Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Musterlösung Aufgabe 8

Aufgabe 8

Zeige mittels Rückwärtsinduktion:

Für beliebiges $j \in \{1, \ldots, k\}$ und beliebige fest gewählte $\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}$ mit $\omega_1 \in M_1, \omega_2 \in M(\omega_1), \ldots, \omega_{j-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-2})$ gilt:

$$|\{(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_j, \ldots, \omega_k) \mid \omega_j \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}), \ldots, \omega_k \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}| = \prod_{i=j}^{k} m_i.$$

(Für $j = 1$ gilt dann die Behauptung aus der Aufgabenstellung.)

<u>Induktionsanfang</u>: $j = k$
Es seien $\omega_1 \in M_1, \ldots, \omega_{k-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-2})$ fest gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\{(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k) \mid \omega_k \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}| &\overset{Bijektion}{=} |M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})| \\
&= m_k \quad \text{(unabhängig von } \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}.\text{)}
\end{aligned}$$

<u>Induktionsschluss</u>: Die Aussage gelte für ein $j \in \{2, \ldots, k\}$. Es ist zu zeigen, das sie dann auch für $j-1$ gilt.
Für beliebige fest gewählte $\omega_1 \in M_1, \ldots, \omega_{j-2} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-3})$ gilt:

$$\begin{aligned}
&|\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid \omega_{j-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-2}), \ldots, \omega_k \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}| \\
&= |\sum_{\omega_{j-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-2})} \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid \omega_j \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}), \ldots, \omega_k \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}| \\
&\overset{disjunkt}{=} \sum_{\omega_{j-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-2})} |\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid \omega_j \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}), \ldots, \omega_k \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}| \\
&\overset{I.V.}{=} \sum_{\omega_{j-1} \in M(\omega_1, \ldots, \omega_{j-2})} \prod_{i=j}^{k} m_i \\
&= m_{j-1} \cdot \prod_{i=j}^{k} m_i \\
&= \prod_{i=j-1.}^{k} m_i.
\end{aligned}$$