Musterlösung 4.Übung

Aufgabe 11

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \frac{3}{10} + \frac{7}{20} - \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$

b) $P(A^C \cup C) = P(A^C) + P(C) - P(A^C \cap C)$
$= 1 - P(A) + 1 - P(C^C) - P(A^C \cap C)$
$= 1 - \frac{3}{10} + 1 - \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) $P(A \cap C) = P(C) - P(A^C \cap C)$
$= 1 - P(C^C) - P(A^C \cap C)$
$= 1 - \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

d) $P(A \cap B^C \cap C) = 0$

e) $P(B \cap C) = \frac{3}{20}$

f) $P(A \cup B \cup C) = \frac{7}{10}$

Aufgabe 13

Grundraum für das Ziehen von einem Buch:

$$\Omega := \{(i,j) \mid i \in \{1,2,3\}, j \in \{k,l,m\}\}$$
i: Verlage, j: Anzahl Fehler

Es lassen sich folgende Ereignisse formulieren:

$V_i := \{(i,j) \mid j \in \{k,l,m\}\} \mathrel{\hat{=}}$ „Buch von Verlag i“, $i \in \{1,2,3\}$

$K := \{(i,k) \mid i \in \{1,2,3\}\} \mathrel{\hat{=}}$ „Buch enthält keinen Druckfehler“

$E := \{(i,e) \mid i \in \{1,2,3\}\} \mathrel{\hat{=}}$ „Buch enthält einen Druckfehler“

$M := \{(i,m) \mid i \in \{1,2,3\}\} \mathrel{\hat{=}}$ „Buch enthält mehr als einen Druckfehler“

Es sind bekannt:

(*) $\hat{=}$ in Aufgabenstellung gegeben

$$P(K|V_1) = 1 - 0,12 - 0,4 = 0,48$$
$$P(E|V_1) = 0,4 \quad (*)$$
$$P(M|V_1) = 0,12 \quad (*)$$

$$P(K|V_2) = 0,7 \ (*)$$
$$P(E|V_2) = 0,15 \quad (*)$$
$$P(M|V_2) = 0,15$$

$$P(K|V_3) = 0,75 \ (*)$$
$$P(E|V_3) = 0,15 \quad (*)$$
$$P(M|V_3) = 0,1$$

Außerdem:

$$P(V_1) = \tfrac{230}{1380} = \tfrac{1}{6}, \quad P(V_2) = \tfrac{690}{1380} = \tfrac{1}{2}, \quad P(V_3) = \tfrac{460}{1380} = \tfrac{1}{3}$$

a) $P(K) = \sum_{i=1}^{3} P(K|V_i) \cdot P(V_i)$
$\quad = 0,48 \cdot \frac{1}{6} + 0,70 \cdot \frac{1}{2} + 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 0,68$

b) Wir kennen $P(E|V_2)$, wir suchen $P(V_2|E)$.
Verwende *Lemma (4.4)(i)* :

$$\begin{aligned} P(V_2|E) &= P(E|V_2) \cdot \frac{P(V_2)}{P(E)} \\ &= P(E|V_2) \cdot \frac{P(V_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|V_i) \cdot P(V_i)} \\ &= 0,15 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{0,4 \cdot \frac{1}{6} + 0,15 \cdot \frac{1}{2} + 0,15 \cdot \frac{1}{3}} \approx 0,39 \end{aligned}$$

Aufgabe 15

Wegen $A \cap B_i \subseteq A$ für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$0 < P(A \cap B_i) \leq P(A)$$

Weiterhin:

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} (A \cap B \cap B_i) \quad (*)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{P(A)} \cdot P\left(\sum_{i=1}^{n} (A \cap B \cap B_i)\right) \\
&= \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B \cap B_i) \\
&= \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(B|A \cap B_i) \cdot P(A \cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B|A \cap B_i) \cdot \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B|A \cap B_i) \cdot P(B_i|A)
\end{aligned}$$

Aufgabe 16

geeignete Wahrscheinlichkeitsräume (wegen Unabhängigkeit) :

2-mot: $\Omega_1 := \{(\underbrace{\omega_1, \omega_2}_{\uparrow \text{ 1.Motor,2.Motor}}) \mid \omega_i \in \underbrace{\{0, 1\}}_{\uparrow \text{ intakt,defekt}}, i = 1, 2\}$

$$P_1(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = p^{\omega_1+\omega_2} \cdot (1-p)^{2-(\omega_1+\omega_2)}$$

4-mot: $\Omega_2 := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, .., 4\}$

$$P_2(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)\}) = p^{\sum_{i=1}^{4} \omega_i} \cdot (1-p)^{4-\sum_{i=1}^{4} \omega_i}$$

Berechne Absturzwahrscheinlichkeit :

(i) 2-motorige Maschine:

$$A^{(2)} := (1,1) \;\hat{=}\; \text{„2-motoriges Flugzeug stürzt ab“}$$

$$P(A^{(2)}) = p^2 \cdot (1-p)^0 = p^2$$

(ii) 4-motorige Maschine:

$$\begin{aligned} A^{(4)} := (1,1,1,1) \;&\hat{=}\; \text{„4-motoriges Flugzeug stürzt ab“} \\ &\hat{=}\; \text{„genau 3 oder 4 Motoren fallen aus“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^{(4)}) &= \tbinom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^1 + \tbinom{4}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^0 \\ &= 4 \cdot p^3 \cdot (1-p) + p^4 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} P(A^{(4)}) \leq P(A^{(2)}) \quad &\Leftrightarrow \quad p^2 \cdot (4p \cdot (1-p) + p^2) \leq p^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4p \cdot (1-p) + p^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p^2 - \tfrac{4}{3}p + \tfrac{1}{3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (p - \tfrac{1}{3}) \cdot (p-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p \leq \tfrac{1}{3} \;\vee\; p \geq 1 \end{aligned}$$

Wegen $p \in [0,1)$ nach Vorraussetzung gilt:

Für $p \in (0, \frac{1}{3}]$ sind 4-motorige Flugzeuge sicher.