlossen}} U = X$, da X als Komplement von $\emptyset \in \underline{X}$ abgeschlossen ist.

□

Obige Bemerkung macht deutlich, dass die leere Menge gesondert behandelt werden muss. Das gilt auch für die Definition des folgenden Dimensionsbegriffs für topologische Räume, der insbesondere mit dem gleichnamigen Dimensionsbegriff für Ringe einhergeht, der in Abschnitt 2.1 definiert wird.

Definition und Bemerkung 29. • *Setze*

1. $\dim \underline{X} := 1$, *falls* $X = \emptyset$ *und ansonsten*
2. $$\begin{aligned}\dim \underline{X} \quad := \quad & \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \textit{ex. Kette } \emptyset \neq Y_0 \subsetneqq Y_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Y_n \\ & \textit{mit } Y_i \textit{ abgeschlossen, irreduzibel}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.\end{aligned}$$

$\dim \underline{X}$ *bezeichnet die* **Krull-*Dimension*** *von* $\underline{X}$.[50]

2.4 Kategorien und Funktoren

Dieses Konzept stellt eine Abstraktion der gesamten Algebra dar. So können grundlegende Zusammenhänge auch auf grundlegender Begriffsebene dargestellt werden. Ziel für die algebraische Geometrie ist der Beweis, dass die „Klasse“ der affinen K-Algebren und die „Klasse“ der affinen algebraischen Mengen äquivalent sind.

Definition 30. *Eine* ***Kategorie*** *ist ein Paar* $\mathfrak{A} = (\mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}, \mathrm{Mor}\ \mathfrak{A})$ *mit*

- *den* ***Objekten*** $\mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ ***von*** $\mathfrak{A}$ *und*
- *den* ***Morphismen*** $\mathrm{Mor}\ \mathfrak{A} = \{\mathrm{Mor}(A, B) \mid (A, B) \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A} \times \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}\}$ ***von*** $\mathfrak{A}$[51],

wobei zu jedem Paar $(A, B) \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A} \times \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ *eine Menge* $\mathrm{Mor}(A, B) \in \mathrm{Mor}\ \mathfrak{A}$ *existiert, die* ***Morphismen von*** A ***nach*** B, *so dass gilt:*

- Eindeutigkeit der Morphismen: *Die Morphismen zu unterschiedlichen*[52] *Paaren* $(A, B), (A', B') \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A} \times \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ *sind disjunkt:* $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(A', B') = \emptyset$.
- Komposition von Morphismen: *Zu drei Objekten* $A, B, C \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ *definiere*

  $$\circ : \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C),$$

  so dass folgende Axiome gelten:

[50] Beachte, dass auch $\dim \underline{X} = 0$ sein kann, falls nur eine irreduzible Teilmenge in $\underline{X}$ existiert.
[51] Verallgemeinerungen des Abbildungsbegriffs
[52] das heißt, $A \neq A'$ oder $B \neq B'$

1. links-/rechtsneutrales Element: *Zu jedem* $A \in \text{Obj } \mathfrak{A}$ *gibt es* $\text{id}_A \in \text{Mor}(A,A)$*, so dass*

   – $\text{id}_A \circ \varphi = \varphi$ *für alle* $\varphi \in \text{Mor}(B,A)$ *und alle* $B \in \text{Obj } \mathfrak{A}$,

   – $\psi \circ \text{id}_A = \psi$ *für alle* $\psi \in \text{Mor}(A,B)$ *und alle* $B \in \text{Obj } \mathfrak{A}$.

2. Assoziativität: *Zu je vier* $A, B, C, D \in \text{Obj } \mathfrak{A}$ *und allen* $\varphi \in \text{Mor}(A,B), \psi \in \text{Mor}(B,C), \theta \in \text{Mor}(C,D)$ *gilt:*

$$(\theta \circ \psi) \circ \varphi = \theta \circ (\psi \circ \varphi)$$

   Ferner ist (φ, ψ, θ) *eindeutig* $\theta \circ \psi \circ \varphi \in \text{Mor}(A,D)$ *zugeordnet.*

- *Seien* $\mathfrak{A}$ *eine Kategorie,* $A, B \in \text{Obj } \mathfrak{A}$ *und* $\varphi \in \text{Mor}(A,B)$.

  – φ *heißt* ***Isomorphismus****, falls ein* $\psi \in \text{Mor}(B,A)$ *existiert mit* $\varphi \circ \psi = \text{id}_B$ *und* $\psi \circ \varphi = \text{id}_A$.[53]

  – φ *heißt* ***Endomorphismus****, falls* $B = A$ *ist.*

  – φ *heißt* ***Automorphismus****, falls* $B = A$ *und* φ *Isomorphismus ist.*[54]

- *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine Kategorie, dann bezeichnet* $\mathfrak{A}^{\text{op}}$ *die* ***zu*** $\mathfrak{A}$ ***duale Kategorie*** *und es gilt* $\text{Obj}\mathfrak{A}^{\text{op}} = \text{Obj } \mathfrak{A}$ *und* $\text{Mor}(A,B) \in \text{Mor}(\mathfrak{A}^{\text{op}}) \Leftrightarrow \text{Mor}(B,A) \in \text{Mor } \mathfrak{A}$.

Die duale Kategorie ist also die Ausgangskategorie mit umgekehrt assoziierten Morphismen. Kategorien verallgemeinern also viele algebraische Konzepte wie etwa Gruppen oder Körpererweiterungen.

Beispiel 3.
- $\mathfrak{G}$ *ist Kategorie der Gruppen, wobei* $\text{Obj } \mathfrak{G}$ *die Menge der Gruppen und* $\text{Mor } \mathfrak{G}$ *die Menge der Gruppenhomomorphismen ist.*

- *Für einen Körper* K *ist* $\mathfrak{E}_K$ *die Kategorie der Körpererweiterungen* E/K *von* K*, wobei* $\text{Mor}(\mathfrak{E}_K)$ *die* K*-Homomorphismen*[55] *von* E_1 *nach* E_2 *für zwei Körpererweiterungen* E_1/K*,* E_2/K *sind.*

Die Relation zweier Kategorien wird über Funktoren, den strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Kategorien, ausgedrückt, so dass später auch ein Äquivalenzbegriff für Kategorien definiert werden kann.

