Musterlösung 4. Übung

21. Juni 2002

Aufgabe 12

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}{p_n}^k\,(1-p_n)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n}\underbrace{\prod_{l=0}^{k-1}\underbrace{\frac{n-l}{n}(np_n)}_{\longrightarrow 1\cdot\lambda}}_{\longrightarrow\lambda^k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n}$$

Bekannt ist, dass für $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$, $x\geq 0$, gilt $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^{-x}=:f(x)$. Aus $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$ und $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$ folgt jedoch im Allgemeinen nicht, dass auch $f_n(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$ gilt. Die Vermutung, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda_n)\overset{!}{=}e^{-\lambda}$, für $\lambda_n=np_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda$ gilt, ist somit zu zeigen:

$$\begin{aligned}
&\forall\, n\in\mathbb{N}:\ f_n(x)\text{ ist monoton fallend in x}\\
&f:=\lim_{n\to\infty}f_n\text{ ist stetig, }\lambda_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda\\
&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0,\text{ so dass }\forall\, n>n_0:\ \lambda-\varepsilon<\lambda_n<\lambda+\varepsilon\\
\underset{f_n\text{monoton}}{\Rightarrow}\quad &f_n(\lambda+\varepsilon)\leq f_n(\lambda_n)\leq f_n(\lambda-\varepsilon)\\
\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}\quad &f(\lambda+\varepsilon)\leq\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda_n)\leq f(\lambda-\varepsilon)\\
\underset{f stetig,\varepsilon\to 0}{\Rightarrow}\quad &f(\lambda)\leq\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda_n)\leq f(\lambda)\\
\Rightarrow\quad &f(\lambda)=\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda_n)
\end{aligned}$$

Somit gilt die Vermutung und auch die Aussage.

Aufgabe 13

a) X beschreibe die Anzahl der Sendungen eines Pakets und hat den Träger $T=\mathbb{N}$.

Sei $Z \sim \text{Geo}(p)$ mit Träger $T' = \mathbb{N}_0$, so gilt $X = 1 + Z$.
Für die Zähldichte von X gilt

$$f_X(k) = P^X(k) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Die Übertragung des Pakets wird:
1) nicht wiederholt: $Z = 0 \ \Rightarrow\ X = 1 \ \Rightarrow P(X = 1) = p$,
2) 2 mal wiederholt: $Z = 2 \ \Rightarrow\ X = 3 \ \Rightarrow P(X = 3) = p(1-p)^2$.
Mit Wahrscheinlichkeit 0.99 sollen höchstens drei erneute Übertragungen nötig sein. Gesuch wird ein p, so dass $P(X \leq 4) = 0.99$

$$0.99 = \sum_{k=1}^{4} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{3}(1-p)^i = p\ \frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^4$$
$$\Rightarrow\ p = 1 - \sqrt[4]{0.01}$$

b) Träger von Y: $T = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$$P(Y = k) = \begin{cases} P(X = k) & \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \\ \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) & ,\ \text{falls } k = 10 \end{cases}$$
$$P(Y = 10) = \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^{9} P(X = i) = 1 - \sum_{j=0}^{8} P(Z = j)$$
$$= 1 - (1 - (1-p)^9) = (1-p)^9$$
$$f_Y(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \\ (1-p)^9 & ,\ \text{falls } k = 10 \end{cases}$$

c) In der Aufgabenstellung trat leider ein Formulierungsfehler auf. Die gestellte Aufgabe ist leider nicht approximativ lösbar. Die korrekte Aufgabenstellung lautet:
Aufgabenstellung: Eine Datei, die übertragen werden soll, besteht aus 1000 Paketen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen mehr als drei Pakete mehrfach übertragen werden, falls $p = 1 - 10^{-4}$ ist?

X sei die Anzahl der Pakete, die mehrfach versendet werden müssen. $X \sim \text{Bin}(n, p')$ mit $n = 1000$, $p' = 1 - p = 10^{-4}$.
n ist groß, p' klein $\Rightarrow$ Gesetz seltener Ereignisse ist anwendbar, d.h. X ist näherungsweise Poisson-Verteilt mit Parameter $\lambda = 1000 \cdot 10^{-4} = 0.1$.
$\Rightarrow$ P(mehr als 3 Pakete mehrfach übertragen) $= P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$ mit $X \sim \text{Poi}(0.1)$.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-0.1}\frac{0.1^k}{k!} \approx 3.85 \cdot 10^{-5}$$

Für das in der fehlerhaften Aufgabenstellung angegebene p kann die Aufgabe gelöst werden durch summieren über die Binomialverteilung.

