Stochastik 2000

Übung 1

Übung

① $\Omega = \{((i_1,j_1,k_1),\dots,(i_{10},j_{10},k_{10})) \mid (i_\ell,j_\ell,k_\ell) \in \{0,\dots,9\}^3\}$

$|\Omega| = (10^3)^{10} = 10^{30}$

a) $A = \{((i_1,j_1,k_1),\dots,(i_{10},j_{10},k_{10})) \in \Omega \mid$
$\exists \ell \in \{1,\dots,10\}: i_\ell = j_\ell = k_\ell\}$

$A^c = \{((i_1,j_1,k_1),\dots,(i_{10},j_{10},k_{10})) \in \Omega \mid$
$\forall \ell \in \{1,\dots,10\}: i_\ell \neq j_\ell \vee i_\ell \neq k_\ell \vee j_\ell \neq k_\ell\}$

$|A^c| = (10^3 - 10)^{10}$

alle $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ Tripel (i,j,k)

$P(A^c) = \frac{(10^3-10)^{10}}{(10^3)^{10}} = \left(\frac{99}{100}\right)^{10}$ $\quad P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{10}$

b) $B = \{((i_1,j_1,k_1),\dots,(i_{10},j_{10},k_{10})) \in \Omega \mid$
$\exists n_1,n_2,n_3,n_4 \in \{1,\dots,10\}^4 \mid |\{n_1,n_2,n_3,n_4\}| = 4,$
$i_{n_\ell} = j_{n_\ell} = k_{n_\ell}, \ell = 1,2,3,4, i_m \neq j_m \vee i_m \neq k_m$
$\vee j_m \neq k_m, m \in \{1,\dots,10\} \setminus \{n_1,n_2,n_3,n_4\}\}$

$|B| = \binom{10}{4} \cdot 10^4 \cdot (10^3-10)^6$

$\binom{10}{4}$ mögl. n_1,n_2,n_3,n_4; 10^4 Tripel (i,i,i); $(10^3-10)^6$ Tripel $\neq (i,i,i)$

$P(B) = \frac{\binom{10}{4} \cdot 10^4 \cdot (10^3-10)^6}{(10^3)^{10}}$ $\qquad (10^3)^{10} = (10^3)^4 \cdot (10^3)^6$

$= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{10}{1000}\right)^4 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^6$

② $\Omega = \{(x_1,\dots,x_k) \mid 1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le n\}$ $|\Omega| = \binom{n}{k}$

$A = \{(x_1,\dots,x_k) \in \Omega \mid x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 < \dots < x_k - (k-1)\}$,

falls $k \le n - (k-1)$, also $n \ge 2k-1$ $\quad x_1 < x_2 - 1, x_2 < x_3 - 1, \dots, x_{k-1} < x_k - 1$

$A = \emptyset$, falls $n \le 2k-2 \Rightarrow P(A) = 0$

Sei $n \ge 2k-1$:

Betrachte Abb. $f: A \to A'$ mit

$A' = \{(y_1,\dots,y_k) \mid 1 \le y_1 < y_2 < \dots < y_k \le n-k+1\}$

bijektiv

def durch $f(x_1,\dots,x_k) := (x_1, x_2-1, x_3-2, \dots, x_k-(k-1))$

fixe Anordnung $\Rightarrow |A| = |A'| = \binom{n-k+1}{k}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n-k+1}{k}}{\binom{n}{k}}$$

(3) a) $\Omega_n = \{1,\dots,n\}^n$

Interpretation: $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ bedeutet, daß Ei mit ω_i im i-ten Versuch gefangen wurde. $|\Omega_n| = n^n$

$A_{k,n}$ sei das Ereignis, daß k markierte Eier bedeutet gefangen wurden, also $A_{k,n} = \{\omega \in \Omega \mid |\{i \in \{1,\dots,n\} \mid \omega_i \le 5\}| = k\}$

Zur Vereinfachung der Notation seien die markierten Eier die Nummern $1,\dots,k$.