Definition 31. *Seien* $\mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{B}$ *Kategorien.*

- $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *heißt* ***(kovarianter) Funktor*** *von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$*, falls ihm folgende Abbildungen zugeordnet sind:*

[53] Das heißt, zu φ existieren stets die links- und rechtsinversen Elemente.
[54] $\text{Aut}(A) := \{\varphi \in \text{Mor}(A,A) \mid \varphi \text{ Automorphismus}\}$ ist eine Gruppe.
[55] Das heißt, die Homomorphismen $f : E_1 \to E_2$ mit $f|_K = \text{id}_K$.

- $F : \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Obj}\,\mathfrak{B} : A \mapsto F(A)$,
- *zu je* $A, A' \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$*:* $F_{(A,A')} : \mathrm{Mor}(A, A') \to \mathrm{Mor}(F(A), F(A')) : (A \xrightarrow{\varphi} A') \mapsto (F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A'))$ *mit*
  1. $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ *für alle* $A \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ *und*
  2. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ *für alle* $\varphi, \psi \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{A}$.

- *Ein* ***kontravarianter Funktor*** $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *ist ein Funktor mit der folgenden abweichenden Bedingung an die Morphismen-Verträglichkeit:*
  - *zu* $A, A' \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ *ist abweichend* $F : \mathrm{Mor}(A, A') \to \mathrm{Mor}(F(A'), F(A)) : (A \xrightarrow{\varphi} A') \mapsto (F(A') \xrightarrow{F(\varphi)} F(A))$ *mit diesmal* $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ *für alle* $\varphi, \psi \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{A}$.

Kontravariante Funktoren sind die kovarianten Funktoren auf den entsprechenden dualen Kategorien. Sie kehren die Komposition von Morphismen um, so dass die Richtung der Morphismen berücksichtigt wird.
Die folgende Definition führt den Äquivalenzbegriff der Kategorientheorie ein.

Definition 32. *Seien* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *Kategorien.*

- *Seien* $F, G : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *zwei kovariante (zwei kontravariante) Funktoren.*
  - *Eine Familie von Morphismen* $(\Phi_A)_A \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ *mit* $\Phi_A \in \mathrm{Mor}(F(A), G(A))$ *heißt* ***natürliche Transformation*** $\Phi : F \rightsquigarrow G$*, falls die folgenden Diagramme für alle* $(\alpha : A \to A') \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{A}$ *kommutieren:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\alpha)"'] \\ F(A') \arrow[r, "\Phi_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\Phi_A"] & G(A) \\ F(A') \arrow[r, "\Phi_{A'}"] \arrow[u, "F(\alpha)"'] & G(A') \arrow[u, "G(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

  Das bedeutet, $G(\alpha) \circ \Phi_A = \Phi_{A'} \circ F(\alpha) : F(A) \to G(A')$ $(\Phi_A \circ F(\alpha) = G(\alpha) \circ \Phi_{A'} : F(A') \to G(A))$*.*[56]
  - *Eine natürliche Transformation* $\Phi : F \rightsquigarrow G$ *gegeben durch* $(\Phi_A)_A \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ *heißt* ***natürlicher Isomorphismus zwischen*** F ***und*** G*, falls alle* Φ_A *Isomorphismen sind.* F *und* G *heißen in diesem Fall* ***natürlich äquivalent****.*

- *Ein Paar von Funktoren* $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ *heißt* ***Äquivalenz zwischen*** $\mathfrak{A}$ ***und*** $\mathfrak{B}$*, falls* $G \circ F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ *zu* id_A *und* $F \circ G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ *zu* id_B *natürlich isomorph sind. In diesem Fall heißen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ ***äquivalent****.*

[56] Transformationen sind Morphismen von Funktoren.

Bei obiger Definition ist zu beachten, dass die Transformationen jeweils Morphismen zwischen Funktoren sind, Äquivalenzen jedoch aus zueinander inversen Morphismen bestehen, so dass die Kategorien selbst verglichen werden können.
Eine Äquivalenz kann auch anders als „Konstruktionsvorschrift“ für den „Umbau“ der einen Kategorie in die andere und umgekehrt betrachtet werden.

2.4.1 Produktbildung

Tensorprodukt oder kartesisches Produkt können auch auf kategorientheoretischer Ebene verallgemeinert werden, so dass einige weitere Folgerungen im Rahmen der algebraischen Geometrie möglich sind.
Sei $\mathfrak{A}$ eine Kategorie.
Das Produkt einer Familie von Objekten aus $\mathfrak{A}$ wird als eindeutiger Morphismus eines Objekts aus $\mathfrak{A}$ in das Produkt dargestellt, so dass das Produkts durch das Objekt identifiziert werden kann.

Definition und Bemerkung 33. *$A \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ heißt **universell anziehend (abstoßend)**, falls genau ein Morphismus*

$$B \to A \quad (A \to B) \quad \textit{für alle } B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$$

existiert. A heißt universell, falls A universell anziehend oder universell abstoßend ist.

Definition 34. *Sei $F := (A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten $A_i \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$ für eine Indexmenge I.*

- *$\mathfrak{A}_F$ wird definiert durch:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}_F &:= \{((A \to A_i) \in \mathrm{Mor}(A, A_i))_{i \in I} \mid A \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}\} \\
\mathrm{Mor}\ \mathfrak{A}_F &:= \{\mathrm{Mor}((A \to A_i)_{i \in I}, (B \to A_i)_{i \in I}) \mid A, B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}\} \\
&= \{\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B) \mid \varphi_i = \psi_i \circ \varphi, \varphi_i,\ \psi_i \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}_F, A, B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & B \arrow[dl, "\psi_i"] \\
& A_i &
\end{tikzcd}$$

- *Gibt es ein universell abstoßendes Element $(A \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i \in I} \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}_F$, so heißt $A =: \prod_{i \in I} A_i$ das **Produkt von F** und $\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i$ **Projektion**.*

- $\mathfrak{A}^F$ *wird definiert durch:*

$$\begin{aligned}
\text{Obj } \mathfrak{A}^F &:= \{((A_i \to A) \in \text{Mor}(A_i, A))_{i\in I} \mid A \in \text{Obj } \mathfrak{A}\}\\
\text{Mor } \mathfrak{A}^F &:= \{\text{Mor}((A_i \to A)_{i\in I}, (A_i \to B)_{i\in I}) \mid A, B \in \text{Obj } \mathfrak{A}\}\\
&= \{\varphi \in \text{Mor}(A, B) \mid \varphi \circ \varphi_i = \psi_i, \varphi_i,\ \psi_i \in \text{Obj } \mathfrak{A}^F, A, B \in \text{Obj } \mathfrak{A}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A & & B \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& A_i \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\psi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Gibt es ein universell anziehendes Element* $(A_i \overset{\alpha_i}{\to} A)_{i\in I} \in \text{Obj } \mathfrak{A}^F$*, so heißt* $A =: \coprod_{i\in I} A_i$ *das* ***Coprodukt von*** F *und* $\alpha_i : A \to \coprod_{i\in I} A_i$ ***Einbettung****.*

