

4. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 12

Es seien $\lambda > 0$ und $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

gilt.

Aufgabe 13

In einem paketerorientierten Netzwerk kommt ein einzelnes Datenpaket mit Wahrscheinlichkeit p fehlerfrei beim Empfänger an. Die Übertragung verschiedener Pakete kann als stochastisch unabhängig angesehen werden. Wenn in einem Paket ein Fehler auftritt, wird die Übertragung wiederholt, solange bis das Paket fehlerfrei angekommen ist.

a) Die Zufallsvariable X beschreibe wie oft ein einzelnes Paket gesendet werden muss, bis es ohne Fehler empfangen wird. Wie ist X verteilt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine und mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 Wiederholungen der Übertragung nötig? Wie groß muss p mindestens sein, so dass mit Wahrscheinlichkeit 0.99 höchstens drei erneute Übertragungen pro Paket nötig sind?

b) Um zu verhindern, dass ein einzelnes wiederholt übertragenes Paket das ganze Netz blockiert, wird in einem anderen Netzwerk maximal 10 mal versucht, ein Paket zu übertragen. Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen Y in diesem System aus, die die Anzahl der Übertragungsversuche beschreibt?

c) Eine Datei, die übertragen werden soll, besteht aus 1000 Paketen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen mehr als drei Pakete mehrfach übertragen werden, falls $p = 10^{-4}$ ist?

Hinweis: Beantworten Sie Teil c) approximativ.

Aufgabe 14

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

a) $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$ ist eine Verteilungsfunktion (siehe Satz 3.9),

b) $P^X = P^Y \Rightarrow F_X = F_Y$ (einfache Richtung von Satz 3.10).