Behauptung

$$|A_{k,n}| = \begin{cases} n^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}, & k \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis per Ind. über n

$n=1$: $A_{0,1} = \{(2),\dots,(n)\}$ $A_{1,1} = \{(1),\dots,(1)\}$

$A_{2,1} = \emptyset$ für $k \notin \{0,1\}$

$$\Rightarrow |A_{k,1}| = \begin{cases} n-1, & k=0 \\ 1, & k=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$n \to n+1$: $n \to$ Möglichkeiten im $(n+1)$-ten Versuch ein markiertes Ei zu fangen

$$\Rightarrow |A_{k,n+1}| = (n-1)\,|A_{k,n}| + 1\cdot|A_{k-1,n}|$$

$$\overset{\text{IV}}{=} (n-1)\,n^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} + 1\cdot n^n \binom{n}{k-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k+1}$$

$$= n^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} \left[(n-1)\binom{n}{k}\frac{1}{n} + 1\cdot\binom{n}{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= n^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}}$$

$$P(A_{k,n}) = \frac{|A_{k,n}|}{|\Omega_n|} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$ (binomialverteilt)

Aufg. 1 (6)

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ wird $P(A_{k,n})$ maximal?

Wir betrachten $f(x) = x^k (1-x)^{n-k}$ für $x \in [0,1]$

Für $0 < k < n$ gilt

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1} (1-x)^{n-k} + (n-k) x^k (1+x)^{n-k-1}$$

$$= x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \left[k(1-x) - (n-k)x \right]$$

$$= \underbrace{x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}} \cdot (k - \cancel{kx} - nx + \cancel{kx})$$

$$\begin{cases} > 0 & \text{falls} \quad x < \frac{k}{n} \\ = 0 & \text{falls} \quad x = \frac{k}{n} \\ < 0 & \text{falls} \quad x > \frac{k}{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f streng monoton wachsend für $x < \frac{k}{n}$

maximal für $x = \frac{k}{n}$

streng monoton fallend für $x > \frac{k}{n}$

Von $f\left(\frac{k}{n}\right)$ über $n \in \mathbb{N}$ zu maximalen Werten für n,

für welche $\frac{k}{n}$ zu $\frac{k}{2n}$ näher ist. $n^* = \left\lfloor \frac{k}{\frac{k}{2}} \right\rfloor$ oder $n^* = \left\lceil \frac{k}{\frac{k}{2}} \right\rceil$.

$\Rightarrow$

Es nachdem, ob $f\left(\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor\right)$ oder $f\left(\left\lceil \frac{2n}{k} \right\rceil\right)$ größer ist.

Im Fall $k = n$ gilt

$P(A_{k,n}) = \left(\frac{k}{n}\right)^k$, was für $\frac{k}{n} = 1$, also $n^* = $ maximal wird.

Im Fall $k = 0$ gilt

$P(A_{k,n}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend

Folge $\Rightarrow n^* = \infty$

$n^* \in \left\{ \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\}$

Stochastik 2000

Übung 2

Eds-URÜ

④ $\mathcal{U}_\mathcal{L} \cap B$ ist σ-Algebra über B

i) $B = B \cap \Omega \in \mathcal{U}_\mathcal{L} \cap B$

ii) $B \cap A \in B \cap \mathcal{U}_\mathcal{L}$

$\Rightarrow B \setminus (B \cap A) = B \setminus B \cup B \setminus A = B \setminus A = B \cap \underbrace{A^c}_{\in \mathcal{U}_\mathcal{L}} \in B \cap \mathcal{U}_\mathcal{L}$

iii) $B \cap A_n \in B \cap \mathcal{U}_\mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) = B \cap \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)}_{\in \mathcal{U}_\mathcal{L}} \in B \cap \mathcal{U}_\mathcal{L}$

⑤ a) i) $\forall i \in I$: $\Omega \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{U}_\mathcal{L}$

ii) $A \in \mathcal{U}_\mathcal{L} \Rightarrow A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i}$

$\Rightarrow \forall i \in I: A \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} \Rightarrow \forall i \in I: A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{U}_\mathcal{L}$

iii) $\forall k \in \mathbb{N}: A_k \in \mathcal{U}_\mathcal{L} \Rightarrow \forall i \in I, k \in \mathbb{N}: A_k \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i}$