Die Projektionen der Kategorie $\mathfrak{A}_F$, also die Objekte, welche die Produkte definieren, müssen universell abstoßend sein, da sonst das Produkt nicht eindeutig bestimmt ist. Sind nämlich $(A \overset{\pi_i}{\to} A_i)_{i\in I}, (B \overset{\pi_i}{\to} A_i)_{i\in I} \in \text{Obj } \mathfrak{S}$, so folgt direkt $A = B = \prod_{i\in I} A_i$, womit die Morphismen $A \to B = \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i$ jeweils $\text{id}_{\prod_{i\in I} A_i}$ ergeben. Wäre etwa $(A \overset{\pi_i}{\to} A_i)_{i\in I}$ nicht universell abstoßend, dann gibt es ein $(A' \overset{\pi_i}{\to} A_i)_{i\in I}$, so dass es keinen eindeutigen Morphismus zwischen den beiden Objekten gibt.

Beispiel 4. *Betrachte die Kategorie der Mengen* $\mathfrak{S}$ *mit Mengen als Objekten und Abbildungen als Morphismen. Sei* $F = (A_i)_{i\in I}$ *eine Familie von Mengen.*

- *Als Produkt funktioniert beispielsweise das kartesische Produkt* $\prod_{i\in I} A_i$.

  Algebraische Strukturen können hier komponentenweise auf das Produkt übertragen werden, weswegen diese Produktbildung auch für algebraische Strukturen funktioniert.

- *Als Coprodukt kann die disjunkte Vereinigung* $\biguplus_{i\in I} A_i$ *definiert werden.*

2.5 Funktionentheorie

Werden die Polynome aus der algebraischen Geometrie als Polynomfunktionen aufgefasst, so lassen sich auch funktionentheoretische Begriffe und Ergebnisse auf die affinen algebraischen Mengen anwenden. Die Grundlage dazu wird hier gelegt, indem nicht der konkrete algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{C}$ und die natürliche Topologie darauf verwendet wird.
Sei also K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K.

Erinnerung 5. *Sei* $U \subseteq K$ *offen und* $f : U \to K$.

- f *heißt* ***holomorph****, falls die* TAYLOR*-Reihe* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *von* f *mindestens auf* $K_R(z_0)$ *für* $R = \sup\{r > 0 \mid K_r(z_0) \subseteq U\}$ *lokal gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

- *Ist f holomorph und $U = K$, so heißt f* ***ganz****.*
- *Jede Polynomfunktion $f : K \to K : x \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ auf K ist ganz.*

3 Algebraische Geometrie

3.1 Hilberts Nullstellensatz

Seien K ein Körper, $K' \supseteq K$ ein Erweiterungskörper und $R := K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über K.

Definition und Bemerkung 35. *Sei $M \subseteq R$ eine Menge von Polynomen.*

1. *$\mathcal{V}_{K'}(M) := \{x \in \mathbb{A}(K')^n \mid f(x) = 0$ für alle $f \in M\}$ heißt die* ***gemeinsame Nullstellenmenge*** *oder* ***Varietät*** *von M.*[57]
2. *$\mathcal{V}_{K'}(M) \leq \mathbb{A}(K')^n$.*
3. *Ein $V \leq \mathbb{A}(K')^n$ heißt* ***affine algebraische Menge (AAM)****, falls es ein $M \subseteq R$ gibt mit $V = \mathcal{V}_{K'}(M)$.*

Die AAM bilden die Grundlage der algebraischen Geometrie, da sie eine Brücke zwischen algebraischen Gleichungssystemen und geometrischen Formen schlagen: Der Lösungsraum des Systems ist gleichzeitig die Menge der Punkte der Form.
Die Struktur des Lösungsraums und damit der Form ist also von essentiellem Interesse. Zur Charakterisierung derselben wird Hilberts *Nullstellensatz* (Satz 1) verwendet. Das Ergebnis ist ein Zusammenhang zwischen der Struktur der geometrischen Form und der Ideal-Struktur des zu Grunde liegenden Rings. Die entsprechenden Begriffe und Aussagen werden im Folgenden definiert und bewiesen. Die dazu erforderlichen Grundlagen werden in Abschnitt 2.1 gelegt, wo aber nicht alle Kernaussagen bewiesen werden, so dass der hier geführte Beweis möglichst mit grundlegenden Begriffen argumentiert.

Definition und Bemerkung 36. *Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal in R.*

- *Die Menge $\sqrt{I} := \{f \in R \mid f^n \in I$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ heißt das* ***Radikal***[58] ***von*** *I.*
- *$\sqrt{(0)}$ ist die Menge der nilpotenten Elemente von R, genannt das* ***Nilradikal****.*
- *$\sqrt{I} \trianglelefteq R$.*
- *Ist $I = \sqrt{I}$, so heißt I* ***Radikal-Ideal****.*
- *$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.*

[57] Der Erweiterungskörper $K' \supseteq K$ wird hier verwendet, um die Definition von $\mathcal{V}_{K'}(M)$ nicht nur auf K zu beschränken.

[58] Das hier definierte Radikal ist Verallgemeinerung des *Primradikals* $\bigcap_{J \trianglelefteq_{\text{prim}} R} J$

- *Für ein $X \subseteq \mathbb{A}^n(K')$ heißt $\mathcal{I}_K(X) := \{f \in R \mid f(x) = 0$ für alle $x \in X\}$ das **Verschwindungsideal von X**[59]*

Beweis:

$\sqrt{I} \trianglelefteq R$: • $a, b \in \sqrt{I} \Longrightarrow$ ex. $i, j \in \mathbb{N}_0$: $a^i, b^j \in I \Longrightarrow (a^i + b^j) \in I \ldots$

• $a \in \sqrt{I}$, $r \in R \Longrightarrow$ ex. $i \in \mathbb{N}_0$: $a^i \in I \Longrightarrow (ra)^i = r^i a^i \in I \Longrightarrow ra \in \sqrt{I}$.

