Musterlösung 10.Übung

Aufgabe 36

(a) (i)
$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&\overset{part.Integr.}{=} \underbrace{-x \cdot e^{-\lambda x}\, |_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx \\
&= -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\lambda x}\, |_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot EX \overset{(i)}{=} \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

also: $$VarX = EX^2 - E^2X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(b) (i) $$P(Y > 20) = 1 - F^Y(20) = e^{-\frac{1}{20} \cdot 20} = \frac{1}{e}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
P(Y > 40 \mid Y > 20) &= \frac{P(Y > 40, Y > 20)}{P(Y > 20)} \\
&= \frac{P(Y > 40)}{P(Y > 20)} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{20} \cdot 40}}{e^{-\frac{1}{20} \cdot 20}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^-1 \\
&= \frac{1}{e} \qquad \text{(Exp.-Verteilung ist gedächnislos)}
\end{aligned}$$

(iii) 2 Bedingungen :

$$\begin{aligned} I \quad P(X > 20 \mid X > 10) \ &= \ P(X > 10) \\ II \quad P(X > 30 \mid X > 20) \ &= \ \tfrac{1}{2} \cdot P(X > 10) \end{aligned}$$

Setze z.B. (es gibt viele Möglichkeiten !!)

$$\begin{aligned} P(X > 10) \ &:= \ 1 \\ \Rightarrow \ P(X > 20) \ &= \ 1 \\ P(X > 30) \ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

z.B. $X \sim \mathcal{R}\ [20, 40]$

Aufgabe 37

Es bezeichne U die Lebensdauer von System S.
Weil S ein Seriensystem, gilt:

$$U \ = \ min\{x_1, ..., x_n\}$$

zu zeigen: $U \sim Wei(\alpha, \beta)$ mit $\alpha := \alpha_1 + ... + \alpha_n$

Es gilt für alle $x > 0$:

$$\begin{aligned} P(U > x) \ &= \ P(x_1 > x, ..., x_n > x) \ \overset{stoch.unabh.}{=} \ \prod_{i=1}^{n} P(x_i > x) \\ &= \ \prod_{i=1}^{n} (1 - P(x_i \leq x)) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i^x(x)) \\ &= \ \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i \cdot x^\beta} \ = \ e^{-\alpha_1 \cdot x^\beta - \alpha_2 \cdot x^\beta - ... - \alpha_n \cdot x^\beta} \\ &= \ e^{-(\alpha_1 + ... + \alpha_n) \cdot x^\beta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ F^U(x) \ = \ P(U \leq x) \ = \ 1 - P(U > x) \ = \ 1 - e^{-\alpha \cdot x^\beta} \quad \forall x > 0$$

Klar: $F^U(x) \ = \ 0 \quad \forall x \leq 0$

$$\overset{(6.25(b))}{\Rightarrow} \ U \sim Wei(\alpha, \beta)$$

Aufgabe 38

Faltung:

Nach (10.20) gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{x_1+x_2}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{x_1}(t) \cdot f^{x_2}(y-t)\ dt, \quad y \in \mathbf{R} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \cdot t^{\beta_1-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot I_{(0,\infty)}(t) \cdot \\
&\qquad \frac{\alpha^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2)} \cdot (y-t)^{\beta_2-1} \cdot e^{-\alpha(y-t)} \cdot I_{(0,\infty)}(y-t)\ dt
\end{aligned}
$$

Für $y \leq 0$ gilt sicherlich:

$$
f^{x_1+x_2}(y) = 0,
$$

für $y > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{x_1+x_2}(y) &= \frac{\alpha^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1)\cdot\Gamma(\beta_2)} \cdot \int_0^y e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha(y-t)} \cdot t^{\beta_1-1} \cdot (y-t)^{\beta_2-1}\ dt \\
&= \frac{\alpha^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1)\cdot\Gamma(\beta_2)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot \int_0^y (y-t)^{\beta_2-1} \cdot t^{\beta_1-1}\ dt \\
&\overset{(Hinweis!)}{=} \frac{\alpha^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1)\cdot\Gamma(\beta_2)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot \frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)} \cdot y^{\beta_1+\beta_2-1} \\
&= \frac{\alpha^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y^{\beta_1+\beta_2-1}
\end{aligned}
$$

Also gilt insgesamt:

$$
f^{x_1+x_2}(y) = \frac{\alpha^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y^{\beta_1+\beta_2-1} \cdot I_{(0,\infty)}(y)
$$

$$
\Rightarrow\ x_1 + x_2 \sim \Gamma(\alpha, \beta_1+\beta_2)
$$