Musterlösung 1.Übung

Aufgabe 1

d) i) $\Omega \in \mathfrak{A}$, wegen $\Omega^C = \emptyset$

ii) $A \in \mathfrak{A}$, also A abzählbar oder A^C abzählbar

$\Leftrightarrow A^C$ abzählbar oder A abzählbar

$\Leftrightarrow A^C \in \mathfrak{A}$

iii) Betrachte $A_n \in \mathfrak{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>1.Fall:</u> A_n abzählbar $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar

<u>2.Fall:</u> $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit A_{n_0} nicht abzählbar, dann ${A_{n_0}}^C$ abzählbar

und $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {A_n}^C \subseteq {\mathfrak{A}_{n_0}}^C$ abzählbar

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$

Aufgabe 2

a) $\mathfrak{A}_\cap$: (i) $\Omega \in \mathfrak{A}_\cap$, da $\Omega \in \mathfrak{A}_i \quad \forall i \in I$

(ii) Sei $A \in \mathfrak{A}_\cap$. Es gilt:

$\forall i \in I : A \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow \forall i \in I : A^C \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}_\cap$

(iii) $A_j \in \mathfrak{A}_\cap \;\; \forall j \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$\forall i \in I, \forall j \in \mathbb{N} : A_j \in \mathfrak{A}_i$

$\forall i \in I \; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_j \in \mathfrak{A}_i$

Aus (i)-(iii) folgt: $\mathfrak{A}_\cap$ ist σ - Algebra.

b) Betrachte $\mathfrak{A}_\cup$

mit $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathfrak{A}_1 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}$

$\mathfrak{A}_2 := \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$ $\quad \sigma$ - Algebren (vgl.A1b)

Die Vereinigung

$$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}$$

ist <u>KEINE</u> σ - Algebra:

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$$

Aufgabe 3

a) $\Omega := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{1, ..., 6\}, i \in \{1, 2, 3\}\}$
$\quad = \{\{1, .., 6\}^3\},\ |\Omega| \ = 6^3$

$\mathfrak{A} := \mathfrak{Pot}(\Omega)$
$P(\{\omega\}) := \frac{1}{6^3} \ \ \forall \omega \in \Omega$

Menge A für „es fällt ein Dreierpasch“ :
$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$
$\quad = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

$|A| = 6$

Menge B für „es fallen mindestens zwei Einsen“ :
$B = \big\{(\omega_1, 1, 1), (1, \omega_2, 1), (1, 1, \omega_3) \mid \omega_i \in \{2, .., 6\}, i = \{1, 2, 3\}\big\} \cup \{(1, 1, 1)\}$

$|B| = 16$

Menge C für „Augensumme gleich 5“ :
$C = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 5\}$
$\quad = (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$

$|C| = 6$

Menge D für „es fällt genau eine Drei“ :
$D = \big\{(\omega_1, \omega_2, 3), (\omega_1, 3, \omega_3), (3, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_i \in \{1, .., 6\} \setminus \{3\}, i \in \{1, 2, 3\}\big\}$

$|D| = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$

b) Modellierung mit Laplace-Raum $(\Omega, \mathfrak{Pot}(\Omega), P)$, dh.

$P(\{\omega\}) = \frac{1}{6^3} \ \ \omega \in \Omega$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}, \ \ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{16}{6^3} = \frac{1}{36} = \frac{2}{27}$
$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}, \ \ P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{75}{6^3} = \frac{25}{72}$

$B \cap D = \{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)\}$
$|B \cap D| = 3, \ \ P(B \cap D) = \frac{|B \cap D|}{|\Omega|} = \frac{1}{72}$

$C \cap D = B \cap D$
$|C \cap D| = |B \cap D| = 3, \ \ P(C \cap D) = \frac{|C \cap D|}{|\Omega|} = \frac{1}{72}$

$A \cap C = \emptyset$
$|A \cap C| = 0, \ \ P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = 0$

$A \cup B = \big\{(\omega_1, 1, 1), (1, \omega_2, 1), (1, 1, \omega_3) \mid \omega_i \in \{2, .., 6\}, i \in \{1, 2, 3\}\big\}$
$\qquad \cup \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 21, \ \ P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{7}{72}$

Aufgabe 4

Betrachte $\Omega = \{1, .., 6\},\ A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1, 4\}$

Es ergeben sich:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, A \cap B = \{2\}, A \cap C = \{4\}$$

Es sei $p : \Omega \to [0, 1]$ Zähldichte (gesucht),
dann gilt:

$$p(2) = P(\{2\}) = P(A \cap B) = \tfrac{1}{6}$$
$$p(4) = P(\{4\}) = P(A \cap C) = \tfrac{1}{3}$$

Ferner $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(2) + P(4) + P(6)$,
also ist $p(6) = P(A) - P(2) - P(4)$
$= \frac{5}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$

Es gilt $P(C) = P(1) + P(4)$, also
$p(1) = P(C) - P(4) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
$p(3) = \frac{1}{4}, p(5) = \frac{1}{24}$