Musterlösung 8.Übung

Aufgabe 31

$g^X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot P(X = n), \quad t \in (-1, 1)$

(a) X, Y stochastik unabhängig

$\overset{(6.17)}{\Rightarrow}$ t^X, t^Y unabhängig

$$\Rightarrow \quad E(t^{X+Y}) \; = \; E(t^X \cdot t^Y) \overset{(7.10)}{=} E(t^X) \cdot E(t^Y)$$

(b) (i) $X \sim b(a, p)$, dann

$$\begin{aligned} E(t^X) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (tp)^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= (1 - p + pt)^n \end{aligned}$$

<u>Zusammenhang zu Aufg.24</u> :

$X_i \sim b(n_i, p) \quad i = 1, 2$ unabhängig,

$$\begin{aligned} \overset{(a)}{\Rightarrow} \; g^{X_1+X_2}(t) &= g^{X_1}(t) \cdot g^{X_2}(t) \\ &= (1-p+pt)^{n_1} \cdot (1-p+pt)^{n_2} \\ &= (1-p+pt)^{n_1+n_2}, \quad t \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Das ist die erzeugende Funktion einer $b(n_1 + n_2, p)$ - Verteilung.
(Da die erzeugende Funktion stets eindeutig bestimmt ist, folgt das Ergebnis von Aufg. 24 direkt.)

(ii) $X \sim po(\lambda)$, dann

$$\begin{aligned} E(t^X) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{=e^{\lambda t}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

<u>Zusammenhang zu (6.22)</u> :

$X_i \sim po(\lambda_i), \; i = 1, 2$ unabhängig

$\Rightarrow \; X_1 + X_2 \sim po(\lambda_1 + \lambda_2)$,

$$g^{X_1+X_2} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(t-1)}$$

Aufgabe 32

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}} \sim (Y_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n \neq Y_n\}) < \infty$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n \neq Y_n\}) < \infty \quad \overset{(5.14)}{\Rightarrow} \quad P(\limsup_{n\to\infty} \{X_n \neq Y_n\}) = 0$

$\overset{A12}{\Leftrightarrow} \quad P(X_n \neq Y_n \text{ für unendl.viele n}) = 0$

(b) Umkehrung:

$$0 = P(\limsup_{n\to\infty} \{X_n \neq Y_n\}) = P(\limsup_{n\to\infty} \{\underbrace{X_n - Y_n \neq 0}_{\{f(X_n,Y_n))\neq 0\}}\})$$

mit $f((X_n, Y_n)) := X_n - Y_n$

(ebenfalls stochastisch unabhängig)

$$\overset{(5.14)}{\Rightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(\underbrace{f((X_n, Y_n)) \neq 0}_{\{X_n \neq Y_n\}}) < \infty$$

dh. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}} \sim (Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$

Aufgabe 33

siehe Vorlesung (8.6) mit $EX_n = \mu \quad \forall n \in \mathbf{N}$:

$$P(\mid \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X - \mu \mid \geq \epsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 , \quad \text{falls } X_n \text{ unkorreliert und } VarX_n \leq \mu < \infty \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

<u>Hier</u> : $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stochastisch unabhängig (also auch unkorreliert) mit $EX_n = 0 \quad \forall \neq\in \mathbf{N}$

$$\Rightarrow VarX_n = E{X_n}^2 = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}) + 2 \cdot n^4 \cdot \frac{1}{2n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} + n^2, \quad n \geq 2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\Rightarrow$ dh. (8.6) ist <u>nicht</u> anwendbar.

<u>Hinweis</u> : $Y_n := X_n \cdot I_{[-1,1]}(X_n), \quad n \in \mathbf{N}$

<u>Eigenschaften</u> :

- $EY_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$
- $X_1 = Y_1$, dh. $P(X_1 \neq Y_1) = 0 \quad (*)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) \overset{(*)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=2}^{\infty} (P(X_n = n^2) + P(X_n = -n^2)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

dh. mit Aufg.32(b): $(X_n)_{n\in\mathbf{N}} \sim (Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$

- $VarY_n = E{Y_n}^2 = \begin{matrix} 1, & n = 1 \\ 1 - \frac{1}{n^2}, & n \geq 2 \end{matrix}$

also: $VarY_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow (Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen

$\overset{A32}{\Rightarrow} (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen