Musterlösung 7.Übung

Aufgabe 29

i) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X - EX \geq c) &\leq P(X - EX + t \geq c + t) \\
&\overset{c+t>0}{\leq} P((X - EX + t)^2 \geq (c+t)^2)
\end{aligned}
$$

ii) Für beliebiges $t \geq 0$ gilt nach der MARKOV-Unlgeichung (Vorlesung: 8.4) :

$$
\begin{aligned}
P((X - EX + t)^2 \geq (c+t)^2) \;&\leq\; \tfrac{1}{(c+t)^2} \cdot E((X - EX + t)^2) \\
&=\; \frac{E((X-EX)^2) + 2t \cdot E(X - EX) + t^2}{(c+t)^2} \\
&\scriptstyle (E(X-EX)=0) \\
&=\; \frac{E((X-EX)^2) + t^2}{(c+t)^2} \\
&=\; \frac{Var(X) + t^2}{(c+t)^2} \quad =: f(t)
\end{aligned}
$$

Setze $\sigma^2 := Var(X)$ und suche Minimum von f (quadratische Funktion)

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2t \cdot (c+t)^2 - 2 \cdot (c+t) \cdot (\sigma^2 + t^2)}{(c+t)^4} \\
&= \frac{2t \cdot (c+t) - 2 \cdot (\sigma^2 + t^2)}{(c+t)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(t_0) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 2t_0 \cdot (c + t_0) - 2 \cdot (\sigma^2 + {t_0}^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow\; 2ct_0 + 2{t_0}^2 - 2\sigma^2 - 2{t_0}^2 = 0 \\
&\overset{c\gtrless 0}{\Leftrightarrow}\; t_0 = \tfrac{\sigma^2}{c} \qquad (f''(t_0) > 0,\ \text{also Minimum})
\end{aligned}
$$

$$
f(t_0) = \frac{\sigma^2 + {t_0}^2}{(c+t_0)^2} = \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{c^2}}{(c + \frac{\sigma^2}{c})^2} = \frac{c^2\sigma^2 + \sigma^4}{c^4 + 2\sigma^2 c^2 + \sigma^4} = \frac{\sigma^2(c^2+\sigma^2)}{(c^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{c^2+\sigma^2}
$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} P(X - EX \geq c) &\overset{(i)}{\leq} P((X - EX + t_0)^2 \geq (c + t_0)^2) \\ &\overset{(ii)}{=} \frac{\sigma^2}{c^2 + \sigma^2} = \frac{Var(X)}{c^2 + Var(X)} \end{aligned}$$