Gegeben sei der folgende metrische Datensatz:

$$x_1 = 4, x_2 = 15, x_3 = 4, x_4 = 3,$$
$$x_5 = 6, x_6 = 13, x_7 = 15, x_8 = 4.$$

(a) (i) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion F_8 an.

(ii) Berechnen Sie den Quartilsabstand.

(iii) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten.

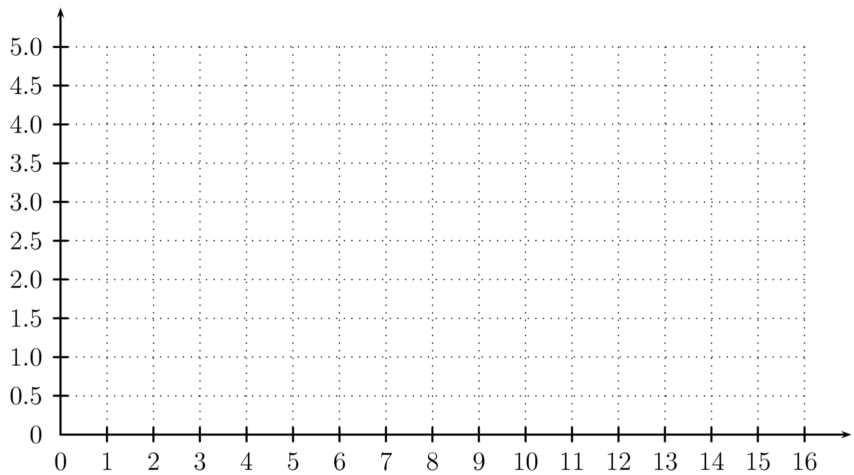
(b) Erstellen Sie ein Histogramm zur Klasseneinteilung

$$K_1 = [0, 4], K_2 = (4, 12], K_3 = (12, 16].$$

Vervollständigen Sie dazu zunächst die folgende Tabelle, indem Sie zu obiger Klassierung die relativen Klassenhäufigkeiten $f(K_i)$, die Klassenbreiten b_i, die Höhen h_i und $32 \cdot h_i$ für $i = 1, 2, 3$ bestimmen:

i	$f(K_i)$	b_i	h_i	$32 \cdot h_i$
1				
2				
3				

Zeichnen Sie anschließend das zugehörige Histogramm bei einer Skalierung mit dem **Proportionalitätsfaktor** $c = 32$ in das folgende Koordinatensystem ein.



In einem physikalischen Versuch soll die Federkonstante einer Schraubenfeder bestimmt werden. Dazu wird in 5 Versuchsdurchgängen jeweils ein Körper bekannter Masse m_i (in 100g) an die Feder gehängt und die sich dadurch einstellende Auslenkung y_i (in cm) der Feder aus der Ruhelage gemessen. Dabei ergeben sich folgende Versuchsergebnisse, die in einer Arbeitstabelle festgehalten werden:

$\sum_{i=1}^{5} m_i$	$\sum_{i=1}^{5} y_i$	$\sum_{i=1}^{5} m_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{5} m_i \cdot y_i$
20	35	110	269	165

(a) Bestimmen Sie mittels der Methode der kleinsten Quadrate die zugehörige Regressionsgerade

$$\hat{y}(m) = \hat{a} + \hat{b}m, \quad m \in \mathbb{R},$$

die die Auslenkung der Feder (in cm) in Abhängigkeit von der Masse (in 100g) beschreibt.

(b) Bewerten Sie mit Hilfe einer geeigneten mathematischen Größe die Güte des linearen Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalen „Auslenkung der Feder (in cm)“ und „Masse (in 100g)“.

(a) Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_c(x) = \begin{cases} 2c \cdot x \cdot e^{-(cx)^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{sonst} . \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Menge aller Konstanten c, für die f_c eine Dichtefunktion ist.

Im Folgenden sei die Konstante $\underline{c = 1}$ gegeben und f_1 die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

(iii) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ mit

$$P(X \leq a) = \frac{1}{2}.$$

(iv) Bestimmen Sie für $t < 1$ den Erwartungswert $E(e^{tX^2})$.

(b) Zwei faire Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Hierbei trägt der erste Würfel die Ziffern $1, \ldots, 6$, bei dem zweiten Würfel sind jeweils zwei Seiten mit den Zahlen 2 bzw. 4 und jeweils eine Seite mit den Zahlen 3 bzw. 5 bedruckt.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für dieses Zufallsexperiment an.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Summe der Augenzahlen beider Würfel.

X und Y seien zwei diskrete, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X \sim bin(2, \frac{1}{2})$ und $Y \sim bin(1, \frac{1}{2})$. Gegeben sei die folgende Wahrscheinlichkeitstabelle des diskreten Zufallsvektors (X,Y) mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ für $i \in \{0, 1, 2\}$ und $j \in \{0, 1\}$.

$Y = j$ \ $X = i$	0	1	2	$P(Y = j)$
0				
1				
$P(X = i)$				

(a) Vervollständigen Sie obige Wahrscheinlichkeitstabelle durch Berechnung der fehlenden Wahrscheinlichkeiten. Erläutern Sie ihre Vorgehensweise (zumindest exemplarisch).

(b) Berechnen Sie $Cov(X^2, 3Y)$.

(c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Z < 2|X = 1)$ und $P(X = 1|Z < 2)$ für $Z = X + Y$.

(d) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion von $Z = X + Y$ und mit Hilfe dieser die Momente $E(Z^k)$ für $k = 1, 2$.

(a) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit (unbekanntem) Parameter $\vartheta > 0$. Die zugehörige Verteilungsfunktion F_ϑ der Zufallsvariablen X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei in Abhängigkeit vom Parameter ϑ gegeben durch

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\vartheta}} & , \quad x > 0 \ , \\ 0 & , \quad x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $\vartheta > 0$. Betrachten Sie dazu eine gegebene Stichprobe $x_1, \dots, x_n > 0$.

(b) Eine Anlage fertigt CPUs an, die produktionsbedingt Fehler enthalten können. Über einen Zeitraum von einem Dreivierteljahr wird jeden Monat die Anzahl der reklamierten CPUs festgehalten. Hierbei wird festgestellt, dass im Mittel $\bar{x} = 400$ CPUs als defekt reklamiert werden. Für die erhobenen Reklamationszahlen gilt weiterhin $\overline{x^2} = 240000$. Aus Erfahrung ist bekannt, dass diese Reklamationszahlen als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $N(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ angesehen werden können. Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.9 bei unbekannter Varianz σ^2 an.