Teillösung 7. Übung

27. Juni 2002

Aufgabe 24

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der gemessenen Temperaturen, $T_i \sim \mathrm{N}(400, 9)$.

$$S = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; T_n \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty)\right\}$$

ist die Erste Eintrittszeit, des über-/unterschreitens der vorgegebenen Temperaturspanne.

$$\begin{aligned}
&P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty)) = P(T_i \leq 395) + P(T_i \geq 405) \\
&\quad = P(T_i \leq 395) + 1 - P(T_i \leq 405) = \Phi\left(\frac{395 - 400}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{405 - 400}{3}\right) \\
&\quad = \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 - 2\,\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.096
\end{aligned}$$

Es gilt $P(S = k) = (1-p)^{k-1}p$ mit $p = P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty))$

$$\Rightarrow \quad P(S > 10) = 1 - P(S \leq 10) = 1 - \sum_{i=1}^{10}(1-p)^k p = (1-p)^{10} \approx 0.425$$

Aufgabe 25 a)

$X \sim \text{Rec}(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_x(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$

$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in (0,1)$

$Y = T(X)$ ist nicht standardnormalverteilt, da $T\big(\ (0,1)\ \big) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \neq (-\infty, \infty)$

T ist injektiv und stetig differenzierbar auf $(0,1)$, $T^{-1}(y) = \sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}$

$\frac{dT(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x\ e^{-x^2} \neq 0 \quad \forall\ x > 0$

$\Rightarrow$ Transformationssatz anwendbar:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X\left(T^{-1}(y)\right)}{\left|\det\left(\frac{dT}{dx}\right)\big|_{T^{-1}(y)}\right|} \mathbb{1}_{T((0,1))}(y) \\
&= \frac{f_X\left(\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}\right)}{\left| -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x\ e^{-x^2} \Big|_{\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}} \right|} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y) \\
&= \frac{1}{2y\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 26

$X \sim \text{Exp}(\lambda),\ Y \sim \text{Rec}(0,1),\ X, Y$ s.u.

Faltungsformel:

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ f_Y(z-t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ e^{-\lambda t}\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \mathbb{1}_{[0,1]}(z-t)\ dt \\
&= \int_{\max\{0,z-1\}}^{z} \lambda\ e^{-\lambda t}\ dt\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) = -e^{-\lambda t}\Big|_{\max\{0,z-1\}}^{z}\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq z \leq 1 \\ e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}, & z > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$