Musterlösung 5.Übung

Aufgabe 19

Modelliere folgende Zufallsverteilungen zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ auf $\{0,1\}$:

$$S_i,\, i = 1,2 \quad \text{und} \quad K_j, \tilde{K_j}, \quad j = 1,..,n$$

Es soll gelten:

$$\begin{aligned}
\{S_i = 1\} &\ \hat{=}\ \text{„System } S_i \text{ funktioniert“, } i = 1,2 \\
\{K_i = 1\} &\ \hat{=}\ \text{„Komponente } K_i \text{ ist intakt“, } i = 1,..,n \\
\{\tilde{K_i} = 1\} &\ \hat{=}\ \text{„Komponente } \tilde{K_i} \text{ ist intakt“, } i = 1,..,n
\end{aligned}$$

Wir wissen: $P(K_i = 0) = P(\tilde{K_i} = 0) = p,\ i = 1,..,n$

Den Schaltskizzen entnimmt man:

$$\begin{aligned}
P(S_1 = 1) = P\Big(&(\{K_1 = 1\} \cup \{\tilde{K_1} = 1\}) \cap (\{K_2 = 1\} \cup \{\tilde{K_2} = 1\}) \cap ... \cap \\
&(\{K_n = 1\} \cup \{\tilde{K_n} = 1\})\Big) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(\{K_i = 1\} \cup \{\tilde{K_i} = 1\})
\end{aligned}$$

(disjunkte Mengen erzeugen)

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} (P(K_i = 1) + P(\tilde{K_i} = 1) - P(K_i = 1, \tilde{K_i} = 1)) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} (1-p) + (1-p) - (1-p)^2 \\
&= (1-p^2)^n
\end{aligned}$$

$$P(S_2 = 1) = P((\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\}) \cup (\bigcap_{i=1}^{n} \{\tilde{K_i} = 1\}))$$

(disjunkte Mengen erzeugen)

$$\begin{aligned}
&= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\}) + P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\tilde{K_i} = 1\}) \\
&\qquad - P(\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\} \cap \{\tilde{K_i} = 1\}) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} (1-p)^n + (1-p)^n - (1-p)^{2n} \\
&= (1-p)^n \cdot (2 - (1-p)^n)
\end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned}
P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) &= ((1-p^2)^n) - ((1-p)^n \cdot (2-(1-p)^n)) \\
&= ((1-p)^n \cdot (1+p)^n) - ((1-p)^n \cdot (2-(1-p)^n)) \\
&= (1-p)^n \cdot [(1+p)^n - 2 + (1-p)^n]
\end{aligned}$$

<u>Bemerkung:</u>

$(1-p^2)^n = (1-p)^n \cdot (1+p)^n$ (3.Binomische Formel)

<u>Fall n=1 :</u>

$P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) = (1-p) \cdot [(1+p) - 2 + (1-p)] = 0$

(klar, da beide Systeme für den Fall n=1 überstimmen)

<u>Fall n>1 :</u> (aus Analysis: Ungleichung von Bernoulli)

$(1+p)^n > 1 + np, (1-p)^n > 1 - np$ für $0 < p < 1$ und $n > 1$

Damit:

$$P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) > (1-p)^n \cdot [(1+np) - 2 + (1-np)] = 0$$

<u>also:</u> Redundanz auf Komponentenebene besser als Redundanz auf Systemebene (für $n \geq 1$)

Aufgabe 22

a) Klar ist: $f(i,j) \geq 0 \quad \forall i,j \in \mathbf{N}_0$

Es bleibt zu zeigen:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i,j) = 1$$

Also:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i,j) &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p \cdot 2^{-(j+1)} \cdot (1-p)^{i-j} \\
&= p \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} \cdot \underbrace{\sum_{i=j}^{\infty} (1-p)^{i-j}}_{\substack{\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \\ \text{(geometrische Reihe)}}} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist Zähldichte.

b)

(i) $P(\{i\} \times \mathbf{N}_0) = \sum_{j=0}^{\infty} P((i,j)) = \sum_{j=0}^{\infty} f(i,j)$

$$\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{j=0}^{i} 2^{-(j+1)} \cdot p \cdot (1-p)^{i-j} \\
&= \textstyle\frac{p}{2} \cdot (1-p)^i \cdot \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{2\cdot(1-p)}\right)^j
\end{aligned}$$

(geometrische Summenformel anwenden)

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2} \cdot (1-p)^i \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2\cdot(1-p)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{1}{2\cdot(1-p)}\right)} \\
&= \frac{p}{2} \cdot (1-p)^i \cdot \frac{2 \cdot (1-p) \cdot [2^{i+1} \cdot (1-p)^{i+1} - 1]}{2^{i+1} \cdot (1-p)^{i+1} \cdot [2 \cdot (1-p) - 1]} \\
&= \frac{p \cdot (2^{i+1} \cdot (1-p)^{i+1} - 1)}{2^{i+1} \cdot (1-2p)}
\end{aligned}$$

(ii) (Ergebnis):

$P(\mathbf{N}_0 \times \{j\}) = \frac{1}{2^{j+1}}$

(iii) $P(\{(i,i) \mid i \in \mathbf{N}_0\}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i,i) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i,i)$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} \cdot (1-p)^0 \cdot p$$

$$= p \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(j+1)}}_{=1(s.o.)}$$

$$= p$$

Aufgabe 23

a) Es sei $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$X : \Omega \to \{0,..,5\} \quad \text{mit} \quad P^{X(i)} = \tfrac{1}{6}, \quad i \in \{0,..,5\}$$

Dann gilt:

$$EX = \sum_{i=0}^{5} i \cdot P(X = i) = \tfrac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^{5} i = \tfrac{15}{6} = 2,5$$

b) Betrachte nun auf $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ den Zufallsvektor

$$(x, \tilde{x}) : \Omega \to \{0,..,5\}^2 \quad \text{mit} \quad P^x(i,j) = \tfrac{1}{36}, \; i,j \in \{0,..,5\}$$

Dann ist $X_2 = min(x, \tilde{x})$ und $x_1 = max(x.\tilde{x})$.

Für die Verteilung P^{X_1} und P^{X_2} gelten dann folgende Werte:

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P(X_2 = i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X_1 = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

(durch Zählen bei Laplaceraum, z.B. $X_1 = max(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0$, genau ein mögliches Ereignis $\Rightarrow P(X_1 = 0) = \frac{1}{36}$)

und wir erhalten:

$$EX_2 = (0 \cdot \tfrac{11}{36}) + (1 \cdot \tfrac{9}{36}) + (2 \cdot \tfrac{7}{36}) + (3 \cdot \tfrac{5}{36}) + (4 \cdot \tfrac{3}{36}) + (5 \cdot \tfrac{1}{36}) = \tfrac{55}{36} \approx 1,528$$

$$EX_1 = (0 \cdot \tfrac{1}{36}) + (1 \cdot \tfrac{3}{36}) + (2 \cdot \tfrac{5}{36}) + (3 \cdot \tfrac{7}{36}) + (4 \cdot \tfrac{9}{36}) + (5 \cdot \tfrac{11}{36}) = \tfrac{125}{36} \approx 3,472$$