Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Lösung A 18, 20,21,24

Aufgabe 18

Betrachte folgende Ereignisse: (Wir verzichten hier auf Angabe des Wahrscheinlichkeitsraums.)
$U \hat{=}$ „ Stromfluss unterbrochen“,
$A_i \hat{=}$ „ Schaltstelle i fällt aus“, $i = 1, \ldots, 7$.
Aus der Schaltskizze erhalten wir:

$$U = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup [((A_4 \cap A_5) \cup A_6) \cap A_7].$$

Unter Verwendung der Siebformel ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$)) folgt:

$$\begin{aligned} P(U) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A3) + P([(A_4 \cap A_5) \cup A_6] \cap A_7) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap [(A_4 \cap A_5) \cup A_6] \cap A_7). \end{aligned}$$

Nun ist allgemein $A \cup B = (A \cap B^c) + B$, also gilt:

$$\begin{aligned} [(A_4 \cap A_5) \cup A_6] \cap B &= [(A_4 \cap A_5 \cap A_6^c) + A_6] \cap B \\ &= (A_4 \cap A_5 \cap A_6^c \cap B) + (A_6 \cap B) \end{aligned}$$

für jedes $B \subseteq \Omega$.
Wegen der Unabhängigkeit folgt nun:

$$\begin{aligned} P(U) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_4 \cap A_5 \cap A_6^c \cap A_7) + P(A_6 \cap A_7) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6^c) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_6) \\ &\overset{Vor.}{=} p^3 + p^3(1-p) + p^2 - p^6(1-p) - p^5 \\ &= p^2(1 + 2p - p^2 - p^3 - p^4 + p^5). \end{aligned}$$

Aufgabe 20

(a) Da $\emptyset$ keine Elemente enthält existiert *kein* $\omega \in \Omega$, mit $T(\omega) \in \emptyset$.
$\Rightarrow T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
Da $T(\omega) \in \Omega'$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt $T^{-1}(\Omega') = \Omega$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \omega \in T^{-1}(A' \backslash B') &\Leftrightarrow T(\omega) \in A' \wedge T(\omega) \notin B', \\ &\Leftrightarrow \omega \in T^{-1}(A') \wedge \omega \notin T^{-1}(B'), \\ &\Leftrightarrow \omega \in T^{-1}(A') \backslash T^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Also $T^{-1}(A' \backslash B') = T^{-1}(A') \backslash T^{-1}(B')$.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \in T^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i') &\Leftrightarrow T(\omega) \in \bigcap_{i\in I} A_i', \\
&\Leftrightarrow T(\omega) \in A_i' \quad \forall i \in I, \\
&\Leftrightarrow \omega \in T^{-1}(A_i') \quad \forall i \in I, \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i\in I} T^{-1}(A_i').
\end{aligned}$$

Also $T^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} A_i') = \bigcap\limits_{i\in I} T^{-1}(A_i')$.

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \in T^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i') &\Leftrightarrow T(\omega) \in \bigcup_{i\in I} A_i', \\
&\Leftrightarrow \exists \;\; i_0 \in I \text{ mit } T(\omega) \in A_{i_0}', \\
&\Leftrightarrow \exists \;\; i_0 \in I \text{ mit } \omega \in T^{-1}(A_{i_0}'), \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{i\in I} T^{-1}(A_i').
\end{aligned}$$

Also $T^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} A_i') = \bigcup\limits_{i\in I} T^{-1}(A_i')$.

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \in T^{-1}(A') &\Rightarrow T(\omega) \in A', \\
&\Rightarrow T(\omega) \in B' \quad \text{,da } A' \subset B', \\
&\Rightarrow \omega \in T^{-1}(B').
\end{aligned}$$

Also folgt aus $A' \subset B'$ auch $T^{-1}(A') \subset T^{-1}(B')$.

(f) Es sei $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{\Omega}$ beliebig. Es ist zu zeigen:

$$(S \circ T)^{-1}(\widetilde{A}) = T^{-1}(S^{-1}(\widetilde{A})).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \in (S \circ T)^{-1}(\widetilde{A}) &\Leftrightarrow (S \circ T)(\omega) \in \widetilde{A}, \\
&\Leftrightarrow S(T(\omega)) \in \widetilde{A}, \\
&\Leftrightarrow T(\omega) \in S^{-1}(\widetilde{A}), \\
&\Leftrightarrow \omega \in T^{-1}(S^{-1}(\widetilde{A})).
\end{aligned}$$

Also gilt $(S \circ T)^{-1}(\widetilde{A}) = T^{-1}(S^{-1}(\widetilde{A}))$.