$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$: $\{f \in R \mid f^n \in \sqrt{I}$ für ein $n \in \mathbb{N}\} = \{f \in R \mid (f^n)^m \in I$ für $n, m \in \mathbb{N}\}$.

□

Die Elemente eines Radikals $\sqrt{I}$ für ein Ideal $I \subseteq R$ sind die Elemente aus R, die durch Potenzieren wieder zu I gehören. Umgekehrt kann ein $x \in \sqrt{I}$ auch als „Wurzel“ (oder „Radikal“) von potenzierten Elementen aus I aufgefasst werden, die Operation $\sqrt{\cdot}$ wird als „Radizieren“ bezeichnet.
Die folgende Bemerkung zeigt, dass die Definition der Varietäten auf Teilmengen von Polynomen keine echte Verallgemeinerung ist. Somit können bei der weiteren Betrachtung Ideale vorrausgesetzt werden. Desweiteren liefert das Radikal eines Ideals keine Vergrößerung der Nullstellenmenge des Ideals.

Bemerkung 11.

- *Ist $M \subseteq R$, so ist $\mathcal{V}_{K'}(M) = \mathcal{V}_{K'}((M))$.*
- *Ist $I \trianglelefteq R$, so $\mathcal{V}_{K'}(I) = \mathcal{V}_{K'}(\sqrt{I})$.*

Beweis:

- Es gilt

$$\mathcal{V}_{K'}(M) = \{a \in \mathbb{A}(K')^n \mid \underbrace{f(a) = 0 \text{ für alle } f \in M}_{\Longleftrightarrow \underbrace{(rf+sg)(a) = 0 \text{ für alle } f,g \in M, r,s \in K'}_{\Longleftrightarrow f(a)=0 \text{ für alle } f \in (M)}}\} = \mathcal{V}_{K'}((M))$$

- $\mathcal{V}_{K'}(\sqrt{I}) = \{a \in \mathbb{A}(K')^n \mid \text{für alle } f \in \sqrt{I} \text{ ex.} m \in \mathbb{N} : f(a) = f^m(a) = 0\} \overset{f^m \in I}{=} \mathcal{V}_{K'}(I)$.

□

Ist K algebraisch abgeschlossen und somit $K' = K$, so geht das Verschwindungsideal mit den AAM in folgendem Sinne einher.

[59] vergleiche *Annulatorideal* eines Moduls in [PleskenAG1]

Hauptsatz 1 (AAM vs. Verschwindungsideal).

1. Hilberts *Nullstellensatz:*

   Ist K algebraisch abgeschlossen[60], $I \overset{\neq}{\lhd} R$, *so ist* $\mathcal{V}_K(I) \neq \emptyset$, *das heißt, es gibt ein* $a \in \mathbb{A}^n$, *welches gemeinsame Nullstelle der* $f \in I$ *ist.*

2. *Sei* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *AAM,* $I \trianglelefteq R$.

   (a) $V = \mathcal{V}_K(\mathcal{I}_K(V))$.

   (b) $\sqrt{I} = \mathcal{I}_K(\mathcal{V}_K(I))$.

   Sei weiter $\mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ *die Menge der AAM in* $\mathbb{A}^n$ *und* $\mathrm{Rad}(R)$ *die Menge der Radikale von* R. *Die Abbildung*

   $$\mathcal{I}_K : \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n) \to \mathrm{Rad}(R) : V \mapsto \mathcal{I}_K(V)$$

   ist eine inklusionsumkehrende Bijektion[61].

Beweis:

1. Die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle $a \in \mathcal{V}_K(I)$ ist auf die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle eines maximalen Ideals $J \trianglelefteq R$ zurückführbar. Wählt man nämlich J maximal mit $I \subseteq J$, so kehren sich die Inklusionen bei den Varietäten um: $\mathcal{V}_K(I) \supseteq \mathcal{V}_K(J)$, das bedeutet, $\mathcal{V}_K(J)$ ist minimal. Somit ist $a \in \mathcal{V}_K(I)$, falls die Existenz von $(a_1, \ldots, a_n) = a \in \mathcal{V}_K(J)$ garantiert wird.

   Zeige dazu: $J = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$.

   $E := R/J$ ist auf Grund der Maximalität von J ein Körper (vergleiche Erinnerung 1) und $K \subseteq E$ ein Teilkörper, da $K \subseteq R$ und $K \cong K/J$. Nach Definition und Bemerkung 8 ist E eine K-Algebra von endlichem Typ über K, weswegen E/K nach Folgerung 4 algebraisch ist. Da aber K bereits algebraisch abgeschlossen ist, gilt $E \cong K$.

   Die Existenz dieses Isomorphismus zwischen E und K induziert die Existenz der Bilder der Restklassen $\overline{X_i}$ modulo J und somit die Existenz des Einsetzungshomomorphismus $\varepsilon_{(a_1,\ldots,a_n)} : R \to K : p(X_1, \ldots, X_n) \mapsto p(a_1, \ldots, a_n)$. Folgende Situation tritt also auf.

   $$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[dr, mapsto] & R \arrow[rr, "\varepsilon_{(a_1,\ldots,a_n)}"] \arrow[dr] & & K & a_i \\
& \overline{X_i} & R/J \arrow[ur, "\cong"] & \overline{X_i} \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

   Somit enthält $\mathcal{V}_K(J)$ genau das Element $(a_1, \ldots, a_n)$.

[60] Das heißt, $K = K'$.

[61] Vergleiche Galois-Korrespondenz

2. (a) Es gilt
$$\mathcal{V}_K(\mathcal{I}_K(V)) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid \underbrace{f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{I}_K(V)}_{\iff x \in V}\} = V.$$

   (b) „$\subseteq$": Sei $f \in \sqrt{I}$, also $f^m \in I$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $f^m(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{V}_K(I)$, also $f^m \in \mathcal{I}_K(\mathcal{V}_K(I))$.

   „$\supseteq$": Sei $f \in \mathcal{I}_K(\mathcal{V}_K(I))$ und O.B.d.A. $f \neq 0$. Ferner setze $J := (I, f \cdot X_{n+1} - 1) \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_{n+1}] = R[X_{n+1}]$.

   Der Beweis benutzt den Rabinovic-Trick, um zu zeigen, dass $\mathcal{V}_K(J) = \emptyset$ in $\mathbb{A}^{n+1}$, womit aus Hilberts Nullstellensatz sofort $J = R[X_{n+1}]$ folgt.

