Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Lösung Aufg. 12, 14, 17

Aufgabe 12

(i) Es ist $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$ definiert.

Zu zeigen: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m \overset{!}{=} \{\omega\in\Omega \mid \omega$ liegt in unendlich vielen der $A_n\}$

$(= \{\omega\in\Omega \mid \forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, m_0\geq n \text{ mit } \omega\in A_{m_0}\})$.

" $\subseteq$ " : Es sei $\hat\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, d.h. $\hat\omega\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, m_0\geq n$ mit $\hat\omega\in A_{m_0}$,

also $\hat\omega\in\{\omega\in\Omega \mid \forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, m_0\geq n \text{ mit } \omega\in A_{m_0}\}$.

" $\supseteq$ " : Es sei $\hat\omega\in\{\omega\in\Omega \mid \omega$ liegt in unendlich vielen der $A_n\}$,

d.h. $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, m_0\geq n$ mit $\hat\omega\in A_{m_0}$.

$\Longrightarrow \hat\omega\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m\ \forall\, n\in\mathbb{N} \Longrightarrow \hat\omega\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

(ii) Es ist $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$ definiert.

Zu zeigen: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega\in\Omega \mid \omega$ liegt in allen außer endlich vielen der $A_n\}$

$(= \{\omega\in\Omega \mid \exists\, n_0\in\mathbb{N} \text{ mit } \omega\in A_m\ \forall\, m\geq n_0\})$.

" $\subseteq$ " : Es sei $\hat\omega\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, d.h. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ mit $\hat\omega\in\bigcap\limits_{m=n_0}^{\infty} A_m$.

$\Longrightarrow \hat\omega\in A_m\ \forall\, m\geq n_0$,

also $\hat\omega\in\{\omega\in\Omega \mid \exists\, n_0\in\mathbb{N} \text{ mit } \omega\in A_m\ \forall\, m\geq n_0\}$.

" $\supseteq$ " : Es sei $\hat\omega\in\{\omega\in\Omega \mid \omega$ liegt in allen außer endlich vielen der $A_n\}$,

d.h. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ mit $\hat\omega\in A_m\ \forall\, m\geq n_0$.

$\Longrightarrow \hat\omega\in\bigcap\limits_{m=n_0}^{\infty} A_m \Longrightarrow \hat\omega\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

Aufgabe 14

Gebe der Form halber den Wahrscheinlichkeitsraum an:

$\Omega := \{(u,\omega_1,...,\omega_{m+1}) \mid u\in\{0,...,N\},\ \omega_i\in\{0,1\},\ i\in\{1,...,m+1\}\}$, wobei $0 \mathrel{\hat{=}}$ weiß und $1 \mathrel{\hat{=}}$ schwarz.

$P(\{(u,\omega_1,...,\omega_{m+1})\}) := \frac{1}{N+1}\cdot\prod\limits_{j=1}^{m+1}(\frac{u}{N})^{\omega_j}\cdot(1-\frac{u}{N})^{1-\omega_j}\quad\forall\,\omega\in\Omega.$

a) Betrachte:

$A := \{(u, \omega_1, ..., \omega_{m+1}) \in \Omega \mid \omega_1 = ... = \omega_m = 1\}$ $\hat{=}$ „m-mal schwarz bei den ersten m Ziehungen“,

$B := \{(u, \omega_1, ..., \omega_{m+1}) \in \Omega \mid \omega_{m+1} = 1\}$ $\hat{=}$ „schwarz im $(m+1)$-ten Zug“,

$H_i := \{(u, \omega_1, ..., \omega_{m+1}) \in \Omega \mid u = i\}, \quad i \in \{0, ..., N\}$ $\hat{=}$ „Wahl der Urne i“.

Gesucht: $P(B \mid A)$.

Zunächst Berechnung von $P(A \cap B)$.

Es ist: $P(H_i) = \frac{1}{N+1}, \ i \in \{0, ..., N\}$ und $P(A \cap B \mid H_i) = (\frac{i}{N})^{m+1}$ (siehe Def. von P).

Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = \sum_{i=0}^{N} P(A \cap B \mid H_i) \cdot P(H_i) = \sum_{i=0}^{N} (\frac{i}{N})^{m+1} \cdot \frac{1}{N+1}.$$

Analog:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{N} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) = \sum_{i=0}^{N} (\frac{i}{N})^{m} \cdot \frac{1}{N+1}.$$

Damit:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{N})^{m+1} \cdot \sum\limits_{i=0}^{N} i^{m+1} \cdot \frac{1}{N+1}}{(\frac{1}{N})^{m} \cdot \sum\limits_{i=0}^{N} i^{m} \cdot \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} i^{m+1}}{\sum\limits_{i=1}^{N} i^{m}} = p_N^*.$$

b) Es gilt (da x^m streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$):

$$\frac{N^{m+1}}{m+1} = \int_0^N x^m \, dx < \sum_{i=0}^{N} i^m < \int_0^{N+1} x^m \, dx = \frac{(N+1)^{m+1}}{m+1}.$$

Also:

$$\frac{\frac{N^{m+1}}{m+2}}{\frac{(N+1)^{m+1}}{m+1}} < \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} i^{m+1}}{\sum\limits_{i=1}^{N} i^{m}} < \frac{\frac{(N+1)^{m+2}}{m+2}}{\frac{N^{m+2}}{m+1}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m+1}{m+2} \cdot (\frac{N}{N+1})^{m+1} < p_N^* < \frac{m+1}{m+2} \cdot (\frac{N+1}{N})^{m+2}.$$

Für $N \to \infty$ gilt also: $p_N^* \to \frac{m+1}{m+2}$.

Aufgabe 17

Wir betrachten den Laplace-Raum

$$\Omega := \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

mit

$$P(\omega) := \frac{1}{36} \quad \forall \, \omega \in \Omega.$$

(a) Es sei

$$A_k := \{(k,\omega_2)\,|\,\omega_2 \in \{1,\ldots,6\}\} \mathrel{\widehat{=}} \text{„Erster Wurf ist gleich } k\text{“} \quad \forall\, k \in \{1,\ldots,6\}.$$

Dann gilt:

$$P(A_k) = \frac{1}{6} \quad \forall\, k \in \{1,\ldots,6\}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} S &:= \{(1,2)(2,1)(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)(3,6)(4,5)(5,4)(6,3)(6,6)\} \\ &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Summe ist durch drei teilbar“} \end{aligned}$$

mit

$$P(S) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap S) &= P(\{(1,2)(1,5)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_1)P(S), \\ P(A_2 \cap S) &= P(\{(2,1)(2,4)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_2)P(S), \\ P(A_3 \cap S) &= P(\{(3,3)(3,6)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_3)P(S), \\ P(A_4 \cap S) &= P(\{(4,2)(4,5)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_4)P(S), \\ P(A_5 \cap S) &= P(\{(5,1)(5,4)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_5)P(S), \\ P(A_6 \cap S) &= P(\{(6,3)(6,6)\}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3} = P(A_6)P(S). \end{aligned}$$

Also sind A_k und S stochastisch unabhängig für alle $k \in \{1,\ldots,6\}$.

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} T &:= \{(1,3)(1,6)(2,3)(2,6)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ &\qquad (4,3)(4,6)(5,3)(5,6)(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\} \\ &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Produkt ist durch drei teilbar“} \end{aligned}$$

mit

$$P(T) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap T) &= P(\{(1,3),(1,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{18} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_1)\cdot P(T), \\ P(A_2 \cap T) &= P(\{(2,3),(2,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{18} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_2)\cdot P(T), \\ P(A_3 \cap T) &= P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{6} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_3)\cdot P(T), \\ P(A_4 \cap T) &= P(\{(4,3),(4,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{18} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_4)\cdot P(T), \\ P(A_5 \cap T) &= P(\{(5,3),(5,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{18} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_5)\cdot P(T), \\ P(A_6 \cap T) &= P(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}) \\ &= \tfrac{1}{6} \neq \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{9} = P(A_6)\cdot P(T). \end{aligned}$$

Also sind A_k und T für kein $k \in \{1,\ldots,6\}$ stochastisch unabhängig.