Musterlösung 9.Übung

Aufgabe 34

Da $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ hat X die Dichte $\phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F^{x^2}(y) &= P(x^2 \le y) = P(\,-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\,) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\sqrt{y}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz \\
&\underline{\text{Subst:}}\ \ u = z^2, \quad du = 2\sqrt{u}\,dz \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^y e^{-\frac{u}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}\,du
\end{aligned}$$

Also hat x^2 nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Dichte

$$f^{x^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Die Verteilung wird als χ_1^2 - Verteilung bezeichnet.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^\infty u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}}\,du \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (\ u^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \cdot (-2)\ |_0^\infty\ )}_{=0} - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \cdot (-2)\,du \\
&= \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}}\,du}_{=\,1,\ da\ Integrand\ Verteilungsdichte\ ist\ (s.o)} = 1
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$F^{e^x}(y) \;=\; P(e^x \leq y) \;=\; P(x \leq log\ y) \;=\; \int_{-\infty}^{log\ y} \phi(z)\ dz$$

Subst: $u = e^z, \quad du = udz$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{u} \cdot exp\{ \frac{log^2 u}{2} \}\ du$$

Also hat e^x die Dichte $f^{e^x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{u} \cdot exp\{ \frac{log^2 u}{2} \} \cdot I_{(0,\infty)}(u)$

Die Verteilung wird aks Standard - Lognormal - Verteilung bezeichnet.

Es gilt:

$$Ee^x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} u \cdot \frac{1}{u} \cdot exp\{ -\frac{1}{2}\ log^2 i \}\ du$$

Subst: $z = logu, \quad du = udz$

$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z-1)^2}\ dz}_{=1,\ da\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}(z-1)^2}\ Dichte\ der\ \mathcal{N}(1,1)\ -\ Verteilung\ ist} \qquad = e^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 35

(a) Da $f^{(X,Y)}$ Dichte ist, gilt (10.6) :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)\ dy\ dx$$

Berechne:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)\ dy\ dx = c\cdot\int_0^2\int_0^2 x + 2xy\ dy\ dx$$

$$= c\cdot\int_0^2 x\cdot\int_0^2 (1+2y)\ dy\ dx = c\cdot\int_0^2 x\cdot [\ y+y^2\ ]_2^0\ dx$$

$$= c\cdot\int_0^2 x\cdot 6\ dx = 12c \quad\Rightarrow\ c = \frac{1}{12}$$

(b) Nach (10.17) gilt allgemein für die Randdichte:

$$f^{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,...,x_{i-1},x,x_{i+1},...,x_n)\ dx_n...dx_{i+1}dx_{i-1}...dx_1$$

(i-te Stelle fest)

Hier gilt also:

$$f^X(x) = \int_0^2 f^{(X,Y)}(x,y)\ dy = \frac{1}{12}\cdot 6x = \frac{x}{2} \qquad \text{für } x\in [0,2]$$

$$f^X(x) = 0 \qquad \text{für } x\notin [0,2]$$

$$f^X(y) = \int_0^2 f^{(X,Y)}(x,y)\ dx = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(1+2y)\ |_0^2$$

$$= \tfrac{1}{6}(1+2y) \qquad \text{für } y\in [0,2]$$

$$f^X(y) = 0 \qquad \text{für } y\notin [0,2]$$

(c) X, Y stochastisch unabhängig $\overset{Bem}{\Leftrightarrow}$ $F^{(X,Y)}(x,y) \; = \; F^X(x) \cdot F^Y(y)$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f^{(X,Y)}(u,v) \; du \; dv \; = \; \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f^X(u) f^Y(v) \; du \; dv$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt (siehe (b)) für alle $x, y \in \mathbf{R}$, also sind X und Y stochastisch unabhängig.

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned} EY \; &= \; \int_0^2 y \cdot f^Y(y) \; dy \; = \; \frac{1}{6} \cdot \int_0^2 y + 2y^2 \; dy \\ &= \; \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3} y^3 \;\Big|_0^2 \;\right) \; = \; \frac{11}{9} \end{aligned}$$

$$EY^2 \; = \; \int_0^2 y^2 \cdot f^Y(y) \; dy \; = \; \frac{16}{9}$$

Damit gilt:

$$VarY \; = \; EY^2 - E^2 Y \; = \; \frac{16}{9} - \frac{121}{81} \; = \; \frac{23}{81}$$