   Rabinovic-*Trick:* Angenommen $\mathcal{V}_K(J) \neq \emptyset$. Sei $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathcal{V}_K(J)$. Somit ist auch $(a_1, \ldots, a_n)\mathcal{V}_K(I)$. Schließlich gilt $0 = \underbrace{f(a_1, \ldots, a_n)}_{=0} \cdot a_{n+1} - 1 = -1$ als Widerspruch zur Annahme.

Zur Bijektion:

- Wohldefiniertheit folgt aus *2. (b)*.
- Umkehrabbildung gegeben durch

$$\mathcal{I}_K^{-1} : \mathrm{Rad}(R) \to \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n) : \sqrt{I} = \mathcal{I}_K(\mathcal{V}_K(I)) \mapsto \mathcal{V}_K(I).$$

□

Aus dem Beweis zu Hilberts Nullstellensatz lassen sich einige interessante Aussagen ziehen (vergleiche auch [PleskenAG2], Seiten 14 ff), welche für die Struktur der Koordinatenringe, wie sie in Unterabschnitt 3.2.1 behandelt werden, von Wichtigkeit sind.

Folgerung 5. *1. Ist K algebraisch abgeschlossen, $I \triangleleft_{max} K[X_1, \ldots, X_n]$, so ist $K \cong R/I$ und*

$I = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \mathrm{Kern}(\varepsilon_{(a_1, \ldots, a_n)})$.[62]

2. Ist $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$, dann ist $\mathcal{I}_K(V)$ ein Radikal-Ideal.

Beweis:

1. Beweis von 1. aus Hauptsatz 1.

2. Es ist $V = \mathcal{V}_K(I)$ für ein $I \trianglelefteq R$.

   „$\subseteq$": Sei $f \in \sqrt{\mathcal{I}_K(V)}$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k \in \mathcal{I}_K(V)$ und somit $f^k(v) = 0$ für alle $v \in V$. Damit ist auch $f(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $f \in \mathcal{I}_K(V)$.

   „$\supseteq$": Klar.

[62] Es gibt also eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Ideale $I \triangleleft_{\max} K[X_1, \ldots, X_n]$ und den Elementen $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$.

□

Hier noch einige Eigenschaften der bisher definierten Begriffe, die für die Definition der ZARISKI-Topologie von grundlegender Bedeutung sind.

Bemerkung 12.
Sei $I, J, I_\lambda \trianglelefteq R$ Ideale für $\lambda \in \Lambda$, Λ Indexmenge.

- Inklusionsumkehrung: *Ist $I \subseteq J$, so $\mathcal{V}_{K'}(I) \supseteq \mathcal{V}_{K'}(J)$.*
- Topologische Eigenschaften:

  $\mathcal{V}_{K'}(\emptyset) = \mathbb{A}(K')^n$ *und* $\mathcal{V}_{K'}(R) = \emptyset$.

  $\mathcal{V}_{K'}(I \cap J) = \mathcal{V}_{K'}(I) \cup \mathcal{V}_{K'}(J)$.

  $\mathcal{V}_{K'}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_{K'}(I_\lambda)$.

Beweis:

- *Inklusionsumkehrung:* Sei $a \in \mathcal{V}_{K'}(J)$, dann ist $f(a) = 0$ für alle $f \in J$ und somit $f(a) = 0$ für alle $f \in I \subseteq J$.
- $\mathcal{V}_{K'}(\emptyset) = \mathbb{A}(K')^n$ und $\mathcal{V}_{K'}(\mathbb{A}(K')^n) = \emptyset$ folgt direkt aus HILBERTS Nullstellensatz.

□

3.2 Die ZARISKI-Topologie

Der Zusammenhang zwischen algebraischer Geometrie und Topologie wird durch die ZARISKI-Topologie hergestellt, welche ein Beispiel für eine nicht anschauliche und nicht in der Analysis verwendete Topologie ist.[63]
Hier seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper sowie $R = K[X_1, \ldots, X_n]$.

Definition und Bemerkung 37.

- *Sei $B = \{U \mid U = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) \neq 0$ für ein $f \in I\}, I \trianglelefteq R\} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ot}(\mathbb{A}^n)$.*[64] *$\langle B\rangle$ heißt **Zariski-Topologie $\mathcal{Z}$ auf** $\mathbb{A}^n$.*
- *Die abgeschlossenen Mengen der* ZARISKI*-Topologie sind genau die affinen algebraischen Mengen.*
- *Für eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ist die* ZARISKI*-Topologie die Spurtopologie von $\mathcal{Z}$ auf V.*

Nach Bemerkung 12 gelten für die affinen algebraischen Mengen genau die Axiome der abgeschlossenen Mengen einer Topologie.

[63] OSCAR ZARISKI hat wohl diese Topologie als Beispiel für das seiner Meinung nach *unsinnge* Konzept der Topologie erfunden.
[64] B enthält also alle Mengen $\notin \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.

Satz 8.
Sei $\underline{V} = (\mathcal{Z} \cap V, V)$ *topologischer Raum mit* $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.

1. *Wie in* $(\mathcal{Z}, \mathbb{A}^n)$ *gilt:* $U \subseteq V$ *abgeschlossen* $\Longleftrightarrow U \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.
2. $\underline{V}$ *ist* NOETHER*sch und damit*[65] *in abgeschlossene, irreduzible Teilmengen* $U_1, \dots, U_s \subseteq V$ *zerlegbar:* $X = U_1 \cup \dots \cup U_s$.

Beweis:

1. $U \subseteq V$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow U = W \cap V$ für ein bezüglich $\mathbb{Z}$ abgeschlossenes $W \Longleftrightarrow W$ abgeschlossen bezüglich $\mathbb{Z} \Longleftrightarrow U \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.

□

Die topologischen Eigenschaften der AAM gehen mit der Ideal-Struktur von R wie folgt einher.

Hauptsatz 2 (Irreduzible AAM vs. Primideal).
Sei $V \subseteq \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$. V *ist genau dann irreduzibel, wenn* $\mathcal{I}_K(V)$ *Primideal in* R *ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei V irreduzibel.
Zu zeigen: $fg \in \mathcal{I}_K(V)$ für $f, g \in R$, so auch $f \in \mathcal{I}_K(V)$ oder $g \in \mathcal{I}_K(V)$.
Seien $f \neq g \in R$ mit $fg \in \mathcal{I}_K(V)$ und V irreduzibel. Es ist $fg(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $f(v) = 0$ oder $g(v) = 0$ für alle $v \in V$. Somit gilt die Zerlegung

$$V = \underbrace{(V \cap \mathcal{V}_K(f))}_{V_1} \cup \underbrace{(V \cap \mathcal{V}_K(g))}_{V_2}.$$

Wegen der Irreduziblität von V folgt, dass V_1 und V_2 nicht disjunkt sein können. Da $f \neq g$ ist, ist auch $\mathcal{V}_K(f) \neq \mathcal{V}_K(g)$. Daher gilt

$$V = V \cap \mathcal{V}_K(f) \text{ oder } V \cap \mathcal{V}_K(g),$$

womit $f \in \mathcal{I}_K(V)$ oder $g \in \mathcal{I}_K(V)$ ist.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{I}_K(V)$ Primideal.
Zu zeigen: V ist nicht Vereinigung zweier, disjunkter, abgeschlossener Mengen.
Sei $V = \mathcal{V}_K(I_1) \cup \mathcal{V}_K(I_2) \overset{\text{Bem. 12}}{=} \mathcal{V}_K(I_1 \cap I_2)$ für zwei Ideale $I_1, I_2 \trianglelefteq R$. Strategie: Falls V nicht eine der Varietäten ist, so ist V gleich der anderen.
Sei dazu o.B.d.A. $V \neq \mathcal{V}_K(I_1)$. Da es somit ein $f \in I_1$ und $v \in V$ gibt, so dass $f(v) \neq 0$ ist, ist $I_1 \not\subseteq \mathcal{I}_K(V)$. Seien $f \in I_1 \setminus \mathcal{I}_K(V)$ und $g \in I_2$. Es gilt

$$fg \in I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \overset{V = \mathcal{V}_K(I_1 \cap I_2)}{\subseteq} \mathcal{I}_K(V).$$

Wegen $f \notin \mathcal{I}_K(V)$ muss $g \in \mathcal{I}_K(V)$ liegen. Da g beliebig war, gilt $I_2 \subseteq \mathcal{I}_K(V)$. Es folgt, dass $V = \mathcal{V}_K(I_2)$ ist. □

[65] nach Bemerkung 10

3.2.1 Funktionentheoretische Folgerungen

Dank der ZARISKI-Topologie kann auch die Funktionentheorie auf AAM angewandt werden, was den Koordinatenring hervorbringt, mit Hilfe dessen die regulären Funktionen definiert werden können. Diese haben ähnliche Eigenschaften wie holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$, stehen hier nur in einem weitaus allgemeineren algebraischen Kontext. Die für diesen Zusammenhang benötigten funktionentheoretische Grundbegriffe sind in Abschnitt 2.5 beschrieben.

Definition und Bemerkung 38. *Sei $M \subseteq \mathbb{A}^n$.*

1. *$(x \mapsto f(x)) \in \mathcal{F}(M) := \{f : M \to K\}$ mit $f \in R$ heißt **Polynomfunktion auf** M.*
2. *$\mathcal{F}(M)$ ist eine K-Algebra und die Menge der Polynomfunktionen eine zu R isomorphe K-Unteralgebra von $\mathcal{F}(\mathbb{A}^n)$.*[66]

Beweis: *Zeige:* $\alpha : R \to \mathcal{F}(M) : f \mapsto (x \mapsto f(x))$ ist ein K-Algebren-Homomorphismus, dessen Bild die Polynomfunktionen auf M sind und mit $\mathrm{Kern}(\alpha) = \{f \in R \mid f|_M = 0\} = \{f \in M \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} = \mathcal{I}_M$. □

Definition und Bemerkung 39. *Sei $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.*
*Da nach obigem Beweis $\mathcal{I}_K(V)$ der Kern der Einbettung von R in $\mathcal{F}(V)$ ist, bildet $R/\mathcal{I}_K(V) =: K[V]$ eine K-Algebra, genannt die **K-Algebra der regulären Funktionen auf** V oder alternativ den **Koordinatenring von** V.*

Um den Koordinatenring $K[V]$ als affine K-Algebra zu charakterisieren, ist folgendes Zwischenergebnis hilfreich.

Lemma 3. *$A = R[X_1, \dots, X_n]/I$ ist genau dann reduziert, wenn $I \trianglelefteq R[X_1, \dots, X_n]$ ein Radikal-Ideal ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: A enthalte keine nilpotenten Elemente. Angenommen $I \neq \sqrt{I}$, dann ist insbesondere $I \subsetneqq \sqrt{I}$, da $I \subseteq \sqrt{I}$ trivial ist und somit $I \not\supseteq \sqrt{I}$ gelten muss. Somit existieren $f \in \sqrt{I} \setminus I$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n \in I$. Das bedeutet, $f^n = 0$ in A, also ist $f \in A$ nilpotent. Widerspruch.
„$\Leftarrow$“: Sei $I = \sqrt{I}$ und ferner $0 \neq f \in I$. Angenommen f wäre nilpotent, das heißt, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ in A. $\Longrightarrow f^n \in I \Longrightarrow f \in \sqrt{I} \Longrightarrow f \in I \Longrightarrow f = 0$ in A. Widerspruch. □

Mit dieser im Vergleich zur folgenden Aussage etwas stärkeren solchen und Hauptsatz 2 können die folgenden Ergebnisse bewiesen werden.

Folgerung 6 (Konsequenzen von Hauptsatz 2). *Sei $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.*

[66] Die Menge der Polynomfunktionen wird im Folgenden durch R selbst identifiziert.

1. *$K[V]$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn V irreduzibel ist.*

2. *$K[V]$ ist eine affine K-Algebra.*

Beweis:

1. Es gilt
$$V \text{ irreduzibel} \overset{\text{Hauptsatz 2}}{\iff} \mathcal{I}_K(V) \trianglelefteq R \text{ Primideal} \overset{\text{Erinnerung 1}}{\iff} K[V] \text{ Integritätsbereich.}$$

2. Nach Definition und Bemerkung 8 ist $K[V] = K[X_1, \ldots, X_n] / \mathcal{I}_K(V)$ von endlichem Typ über K. Angenommen $K[V]$ enthielte ein nilpotentes Element $f + \mathcal{I}_K(V)$. Dann existierte ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m + \mathcal{I}_K(V) = \mathcal{I}_K(V) = 0_{K[V]}$. Also wäre $f^m \in \sqrt{\mathcal{I}_K(V)} = \mathcal{I}_K(V)$ und somit bereits $f \in \mathcal{I}_K(V)$, womit $f + \mathcal{I}_K(V) = 0_{K[V]}$ und $K[V]$ reduziert.