$\Rightarrow \forall i \in I: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{U}_\mathcal{L}$

b) Klein: $I = \{1,2\}$, $\Omega = \{1,2,3\}$

$\mathcal{U}_{\mathcal{L}_1} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathcal{U}_{\mathcal{L}_2} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathcal{U}_{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{U}_{\mathcal{L}_2} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathcal{U}_{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{U}_{\mathcal{L}_2}$ ist keine σ-Algebra, da $\{1\} \cap \{2,3\} = \{\} \notin \mathcal{U}_{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{U}_{\mathcal{L}_2}$

⑥ $\Omega = \{(v_1, \dots, v_m) \in \{1, \dots, n\}^m \mid v_1 < v_2 < \dots < v_m\}$

Interpretation: $v = (v_1, \dots, v_m)$ codiert, daß die Kugeln $v_1, \dots, v_m$ in der Urne sind. $|\Omega| = \binom{n}{m}$

$A_k^n = \{v \in \Omega \mid v_k \leq n, v_{k+1} > n\}$ (Kugel $1, \dots, k$ weiß)

A_k^n: genau k weiße Kugeln in der Urne

$|A_k^n| = \binom{n}{k} \binom{n-n}{m-k} \Rightarrow P(A_k^n) = \underbrace{\binom{n}{k}\binom{n-n}{m-k}}_{\binom{n}{m}}$ $k = 0, 1, \dots, m$

hypergeom. Verteilung

Konv.: $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$!

Bestimme nun n^*, so daß $P(A_{\ell_2}^n)$ maximal wird.

Dazu betrachten wir für $n > 1$, $\ell_2 \le 3$

$$\frac{P(A_{\ell_2}^n)}{P(A_{\ell_2}^{n-1})} = \frac{\binom{3}{\ell_2}\binom{n-3}{m-\ell_2}\binom{n-1}{m}}{\binom{3}{\ell_2}\binom{n-1-3}{m-\ell_2}\binom{n}{m}} = \frac{(n-3)!\,(n-1-3-m+\ell_2)!\,(3-\ell_2)!\,(n-1)!\,(n-m)!\,m!}{(n-1-3)!\,(n-3-m+\ell_2)!\,(m-\ell_2)!\,n!\,(n-1-m)!\,m!}$$

$$= \frac{(n-3)(n-m)}{(n-3-m+\ell_2)n} = \frac{n^2-3n-mn+m3}{n^2-3n-mn+m\ell_2} \overset{!}{\ge} 1$$

$$\Leftrightarrow n^2-3n-mn+m3 \ge n^2-3n-mn+m\ell_2$$

$$\Leftrightarrow m3 \ge m\ell_2 \qquad \Leftrightarrow n \le \frac{m3}{\ell_2}$$

Ein $n \le \frac{m3}{\ell_2}$ vergrößert $P(A_{\ell_2}^n)$ also monoton, für $n \ge \frac{m3}{\ell_2}$ fällt $P(A_{\ell_2}^n)$ monoton.

$\Rightarrow n^* = \lfloor \frac{m3}{\ell_2} \rfloor$ (ähnliches Ergebnis wie in Aufgabe 3)

Für $\ell_2 = 0$ folgt wieder $n^* = \infty$.

(2) 1) $P([a,a]) = a-a$ 2) $P(A+x) = P(A)$ 3) $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

a) $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

i) $x \sim y$: $x-x = 0 \in \mathbb{Q}$

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$: $x \sim y \Rightarrow x-y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y-x = -(x+y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \sim x$

iii) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x-y \in \mathbb{Q}, y-z \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x-z = (x-y)+(y-z) \in \mathbb{Q}$

b)(i) $\exists \alpha,\beta: A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists x: x \in A_\alpha \cap A_\beta$

$\Rightarrow x = a_\alpha + r_\alpha = a_\beta + r_\beta$ [$a_\alpha, a_\beta \in A$]

$\Rightarrow a_\alpha - a_\beta + r_\beta - r_\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_\alpha \sim a_\beta \Rightarrow a_\alpha = a_\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Die A_α sind paarw. disjunkt.

