Musterlösung 3.Übung

Aufgabe 9

Vorbemerkungen:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = p \in (0,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

(ii) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - S_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{S_n}{n} = 1 - p > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k-s}{n} = 0$

folgt: $n - S_n \geq k - s$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

Betrachte jetzt also (o.B.d.A.) n so groß, dass $n \geq k$, $S_n \geq k$ und $n - S_n \geq k - s$.

$$
\begin{aligned}
h(s;k,n,S_n) &= \frac{\binom{S_n}{s}\binom{n-S_n}{k-s}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{S_n!}{s!\,(S_n-s)!} \cdot \frac{(n-S_n)!}{(k-s)!\,(n-S_n-k+s)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{n!} \\
&= \binom{k}{s} \cdot \frac{S_n!\,(n-k)!\,(n-S_n)!}{(S_n-s)!\,(n-S_n-k+s)!\,n!} \\
&= \binom{k}{s} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{s-1}(S_n-i) \cdot \prod_{i=0}^{k-s-1}(n-S_n-i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)} \\
&= \binom{k}{s} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{s-1}(S_n-i)}{\prod_{i=0}^{s-1}(n-i)} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-s-1}(n-S_n-i)}{\prod_{i=0}^{k-s-1}(n-s-i)} \\
&= \binom{k}{s} \cdot \left(\prod_{i=0}^{s-1} \frac{\frac{S_n}{n} - \frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n}}\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-s-1} \frac{1 - \frac{S_n}{n} - \frac{i}{n}}{1 - \frac{s}{n} - \frac{i}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(s;k,n,S_n) &= \binom{k}{s} \cdot \left(\prod_{i=0}^{s-1} \frac{p-0}{1-0}\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-s-1} \frac{1-p-0}{1-0-0}\right) \\
&= \binom{k}{s} \cdot p^s \cdot (1-p)^{k-s} = b(s;k,p)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10

a) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1)$ für die erste Installationsart:

$\Omega_1 := \{1, .., 12\}^8,\ \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{Pot}(\Omega_1),\ P_1(\omega) := \dfrac{1}{12^8} \quad \forall\, \omega \in \Omega_1,$
also Laplaceraum.

$$\begin{aligned} A_1 &:= \big\{\omega \in \Omega_1 \mid \omega_i \neq 1 \ \ \forall\, i \in \{1, .., 8\}\big\} \\ &= \big\{\omega \in \Omega_1 \mid \omega_i \in \{2, .., 12\}^8\big\} \\ &\mathrel{\hat{=}} \text{„1.Installationsart erfolgreich“} \end{aligned}$$

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{11^8}{12^8} \approx 0,4985$$

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, P_2)$ für die zweite Installationsart:

$\Omega_2 := \{1, .., 12\}^{16},\ \mathfrak{A}_2 := \mathfrak{Pot}(\Omega_2),\ P_2(\omega) := \dfrac{1}{12^{16}} \quad \forall\, \omega \in \Omega_2,$
also Laplaceraum.

$$\begin{aligned} A_2 &:= \big\{\omega = (\omega_1, .., \omega_{16}) \in \Omega_2 \mid \ \nexists\, i \neq j \ \in \{1, .., 16\} \text{ mit } \omega_i = \omega_j = 1\big\} \\ &= \big\{\omega \in \Omega_1 \mid \omega_i \in \{2, .., 12\}^8\big\} \\ &\mathrel{\hat{=}} \text{„2.Installationsart erfolgreich“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 := \{2, .., 12\}^{16} &\cup \big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega = (1, \omega_2, .., \omega_{16}), \omega_i \in \{2, .., 12\}, i \in \{2, .., 16\}\big\} \\ &\cup \big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega = (\omega_1, 1, .., \omega_{16}), \omega_i \in \{2, .., 12\}, i \in \{1, .., 16\} \setminus 2\big\} \\ &\ \ \vdots \\ &\cup \big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega = (\omega_1, .., \omega_{15}, 1), \omega_i \in \{2, .., 12\}, i \in \{1, .., 15\}\big\} \end{aligned}$$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{11^{16} + 11^{15} \cdot 16}{12^{16}} \approx 0,6100$$

$\Rightarrow$ <u>also:</u> zweite Installationsart ist zuverlässiger.

<u>Bemerkung:</u> Alternativ mit Binomialverteilung $b(s; k, p)$,

also: $P(A_2) = b(0; 16, \frac{1}{12}) + b(1; 15, \frac{1}{12})$
und $P(A_1) = b(0; 8, \frac{1}{12})$

b) Nein. Erfolgversprechender ist zweimaliges Wiederholen der 1.Installationsart.

Betrachte in $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, P_2)$:

$$\begin{aligned}
A_2' &:= \big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega_i \neq 1 \;\forall\, i \in \{1,..8\} \;\vee\; \omega_i \neq 1 \;\forall\, i \in \{9,..16\}\big\} \\
&= \big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega_i \neq 1 \;\forall\, i \in \{1,..16\}\big\} \\
&\quad \cup \;\big\{\omega \in \Omega_2 \mid \omega_i \neq 1 \;\forall\, i \in \{1,..8\} \;\wedge\; \exists\, j \in \{9,..16\} \text{ mit } \omega_j = 1\big\} \\
&\quad \cup \;\big\{\omega \in \Omega_2 \mid \exists\, i \in \{1,..8\} \text{ mit } \omega_i = 1 \;\wedge\; \omega_j \neq 1 \;\forall\, j \in \{9,..16\}\big\} \\
&\quad \hat{=} \;\text{„1. oder 2.Versuch der 1.Installationsart erfolgreich“}
\end{aligned}$$

$$P(A_2') = \frac{|A_2'|}{|\Omega_2|} = \frac{11^{16} + 11^8 \cdot (12^8 \cdot 11^8) + (12^8 - 11^8) \cdot 11^8}{12^{16}} \qquad \approx \; 0,7485$$

$$\big(= 1 - (1 - P(A_1))^2\big) \text{ (mit Unabhängigkeit)}$$