□

Für $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ ist der Koordinatenring $K[V]$ nach dem Homomorphiesatz isomorph zum Bild der Einbettung von R in $\mathcal{F}(V)$ also zu der Menge der Polynomfunktionen auf V. Diese sind im Sinne der folgenden allgemeinen Definition die eindimensionalen regulären Funktionen beziehungsweise die Koordinatenfunktionen einer regulären Funktion.

Definition 40. *Seien $V, W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt* ***regulär****, falls es Polynome $f_1, \ldots, f_n \in R$ gibt, so dass $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ für alle $x \in V$.*[67]

Der Zusammenhang zwischen Koordinatenring und regulären Funktionen wird nun in eine Bemerkung gefasst.

Definition und Bemerkung 41.
Seien $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$, $W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^m)$ und $f = (f_1, \ldots, f_m) : V \to W$ eine reguläre Funktion.

1. *Genau dann ist $W = \mathbb{A}^1$, wenn $f \in K[V]$ ist.*

2. *Die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ sind genau die Elemente des Koordinatenrings $K[V]$.*

3. *Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls regulär, so heißt f* ***Isomorphismus****. V und W heißen dann* ***isomorph****.*

4. *f ist stetig in der* Zariski*-Topologie.*

5. Charakterisierung: *f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.*

[67] Der Begriff geht in der Funktionentheorie auch mit dem der *meromorphen Funktionen* einher.

Beweis:

1. Ist $f : V \to \mathbb{A}^1 \cong K$ regulär, so ist $f \in R \subseteq \mathcal{F}(V)$. Sobald $f \in \mathcal{I}_K(V)$, gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ und somit $f = 0$. Damit ist die Nullfunktion gleich dem Nullelement in $K[V] = R/\mathcal{I}_K(V)$. Umgekehrt ist jedes $f \in K[V]$ eine Polynomfunktion mit Werten in K, also regulär.

2. Die Koordinatenfunktionen sind Funktionen der Form $V \to \mathbb{A}^1$ also nach dem ersten Punkt genau die Elemente von $K[V]$.

3. *Stetigkeit:* Sei $U \subseteq V$ abgeschlossen, also $U = \mathcal{V}_K(I)$ für ein $I \trianglelefteq R$. Es gilt
$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{v \in V \mid f(v) \in U\} = \{v \in V \mid g(f(v)) = 0 \text{ für alle } g \in I\} \\ &= \{v \in V \mid g(f_1(v), \ldots, f_m(v)) = 0 \text{ für alle } g \in I\} \end{aligned}$$
Setze also $J := \{g(f_1, \ldots, f_n) \mid g \in I\}$, das heißt, es gilt $v \in \mathcal{V}_K(J) \iff g(f(v)) = 0$. Es ist somit $f^{-1}(U) = \mathcal{V}_K(J)$ und insbesondere $f^{-1}(U)$ abgeschlossen.

4. *Homomorphismus:* Die beiden Definitionen sind wegen der nachgewiesenen Stetigkeit identisch.

□

Die regulären Funktionen stellen also Morphismen zwischen affinen algebraischen Mengen dar. Die folgenden Beispiele können später in Abschnitt 3.3 als Startpunkt zur Konstruktion neuer regulärer Funktionen fungieren.

Beispiel 5. *Seien* $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ *und* $W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^m)$.

- *Wie in Abschnitt 3.3 klar wird, ist* $W \times V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^{n+m})$. *Die Projektion* $\mathrm{pr}_V : W \times V \to V : (v, w) \mapsto v$ *ist eine reguläre Funktion mit Koordinatenfunktionen* $\{f_i : V \to \mathbb{A}^1 : x \mapsto x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Eine Funktion ist regulär, wenn deren Koordinatenfunktionen regulär sind. Eine weitere Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffs ist das Begrenzen der Funktion auf eine offene Teilmenge der affinen algebraischen Menge wie es auch bei der Definition von Holomorphie der Fall ist.
Dazu wird zuerst eine geeignete offene Menge auf einer affinen algebraischen Menge definiert.

Definition und Bemerkung 42. *Sei* $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.

- *Für eine reguläre Funktion* $f \in K[V]$ *heißt* $D(f) := \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$ ***elementar offene Menge in*** V.

- *Jede elementar offene Menge in* V *ist offen.*

3.2.2 Kategorientheoretische Folgerungen

Mit Hilfe der kategorientheoretischen Begriffe aus Abschnitt 2.4 und den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt 3.2.1 kann gezeigt werden, dass die affinen algebraischen Mengen über K und die affinen K-Algebren äquivalent sind und zwar durch Angabe einer Äquivalenz für die beiden entsprechenden Kategorien. Zunächst werden aber die beiden Kategorien eingeführt:

$\mathfrak{V}_K$: Kategorie der AAM über K.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}(\mathfrak{V}_K) &= \{(V, \mathbb{A}^n) \mid V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)\} \\
\mathrm{Mor}((V, \mathbb{A}^n), (W, \mathbb{A}^n)) &= \mathrm{Mor}(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ regulär}\}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K$: Kategorie der affinen K-Algebren.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K) &= \{(A, (a_1, \ldots, a_n)) \mid A = K[a_1, \ldots, a_n] \\
&\qquad \text{affine } K\text{-Algebra } a_1, \ldots, a_n \in A\} \\
\mathrm{Mor}((A, (a_1, \ldots, a_n)), &= \{f : A \to B \mid f \ K\text{-Algebrenhomomorphismus}\} \\
(B, (b_1, \ldots, b_n))) &
\end{aligned}$$

Hauptsatz 3 (Äquivalenz von AAM und affinen K-Algebren).
Die Kategorien $\mathfrak{V}_K$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K$ sind äquivalent.

Beweis: Angabe einer Äquivalenz zwischen $\mathfrak{V}_K$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K$, das heißt, zweier *kontravarianter* Funktoren $F : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{A}\mathfrak{A}_K$ und $G : \mathfrak{A}\mathfrak{A}_K \to \mathfrak{V}_K$, die zueinander rechts- beziehungsweise linksinvers sind.
Zunächst wird die bei beiden Funktoren verwendete Abbildung definiert. Betrachte dazu das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{V}_K)"] \arrow[dr, "f^*(g)"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K[V] & K[W] \arrow[l, "f^* \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K)"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt

1. $f^*(g) = g \circ f$ für ein $g : W \to \mathbb{A}^1 \in K[W]$, das heißt, $f^*(g) \in K[V]$.