Annahme $P(A) > 0$
$\Rightarrow \sum_{q\in\mathbb{N}} P(A) = \infty$
$P(A) = 0 \Rightarrow \sum_{q\in\mathbb{N}} P(A) = 0$

(ii) Sei $x \in [2/5, 3/5] \Rightarrow x \in B \Rightarrow \exists a \in A: A \ni x$ [A enthält aus jeder Äquivalenzklasse ein Element]

$\Rightarrow x - a =: r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in [-\frac{1}{15}, \frac{1}{15}] = [\frac{2}{5}-\frac{2}{3}, \frac{3}{5}-\frac{1}{3}]$

$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}: r = r_q \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}: x \in A_q \Rightarrow x \in \bigcup_{q\in\mathbb{N}} A_q$

$[2/5, 3/5] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{N}} A_q$

(iii) $\sup_{q\in\mathbb{N}} A_q = \sup_q A + r_q \le \sup B + 1/3 =$

$\inf A_q = \inf A + r_q \ge \inf B - 1/3 = 0$

c) Kolmogorov: Ist P gesucht. Für $C \subset D \subset [0,1]$ gilt: $P(D) \overset{2}{=} P(D\setminus C) + P(C)$

$\Rightarrow P(C) \le P(D)$ (*) Also gilt: $\frac{1}{3} \overset{*}{\le} P([2/5, 3/5]) \overset{*}{\le} P(\bigcup_{q\in\mathbb{N}} A_q) \overset{3}{=} \sum_{q\in\mathbb{N}} P(A_q) \overset{2}{=} P([0,1]) = 1$

Stochastik 2000

Übung 3

Übs-VRG

(8) aus Def 2.10 (iii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

für paarw. disj. A_n folgt durch Setz von $A_n = \emptyset$ für $n > m$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$ für p.d. A_n

a) $1 \overset{(i)}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{(ii)}{=} P(A) + P(A^c)$

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

d) $P(B) \overset{A \subset B}{=} P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$

$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

e) $P(A \cup B) = P(A \cup B \setminus A) \overset{iii)}{=} P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$

$\overset{d)}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

c) $P(B \setminus A) \overset{d)}{=} P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(9) $\Omega = \{1, \dots, n\}^r$ Interpretation: $w = (w_1, \dots, w_r)$

Kugel i gefällt w_i $|\Omega| = n^r$ $N := \{1, \dots, r\}$

A_k : Baum k bleibt unbefallen

$A_k = \{w \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, r\} : w_i \neq k\}$

B : alle Bäume wurden befallen

$\Rightarrow B^c$: mindestens ein Baum bleibt unbefallen

$B^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ $P(B^c) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{T \subset N \\ |T| = j}} P\left(\bigcap_{k \in T} A_k\right)$

$\bigcap_{k \in T} A_k = \{w \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, r\} : w_i \notin T\}$

$\left|\bigcap_{k \in T} A_k\right| = (n - |T|)^r$ $P\left(\bigcap_{k \in T} A_k\right) = \frac{(n - |T|)^r}{n^r}$

$P(B^c) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r}$

$P(B) = 1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r} = 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r}$

$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r}$

(10) Beweis des Einschlusses

$\bigcap_{i\in\emptyset} A_i := \Omega \qquad \bigcup_{i\in\emptyset} A_i := \emptyset$

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)^c\right) = P(A) - P\left(A \cap \bigcup_{t\in T} B_t\right) = P(A) - P\left(\bigcup_{t\in T}(B_t \cap A)\right)$$

