Musterlösung 11.Übung

Aufgabe 40

(a) Bestimme die Likelihoodfunktion:

$$L(x,a) \overset{(12.8)}{=} \prod_{i=1}^{n} f_a(x_i) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{a^2}\cdot x_i \cdot I_{[0,a]}\,(x_i)$$

$$= (\frac{2}{a^2})^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot I_{[0,a]}\,(x_i)$$

für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ und $a > 0$.

Für alle $a < \overset{max}{\scriptstyle i}\; x_i \geq 0$ gilt:

$L(x,a) \;=\; 0 \qquad (1)$

für $a > \underset{1\leq i\leq n}{max}\; x_i$ gilt $L(x,a) \;=\; (\frac{2}{a^2})^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 0 \qquad (2)$

für $a > \underset{1\leq i\leq n}{max}\; x_i$:

$$\frac{\delta L}{\delta a} \;=\; (\prod_{i=1}^{n} x_i)\cdot 2^n \cdot (-2n) \cdot \frac{1}{a^{2n+1}} \;\leq\; 0,$$

$\Rightarrow$ für alle $a \geq \overset{max}{\scriptstyle i}\; x_i$ ist die Likelihood-Funktion monoton fallend. (3)

$\overset{(1)-(3)}{\Longrightarrow} \quad \hat{a}(x_1, ..., x_n) \;:=\; max(x_1, ..., x_n)$

ist ein Maximum-Likelihood-Schätzer für a.

(b) Prüfe, ob $\hat{a}(x_1, ..., x_n)$ erwartungstreu ist:

$$F_a(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\; dt \;=\; \int_{0}^{x} \frac{2}{a^2}\cdot t\; dt$$

$$= \frac{t^2}{a^2}\,\Big|_0^x \;=\; \frac{x^2}{a^2} \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$
\begin{aligned}
P(\max_i x_i \leq x) &\overset{stoch.unabh.}{=} P(x_1 \leq x) \cdot ... \cdot P(x_n \leq x) \\
&\overset{ident.vert.}{=} P(x_1 \leq x)^n \ = \ \frac{x^{2n}}{a^{2n}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{a}(x_1, ..., x_n)) \ &= \ E(max\ x_i) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(max\ x_i \leq x)\ dx \ = \ \int_0^a (1 - \frac{x^{2n}}{a^{2n}})\ dx \\
&= \ a - \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{a^{2n}} \\
&= \ \frac{2n}{2n+1} \cdot a \ \neq \ a
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Der Schätzer ist somit <u>nicht</u> erwartungstreu.