2. Zu gegebenem f^* und g existiert ein eindeutiges f, das bedeutet, die Abbildung

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{V}_K) = \mathrm{Mor}(V, W) \to \mathrm{Mor}(K[W], K[V]) = \mathrm{Mor}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K) : f \mapsto f^*$$

ist bijektiv.

$F : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{A}\mathfrak{A}_K$:

- $F((V, \mathbb{A}^n)) = (K[V], (a_1, \ldots, a_n))$ für $K[V] = R/\mathcal{I}_K(V) = K[a_1, \ldots, a_n]$ mit $a_i = \overline{X_i} = X_i + \mathcal{I}_K(V)$, $1 \leq i \leq n$.
- $F(f) = f^*$, wobei $f : V \to W \in \mathrm{Mor}(V, W)$ reguläre Funktion und $f^* : K[W] \to K[V]$ wie oben definiert.

$G : \mathfrak{A}\mathfrak{A}_K \to \mathfrak{V}_K$:

- $G((A, (a_1, \ldots, a_n))) = (V, \mathbb{A}^n)$ für $A = K[a_1, \ldots, a_n] = R/\mathrm{Kern}(\varepsilon_{(a_1,\ldots,a_n)})$ und $V = \mathcal{V}_K(\mathrm{Kern}(\varepsilon_{(a_1,\ldots,a_n)}))$.
- $G(g) = f$ für $g : A \to B$, wobei $f^* : K[W] \to K[V]$ vermöge entsprechender Einbettungen $\alpha : K[V] \to A$, $\beta : K[W] \to B$, für die $\alpha \circ f^* = g \circ \beta$ gilt. [Beweis ist langweilig/fehlt noch.]

$G \circ F = \mathrm{id}_{\mathfrak{V}_K}$:

$F \circ G = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_K}$:

□

3.3 Konstruktionen affiner algebraischer Mengen

Im folgenden wird das kartesische Produkt der AAM vermöge $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ identifiziert. Aus bestehenden AAM können mit einfachen Mitteln neue konstruiert werden.

Bemerkung 13.
Seien $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^r)$*,* $W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^s)$ *für* $n = r + s$*.*

- *Es ist* $V \times W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$*.*
- *Sind* $Z \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^k)$ *und* $f : Z \to V$*,* $g : Z \to W$ *reguläre Abbildungen, dann ist*

$$f \times g : Z \to V \times W : z \mapsto (f(z), g(z))$$

  eine reguläre Abbildung
- $K[V \times W] \cong K/\mathcal{I}_K(V), \mathcal{I}_K(W)$*.*

Beweis:

□

Auf Grund in Hauptsatz 3 gezeigten Äquivalenz, sollte die Konstruktion neuer AAM vermöge des kartesischen Produktes auch neue Koordinatenringe hervorbringen. Dazu werden Tensorprodukte benötigt, wie sie in Abschnitt 2.1.1 eingeführt werden.

Hauptsatz 4 (Konstruktion affiner K-Algebren).
Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$, $W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^m)$ und $n = m + n$
Dann ist $V \times W \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ und $K[V \times W] \cong K[V] \overset{K}{\otimes} K[W]$.

Beweis:

□

3.4 Krull-Dimension und Noether-Normalisierung

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Da die Kategorien der affinen algebraischen Mengen und der affinen K-Algebren äquivalent sind, ist die Äquivalenz auch für einen gemeinsamen Dimensionsbegriff wie der Krull-Dimension sinnvoll. Dies formuliert der folgende Satz.

Satz 9.
Ist $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$, so ist $\dim V \; = \dim K[V] \;$.

Beweis: Nach Hauptsatz 2 korrespondiert eine maximale Kette von Primidealen mit einer maximalen Kette von irreduzibelen Teilmengen vermöge $\mathcal{I}_K(V)$. Somit sind insbesondere die Längen der Ketten gleich. □

Die Krull-Dimension für eine der beiden Seiten jedoch zu berechnen, ist nicht direkt an Hand der Definition zu bewerkstelligen sondern bedarf einer genaueren Analyse. Hierzu wird im Folgenden die Primidealstruktur von $K[V]$, die ja für die Bestimmung von $\dim K[V]$ erforderlich ist, betrachtet. Das einschlägige Ergebnis stellt Satz 6 formuliert für allegemeine K-Algebren und nicht notwendig algebraisch abgeschlossene Körper K dar. Diesem liegt der Begriff der Noether-Normalisierung zu Grunde, welcher in Definition und Bemerkung 17 eingeführt wird.

Folgerung 7. *Sei $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$.*

1. $\dim V \; = \max\{\dim V_i \; \mid V_i \subseteq V$ *irreduzibel*$\}$.
2. *Ist $V \in \mathrm{AAM}(\mathbb{A}^n)$ irreduzibel, so ist* $\dim V \; = \mathrm{tr.deg}(\mathrm{Quot}(K[V])/K)$.
3. *Ist $d := \dim V \;$, so hat jede maximale Kette abgeschlossener, irreduzibler Teilmengen von V Länge d.*

Beweis:

1.

2. Da V irreduzibel ist, ist $K[V]$ nach Hauptsatz 2 beziehungsweise Folgerung 6 ein Integritätsbereich. Sei also $K[y_1, \ldots, y_n] \subseteq K[V]$ eine NOETHER-Normalisierung. $y_1, \ldots, y_n$ sind algebraisch unabhängig über K, womit $\mathrm{tr.deg}(\mathrm{Quot}(K[V])/K) = d$ ist. (Insbesondere ist $\mathrm{Quot}(K[V])/K[V]$ algebraisch.) Nach Satz 6 gilt $d = \dim K[V]$, weil $K[V]$ von endlichem Typ über K ist(??). Nach Satz 9 folgt, dass $\mathrm{tr.deg}(\mathrm{Quot}(K[V])/K) = d = \dim K[V] = \dim V$.

3. Nach Hauptsatz 2 gehen die Primideal-Ketten mit den Ketten abgeschlossener, irreduzibler Teilmengen von V einher. Satz 6 liefert die Länge d somit für beide Ketten.

□

Index