Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Musterlösung Aufgabe 1

Aufgabe 1

Zu zeigen sind die Eigenschaften 1) bis 3) aus Def. 1.6 der Vorlesung.

a) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

1) $\Omega \in \mathfrak{A}$ $\surd$

2) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}$, für $\emptyset$ und Ω erfüllt $\surd$

3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ $\surd$

b) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \emptyset \neq A \subset \Omega, A \neq \Omega$

wie a)

c) $\mathfrak{A} = \mathcal{P}ot(\Omega)$

1) $\Omega \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ $\surd$

2) $A \in \mathcal{P}ot(\Omega) \Rightarrow A \subseteq \Omega \Rightarrow A^c = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ $\surd$

3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}ot(\Omega) \Rightarrow A_n \subseteq \Omega \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ $\surd$

d) $\mathfrak{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$

1) $\Omega \in \mathfrak{A}$, da $\Omega^c = \emptyset$ abzählbar

2) $A \in \mathfrak{A}$, also A abzählbar oder A^c abzählbar $\Rightarrow (A^c)^c$ abz. oder A^c abz., also $A^c \in \mathfrak{A}$

3) $A_n \in \mathfrak{A} \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>1.Fall:</u> A_n abz. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abz. $\Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

<u>2.Fall:</u> Es existiert (mind.) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit A_{n_0} nicht abzählbar. Dann ist $A_{n_0}^c$ abz. und

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^c \overset{\text{de Morg.}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c \text{ abz., also } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}.$$

e) $B \cap \mathfrak{A} := \{B \cap A \mid A \in \mathfrak{A}\}$ ist σ-Algebra über B.

1) $B \in B \cap \mathfrak{A}$, da $B = B \cap \Omega$ und $\Omega \in \mathfrak{A}$ wegen $\mathfrak{A}$ σ-Algebra

2) Sei $C \in B \cap \mathfrak{A}$. Dann gibt es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $C = B \cap A$. Das Komplement von C bzgl. B ist dann:

$$C^c = B \cap (B \cap A)^c \overset{\text{de Morg.}}{=} B \cap (B^c \cup A^c) = (\underbrace{B \cap B^c}_{=\emptyset}) \cup (B \cap \underbrace{A^c}_{\in\mathfrak{A}}) \in B \cap \mathfrak{A}.$$

3) Es seien $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B \cap \mathfrak{A}$. D.h. es existieren $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}$ mit $C_n = B \cap A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (B \cap \mathfrak{A}_n) = B \cap (\underbrace{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}_{\in\mathfrak{A}}) \in B \cap \mathfrak{A}$.