Aufgabe 21

Zeige die Eigenschaften $(i)-(iii)$ aus der Definition(1.6) der σ-Algebra für die Menge $T^{-1}(\mathfrak{A}')$.

(i) $\Omega \in T^{-1}(\mathfrak{A}')$, da nach A20(a) $T^{-1}(\Omega') = \Omega$ und $\Omega' \in \mathfrak{A}'$ gelten. (Beachte: $\mathfrak{A}'$ ist eine σ-Algebra.)

(ii) Es sei $A \in T^{-1}(\mathfrak{A}')$.
Dann gibt es ein $A' \in \Omega'$ mnit $A = T^{-1}(A')$.
Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra ist, ist auch $A'^c \in \mathfrak{A}'$, also folgt:

$$T^{-1}(A'^c) = T^{-1}(\Omega' \backslash A') \overset{A20b)}{=} T^{-1}(\Omega') \backslash T^{-1}(A') \overset{A20a)}{=} \Omega \backslash T^{-1}(A') = T^{-1}(A')^c = A^c,$$

und somit $A^c \in T^{-1}(\mathfrak{A}')$.

(iii) Es sei $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq T^{-1}(\mathfrak{A}')$, dann gibt es $\{A'_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathfrak{A}'$ mit $A_n = T^{-1}(A'_n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Es folgt;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n) \overset{A20d)}{=} T^{-1}(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n}_{\in \mathfrak{A}'}) \in T^{-1}(\mathfrak{A}').$$

Aus den Eigenschaften $(i)-(iii)$ folgt, dass $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 24

Seien X_1, X_2 stoch. unabh., $X_i \sim \mathfrak{b}(n_i, p),\ i = 1, 2$.
Zu zeigen: $X_1 + X_2 \sim \mathfrak{b}(n_1 + n_2, p)$.
(Vorlesung (6.22): $n_1 = n_2 = 1$).
Sei $k \in \{0, 1, ..., n_1 + n_2\}$ und sei o.B.d.A. $n_1 \leq n_2$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = k) &\overset{(6.21)}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \underbrace{P(X_1 = j)}_{\text{wobei } j \leq n_1} \cdot \underbrace{P(X_2 = k - j)}_{\text{wobei } 0 \leq k-j \leq n_2} \\
&= \sum_{j=\max\{0,k-n_2\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{j} p^j\ (1-p)^{n_1-j} \binom{n_2}{k-j} p^{k-j}\ (1-p)^{n_2-(k-j)} \\
&= p^k\ (1-p)^{n_1+n_2-k} \underbrace{\sum_{j=\max\{0,k-n_2\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}}_{=:a}
\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

i) Für $k \leq n_1$: $a = \sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} \overset{*}{=} \binom{n_1+n_2}{k}$ (* mit erstem Hinweis).

ii) Für $n_1 < k \leq n_2$: $a = \sum_{j=0}^{n_1} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} \overset{*}{=} \binom{n_1+n_2}{k}$

(* mit zweitem Hinweis: $n = n_1,\ x = k,\ n_2 = x+y-n = k+y-n_1 \Longrightarrow y = n_1+n_2-k$).

iii) Für $k > n_2:\ \ a = \sum_{j=k-n_2}^{n_1} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \sum_{j=0}^{n_1+n_2-k} \underbrace{\binom{n_1}{j+k-n_2}}_{\binom{n_1}{n_1+n_2-k-j}} \underbrace{\binom{n_2}{k-j-k+n_2}}_{\binom{n_2}{j}}$

$\stackrel{*}{=} \binom{n_1+n_2}{n_1+n_2-k} = \binom{n_1+n_2}{k}$

(* mit erstem Hinweis: $n = n_1+n_2-k,\ x = n_2,\ y = n_1$).

Man beachte, daß die obige Aufteilung erforderlich ist; sonst:

$$
\begin{aligned}
(X_1+X_2=k) \ &\stackrel{\text{f}}{=}\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \binom{n_1}{j}\ p^j\ (1-p)^{n_1-j}\ \binom{n_2}{k-j}\ p^{k-j}\ (1-p)^{n_2-(k-j)} \\
&=\ p^k\ (1-p)^{n_1+n_2-k}\ \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}}_{\binom{n_1+n_2}{k}}.
\end{aligned}
$$

Die Zähldichte ist so auf $\mathbb{Z}$ <u>nicht</u> definiert!