Musterlösung 2.Übung

Aufgabe 5

a) Es sind $|A| = m \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, .., n$ mit $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, $(A_1, .., A_n)$ eine $(m_1, .., m_n)$-Zerlegung von A.

Beh.: Die Anzahl aller $(m_1, .., m_n)$-Zerlegungen von A beträgt:

$$\binom{m}{m_1, .., m_n} = \frac{m!}{m_1! \cdot .. \cdot m_n!}$$

Anschaulich:

- es werden n Ziehungen durchgeführt
- in Ziehung i wird m_i-elementige Teilmenge aus einer Menge mit $m - \sum_{j=1}^{i-1} m_j$ Elementen gezogen
- die Kombination aus allen möglichen Teilmengen aus allen Ziehungen ($i = 1, .., n$) ergibt die Gesamtanzahl der möglichen Zerlegungen

Beweis der Behauptung:

$$\left|\left\{(A_1, .., A_n), A_i \subset A, |A_i| = m_i, A_i \cap A_j = \emptyset,\ 1 \le i < j \le n\right\}\right|$$

$$= \binom{m}{m_1} \cdot \binom{m - m_1}{m_2} \cdot \binom{m - m_1 - m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \binom{m - \sum_{i=1}^{n-1} m_i}{m_n}$$

$$= \binom{m}{m_1} \cdot \binom{m - m_1}{m_2} \cdot \binom{m - m_1 - m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \binom{m_n}{m_n}$$

$$= \frac{m!}{m_1! \cancel{(m - m_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(m - m_1)!}}{m_2! \cancel{(m - m_1 - m_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(m - m_1 - m2)!}}{m_3! \cancel{(m - m_1 - m_2 - m_3)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{m_n}!}{m_n! (0)!}$$

$$= \frac{m!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!}$$

b) in a) einsetzen mit $|A| = 18, m_1 = 4, m_2 = 6, m_3 = 8, n = 3$. Dann erhalten wir:

$$\frac{18!}{4! \cdot 6! \cdot 8!} = 9.189.180 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 6

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$
mit $\Omega = \big\{\big((i_1, j_1, k_1), ..., (i_{10}, j_{10}, k_{10})\big) \mid (i_l, j_l, k_l) \in \{0,..,9\}^3, l \in \{1,..,10\}\big\}$
$|\Omega| = (10^3)^{10} = 10^{30}$

a) $E_1 := \big\{\big((i_1, j_1, k_1), ..., (i_{10}, j_{10}, k_{10})\big) \in \Omega \;\mid\; \exists\, l \in \{1,..,10\} \text{ mit } i_l = j_l = k_l\big\}$

Hier günstig, die Komplementärmenge zu betrachten:
$E_1{}^C := \big\{\big((i_1, j_1, k_1), ..., (i_{10}, j_{10}, k_{10})\big) \in \Omega \;\mid\; \exists\, l \in \{1,..,10\} \text{ mit }$
$(i_l, j_l, k_l) \neq (s,s,s) \;\; \forall\, l \in \{1,..,10\}, s \in \{0,..,9\}\big\}$

$$|E_1{}^C| = (10^3 - 10)^{10}, \;\; P(E_1{}^C) = \frac{|E_1{}^C|}{|\Omega|} = \frac{(10^3-10)^{10}}{10^{30}} = 0,99^{10}$$

$P(E_1) = 1 - P(E_1{}^C) = 1 - 0,99^{10} \approx 0,0956$

Alternativ:

$|E_1| = \sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} \cdot 10^i \cdot (10^3 - 10)^{10-i}$

b) $E_2 := \big\{\big((i_1, j_1, k_1), ..., (i_{10}, j_{10}, k_{10})\big) \in \Omega \;\mid\; \exists!\, l_1, .., l_4 \in \{1,..,10\},$
$l_1 \neq l_2 \neq l_3 \neq l_4, \;\; s_1, .., s_4 \;\text{ mit }\; (i_{l_r}, j_{l_r}, k_{l_r}) = (s_r, s_r, s_r), r = 1,..,4\big\}$

$$|E_2| = \binom{10}{4} \cdot 10^4 \cdot (10^3 - 10)^6 = 10^{10} \cdot \binom{10}{4} \cdot 99^6$$

$$P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{10^{10} \cdot \binom{10}{4} \cdot 99^6}{10^{30}} = \frac{\binom{10}{4}}{10^8} \cdot (0,99)^6 \approx 0,000002 \quad = 0,0002\ \%$$

Aufgabe 7

geeignete Grundmenge $\Omega = \big\{(\omega_1, .., \omega_{2n}) \mid \omega_j \in \{0,1\}, 1 \leq j \leq 2n\big\}$
(0 = Kopf, 1=Zahl)

Es gilt: $|\Omega| = 2^{2n}$ und

$A := \big\{(\omega_1, .., \omega_{2n}) \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{2n} \omega_j < n\big\}$ $\hat{=}$ mehr als n-mal Kopf

$B := \big\{(\omega_1, .., \omega_{2n}) \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{2n} \omega_j = n\big\}$ $\hat{=}$ genauso oft Kopf wie Zahl

$C := \big\{(\omega_1, .., \omega_{2n}) \in \Omega \mid \sum_{j=1}^{2n} \omega_j > n\big\}$ $\hat{=}$ mehr als n-mal Zahl

Dann ist $\Omega = A + B + C$ (disjunkte Vereinigung von A, B und C)
und es gilt:

$|A| = |C|$ (wegen: $f : A \to C, f : (\omega_1, .., \omega_n) \mapsto (1 - \omega_1, .., 1 - \omega_n)$ bijektiv)

Ferner: $|B| = \binom{2n}{n}$ (n Einsen auf 2n Stellen verteilen)

$$\Rightarrow \text{also:} \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

$$|A| = \tfrac{1}{2}\big(|A| + |C|\big) = \tfrac{1}{2}\big(|\Omega| - |B|\big)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \cdot \big(1 - P(B)\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2n}{n}$$

Verhalten von $P(A)$ für $n \to \infty$ mittels Stirling-Formel (vgl. Krengel):

Stirling-Formel: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$, dh. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$

man erhält:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{2n!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^2 n \cdot 2\pi n} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot (2n)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n} \cdot \frac{1}{n^{2n}} \cdot (e)^{2n} \cdot \frac{1}{2\pi n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{2\pi n} = 0, \quad \text{dh.} \lim_{n\to\infty} P(A) = \frac{1}{2}$$