EidS SS'04 – Musterlösung zur 6. Übung

Aufgabe 25

(a) $X \sim b(n,p)$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \sum_{n=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\substack{\text{E'wert der } b(n-1,p)\text{-Verteilung,} \\ \text{also } = (n-1)\cdot p}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=1} \Bigg) \\
&= n \cdot p \cdot ((n-1) \cdot p + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\text{Var } X}} &= EX^2 - E^2X \\
&= n \cdot p \cdot ((n-1) \cdot p + 1) - n^2 \cdot p^2 \\
&= n \cdot p \cdot (\cancel{n \cdot p} - p + 1 - \cancel{n \cdot p}) \\
&= \underline{\underline{n \cdot p \cdot (1-p)}}
\end{aligned}$$

(b) $X \sim \text{po } (\lambda)$

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=\cancel{0}\,2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}_{=1} = \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{\underline{\text{Var } X}} &= E(X(X-1)) + EX - E^2X \\
&\overset{(7.3)}{=} \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda}}
\end{aligned}$$

(c) $X \sim \text{geom } (p)$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \cdot p \cdot (1-p)^k \\
&= p + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot (1-p)^k + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^k + \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^k \\
&= p + (1-p) \cdot (EX^2 + 2 \cdot EX + 1),
\end{aligned}$$

Umstellen und Einsetzen von $EX = \frac{1}{p}$ (VL (7.6)):

$$\begin{aligned} p \cdot EX^2 &= p + (1-p) \cdot (2 \cdot EX + 1) = p + 2 \cdot \frac{1-p}{p} + (1-p) \\ \Rightarrow EX^2 &= 1 + 2 \cdot \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\operatorname{Var} X}} &= EX^2 - E^2X \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2} \cdot (p^2 + 2 - 2 \cdot p + p - p^2 - 1) = \underline{\underline{\frac{1-p}{p^2}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 26

(a) Da $X_1, \ldots, X_{1000}$ stoch. unabhängig identisch verteilt sind, o.B.d.A. betrachte $X_1, \ldots, X_{25}$:

$$\begin{aligned} P(\text{„Gemisch enthält Virus“}) &= 1 - P(\text{„Gemisch enthält Virus nicht“}) \\ &= 1 - P(X_1 = 0, \ldots, X_{25} = 0) \\ &\overset{\text{Unabh.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{25} P(X_i = 0) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{25} (1-p) \\ &= 1 - (1-p)^{25} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{j=0}^{39} (1 + 25 \cdot \max_{i=1,\ldots,25} \{X_{25j+i}\}) \\ &= 40 + 25 \cdot \sum_{j=0}^{39} \left(1 - \prod_{i=1}^{25} (1 - X_{25j+i}) \right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} EY &= E\left(40 + 25 \cdot \sum_{j=0}^{39} (1 - \prod_{i=1}^{25} (1 - X_{25j+i})) \right) \\ &= 40 + 25 \cdot \sum_{j=0}^{39} E\left(1 - \prod_{i=1}^{25} (1 - X_{25j+i}) \right) \\ &\overset{\text{Unabh.}}{=} 40 + 25 \cdot \sum_{j=0}^{39} \left(1 - \prod_{i=1}^{25} (1 - EX_{25j+i}) \right) \\ &= 40 + 1000 \cdot (1 - (1-p)^{25}) \end{aligned}$$

Es werden durchschnittlich weniger Bluttests benötigt

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow EY < 1000 \\ &\Leftrightarrow 40 + 1000 \cdot (1 - (1-p)^{25}) < 1000 \\ &\Leftrightarrow 1000 \cdot (1-p)^{25} > 40 \\ &\Leftrightarrow (1-p)^{25} > \frac{1}{25} \\ &\Leftrightarrow p < 1 - \sqrt[25]{\frac{1}{25}} \qquad (\approx 0{,}12) \end{aligned}$$

Für $p < 1 - (25)^{-\frac{1}{25}}$ benötigt man durchschnittlich weniger Tests.

Aufgabe 27

$F^X(x) = P(X \le x),\ x \in \mathbb{R},\ F^Y(y) = P(Y \le y),\ y \in \mathbb{R}.$

(a)

$$\begin{aligned}
F^{\max\{X,Y\}}(t) &= P(\max\{X,Y\} \le t) \\
&= P(X \le t,\ Y \le t) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} P(X \le t) \cdot P(Y \le t) \\
&= F^X(t) \cdot F^Y(t), \quad t \in \mathbb{R} \\
F^{\min\{X,Y\}}(t) &= 1 - (1 - F^X(t)) \cdot (1 - F^Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Spezialfall der geometrischen Verteilung mit

$$\begin{aligned}
F^X(n) &= P(X \le n) = \sum_{k=1}^{n} p \cdot (1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \\
&\overset{\substack{\text{geom.}\\ \text{Summe}}}{=} p \cdot \left(\frac{(1-p)^n - 1}{(1-p) - 1} \right) \\
&= p \cdot \left(\frac{1 - (1-p)^n}{p} \right) \\
&= 1 - (1-p)^n, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Es ergeben sich $F^{\min\{X,Y\}}(n) = 1 - (1-p)^n \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^{2n}$

und $F^{\max\{X,Y\}}(n) = (1 - (1-p)^n)^2.$