Aufgabe 14

a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) \in [0,1]$$

$$(i)\ x < y:\ \ F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty,x]) \overset{\text{La. 2.11, c)}}{\leq} P^X((-\infty,y]) = P(X \leq y) = F_X(y)$$

$$\Rightarrow\ F_X \text{ monoton wachsend}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty,x]) \\ &\overset{x_n=n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty,n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcup_{i=1}^{n}(-\infty,i]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,n]\right) = P^X(\mathbb{R}) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty,x]) \\ &\overset{x_n=-n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty,-n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n}(-\infty,-i]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,-n]\right) = P^X(\emptyset) = 0\end{aligned}$$

$$(iii)\ x_n \downarrow x_0 \text{ für } n \to \infty$$

$$\begin{aligned}F_X(x_0) &= P((\infty,x_0]) = P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,x_n]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n}(-\infty,x_i]\right) = \lim_{n\to\infty} P^X\left((-\infty,x_n]\right) \\ &= \lim_{x\downarrow x_0} P^X((-\infty,x]) = \lim_{x\downarrow x_0} P(X \leq x) = \lim_{x\downarrow x_0} F_X(x)\end{aligned}$$

b)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty,x]) = P^Y((-\infty,x]) = P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

Aufgabe 15

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \text{ mit } \lambda = 0.01$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}$$
$$F(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

a)

$$
\begin{aligned}
&1.)\quad P(X>100)=1-P(X\le 100)=1-F_X(100)=e^{-100\lambda}=\frac{1}{e}\\
&2.)\quad P(25\le X\le 300)=P(X\le 300)-P(X<25)=P(X\le 300)-P(X\le 25)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad =F(300)-F(25)=1-e^{-300\lambda}-1+e^{-25\lambda}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad =e^{-\frac{1}{4}}-e^{-3}\\
&3.)\quad P(X<150)=1-e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

b) Gesucht ist ein x, so dass $P(X\le x)=p=0,5$

$$
\begin{aligned}
&p=P(X\le x)=F_X(x)=1-e^{-\lambda x}\\
&\Rightarrow\quad 1-p=e^{-\lambda x}\\
&\Rightarrow\quad \ln(1-p)=-\lambda x\\
&\Rightarrow\quad x=-\frac{\ln(1-p)}{\lambda}=-100\ \ln(1-p)\approx 69,315
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&p=P(u_1<X\le u_2)=P(X\le u_2)-P(X\le u1)=F(u_2)-F(u_1)\\
&\Rightarrow\quad p=e^{-\lambda u_1}-e^{-\lambda u_2}\\
&\Rightarrow\quad e^{-\lambda u_2}=e^{-\lambda u_1}-p\\
&\Rightarrow\quad -\lambda u_2=\ln\left(e^{-\lambda u_1}-p\right)\\
&\Rightarrow\quad u_2=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1}-p\right)\\
&\text{Suche }\min_{0\le u_1}\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1}-p\right)}_{u_2}-u_1\Bigg)=:\min_{0\le u_1}f(u_1)\\
&f'(u_1)=\frac{1}{e^{-\lambda u_1}-p}e^{-\lambda u_1}-1\underset{x:=e^{-\lambda u_1}}{=}\frac{x}{x-p}-1\overset{!}{\ge}0
\end{aligned}
$$

Wenn die letzte Ungleichung gilt, dann ist $f(x)$ monoton steigend. Damit ist $u_1=0$ die Lösung.
Zeige nun die letzte Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\text{Beh.: } x-p\le 0\Rightarrow e^{-\lambda u_1}\le p,\ \text{ aber } p=P(u_1<x\le u_2)<e^{-\lambda u_1}\ \Rightarrow\ \lightning\\
&\Rightarrow\quad x-p>0\\
&\text{Zeige nun: }\frac{x}{x-p}\ge 1\\
&\Leftrightarrow\quad x\ge x-p\\
&\Leftrightarrow\quad 0\ge -p
\end{aligned}
$$

Somit ist $f(u_1)$ monoton steigend in u_1. Mit $u_2(u_1=0)=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^0-p\right)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$ folgt das gesuchte Intervall

$$\left(0,-\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)\right].$$