Musterlösungen 5. Übung

10. Juni 2002

Aufgabe 16

Es gelte $P(X > x + y | X > x) = P(X > y) \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P^X((y,\infty) &= P^X((x+y,\infty)|(x,\infty)) \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty)\cap(x,\infty))}{P^X((x,\infty))} \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty))}{P^X((x,\infty))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; P^X((x+y,\infty)) = P^X((x,\infty)) \cdot P^X((y,\infty))$$

$$P^X((x,\infty)) = 1 - P^X((-\infty,x]) = 1 - F_X(x) =: \overline{F}_X(x)$$

$$\Rightarrow\; \overline{F}_X(x+y) = \overline{F}_X(x)\cdot\overline{F}_X(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R},\ \overline{F}_X \text{ stetig}$$

$$\underset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}\; \overline{F}_X(x) = e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{R}\ \text{Annahme: } \alpha > 0 \;\Rightarrow\; \overline{F}_X \text{ streng monoton steigend}$$

$$\Rightarrow\; F_X \text{ streng monoton fallend}$$

$$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \overline{F}_X(x) = 1 \;\Rightarrow\; F_X(x) = 0\ \forall\, x$$

$$\Rightarrow \alpha < 0,\ \text{setze } \lambda := -\alpha$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Somit folgt, dass eine Zufallsvariable X mit gedächnisloser, stetiger Verteilungsfunktion exponential Verteilt ist.

Aufgabe 17

a) Normiere $h(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \int_0^{\infty} c\ x^{\alpha-1}\ e^{-\lambda x^\alpha} dx \underset{\substack{x' = x^\alpha \\ dx' = \alpha x^{\alpha-1}\ dx}}{=} \frac{c}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x'} dx'$$

$$= \frac{c}{\alpha}\left[-\frac{1}{\lambda}\ e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{\lambda\alpha}$$

$\Rightarrow\ c = \lambda \cdot \alpha > 0$

$\Rightarrow\ h(x) >= 0 \quad \forall\ x$

$\Rightarrow\ h(x)$ ist eine Dichte, die Zugehörige Verteilungsfunktion ist:

$\Rightarrow F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x^\alpha}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

b) Normiere $g(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dx = \int_{-1}^{0} c\ x\ dx + \int_0^5 e^x\ dx = -\frac{c}{2} + e^5 - 1$$

$\Rightarrow\ c = 2e^5 - 4\ >\ 0 \Rightarrow\ g(x) < 0 \quad \forall\ -1 < x < 0$

$\Rightarrow\ g(x)$ ist keine Dichte

Aufgabe 18

Sei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen. Zeige die Symmertrieregel $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{\substack{t' = -t \\ dt' = -dt}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'\ - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' = 1 - \Phi(x)$$

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es gilt $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, da

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{\frac{t'^2}{2}} dt' = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Gegeben: $\sigma = 10000$, $\mu = 1000$

a)

$$x = 11550:\ P(X \le x) = \Phi\left(\frac{11550 - 10000}{1000}\right) = \Phi(1.55) \approx 0.939$$

$$x = 7000:\ P(X \le x) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) \approx 1.35 \cdot 10^{-3}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X > 10000 | X > 9500) &= \frac{P(X > 10000\ \cap X\ > 9500)}{P(X > 9500)} = \frac{P(X > 10000)}{P(X > 9500)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 10000)}{1 - P(X \leq 9500)} = \frac{1 - \Phi(0)}{1 - \Phi(-0.5)} = \\
&\approx \frac{1 - 0.5}{0.691} \approx 0.723 \\
P(X > 11500 | X > 11000) &= \frac{P(X > 11500)}{P(X > 11000)} = \frac{1 - \Phi(1.5)}{1 - \Phi(1)} \approx \frac{1 - 0.933}{1 - 0.841} \approx 0.159
\end{aligned}$$

c) Gesucht x, so dass $P(X \leq u) = 0.7$

$$\Rightarrow\ u \approx 0.525$$

$$\Rightarrow\ 0.525 = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow\ x = 0.525\ \sigma + \mu = 10525$$

Aufgabe 19

a) $X \sim \text{Bin}(n, p)\ \Rightarrow\ f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}\ z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz + 1 - p)^n
\end{aligned}$$

b) $P(\{i\}) = p_i \geq 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}$, zeige noch die Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1
\end{aligned}$$

Durch $P(\{i\})$ ist somit eine Zähldichte gegeben. Die zugehörige erzeugenden Funktion ist:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \frac{1}{z} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z \right) = -\ln(1-z) + \frac{\ln(1-z)}{z} + 1
\end{aligned}$$