Teillösung 6. Übung

14. Juni 2002

Aufgabe 20

Zeige: $X1, \ldots, X_n$ s.u. $\Rightarrow$ $P(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = t_i)$.
Zeige dazu

$$P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \leq t_j, \ldots X_n \leq t_n) = \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j}^{n} P(X_i \leq t_i),$$

für $j = 1, \ldots, n$. Für $j = n$ ergibt sich die Beauptung.
Der Beweis erfolgt per Induktion (ObdA sei der Träger $T = \mathbb{N}$).

IA: $j = 1,$ gilt nach Definition der stochastischen Unabhängigkeit.
IS: $j \to j + 1$

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = t_1, \ldots, X_j = t_j, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
=&P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \leq t_j, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
&- P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, \underbrace{X_j \leq t_j - 1}_{\Leftrightarrow\ X_j < t_j \text{ da } T = \mathbb{N}_0}, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
\overset{\text{IV}}{=}& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \leq t_j) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \\
&- \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \leq t_j - 1) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \\
=& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \Big(\underbrace{P(X_j \leq t_j) - P(X_j \leq t_j - 1)}_{=P(X_j = t_j)} \Big) \\
=& \prod_{i=1}^{j} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Zeige noch die Gegenrichtung:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n) &= \sum_{\substack{s_i \in T_i:\ s_i \le t_i \\ i=1,\dots,n}} P(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) \\
&\underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{s_i \le t_i} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = s_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{s_i \le t_i} P(X_i = s_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \quad \Rightarrow \quad \text{s.u.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 21

$N \sim \mathrm{Poi}(\lambda), \quad T \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

a) gesucht: $P(N < 4,\ T \le 50) \overset{\text{s.u.}}{=} P(N < 4)\ P(T \le 50)$

$$
\begin{aligned}
&= \left(e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \left(1 - e^{-50\mu}\right) \\
&\approx 0.104
\end{aligned}
$$

b) gesucht: $P(N \le 12,\ NT \le 300) = \sum_{k=0}^{12} P(N = k,\ k \cdot T \le 300)$

$$
\begin{aligned}
&= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{12} P\left(N = k,\ T \le \frac{300}{k}\right) \\
&= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{12} P(N = k) P\left(T \le \frac{300}{k}\right) \\
&= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{12} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{300\mu}{k}}\right) \\
&\approx 0.497
\end{aligned}
$$