Siebformel $= P(A) - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{S\subset T \\ |S|=i}} P\left(\bigcap_{s\in S}(B_s \cap A)\right)$

$$= P(A) - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{S\subset T \\ |S|=i}} P\left(\left(\bigcap_{s\in S} B_s\right) \cap A\right) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \sum_{\substack{S\subset T \\ |S|=i}} P\left(A \cap \bigcap_{s\in S} B_s\right)$$

$$P(E_k) = P\left(\bigcup_{\substack{T\subset N \\ |T|=k}} \left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap \bigcap_{j\in T^c} A_j^c\right)\right) \overset{\text{disj. Vereinig.}}{=} \sum_{\substack{T\subset N \\ |T|=k}} P\left(\underbrace{\bigcap_{j\in T} A_j}_{A} \cap \underbrace{\bigcap_{j\in T^c} A_j^c}_{\left(\bigcup_{j\in T^c} A_j\right)^c \text{ DeMorgan}}\right)$$

$|T^c| = n-k$

Hinweis $= \sum_{\substack{T\subset N \\ |T|=k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \sum_{\substack{S\subset T^c \\ |S|=i}} P\left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap \bigcap_{s\in S} A_s\right)$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \sum_{\substack{T\subset N \\ |T|=k}} \sum_{\substack{S\subset T^c \\ |S|=i}} P\left(\bigcap_{j\in T\cup S} A_j\right) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} \sum_{\substack{U\subset N \\ |U|=k+i}} P\left(\bigcap_{j\in U} A_j\right)$$

Indexverschiebung $i \leftarrow i-k$

$$= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \sum_{\substack{U\subset N \\ |U|=i}} P\left(\bigcap_{j\in U} A_j\right)$$

(11) a) $\Omega = \{((m_1,k_1),\dots,(m_n,k_n)) \mid \forall i \in \{1,\dots,n\}: m_i, k_i \in \{1,\dots,n\},\ \forall i\neq j: m_i \neq m_j,\ k_i \neq k_j\}$

Interpretation: $\omega_i = (m_i, k_i)$ für $i \neq j$: Ball i kommt in Urne m_i und ist dort k_i-ter

$|\Omega| = (n!)^2$

A_i: Urne i enthält keinen Ball und zwei Bälle.

$A_i = \{\omega \in \Omega \mid m_i = k_i = i\}$

B: mindestens eine Urne enthält keinen Ball und zwei Bälle

$\Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad P(B) \overset{\text{Siebformel}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{T\subset N \\ |T|=i}} P\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right)$

$\bigcap_{j\in T} A_j = \{\omega \in \Omega \mid \forall j\in T: m_j = k_j = j\} \Rightarrow \left|\bigcap_{j\in T} A_j\right| = ((n-|T|)!)^2$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) = \frac{((n-|T|)!)^2}{(n!)^2}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{T \subset [n] \\ |T|=i}} \frac{((n-|T|)!)^2}{(n!)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{((n-|T|)!)^2}{(n!)^2} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{(n-i)!}{i!}$$

a) $|P(B)| \leq \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \to \frac{e-1}{n} \to 0$

b) $P(E_2) \overset{1.10}{=} \frac{1}{2!\,n!} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \frac{(n-i)!}{(i-2)!}$

Stochastik 2000

Übung 4

(12) Ereignisse

PG: Punkt gesendet — PE: Punkt empfangen

SG: Strich gesendet — SE: Strich empfangen

bekannte $P(PG) = \frac{2}{7}$ $P(SG) = \frac{5}{7}$

$P(PE|SG) = P(SE|PG) = \frac{1}{8}$

gesucht: $P(PG|PE)$ und $P(SG|SE)$

Bayes $P(PG|PE) = \frac{P(PG \wedge PE)}{P(PE)} = \frac{P(PE|PG)\,P(PG)}{P(PE|PG)\cdot P(PG) + P(PE|SG)\,P(SG)}$

$P(PE|PG) = 1 - P(SE|PG) = \frac{7}{8}$

$P(SE|SG) = 1 - P(PE|SG) = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow P(PG|PE) = \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7}} = \frac{14}{19}$

$P(SG|SE) = \frac{P(SE|SG)\,P(SG)}{P(SE|SG)P(SG) + P(SE|PG)\,P(PG)} = \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}} = \frac{20}{27}$

gesuchte W'raum $\Omega = \{0,1,2,3\}$ $\mathcal{U} = P(\Omega)$

(13) a) meine Menge: $\Omega = \{a,b,c\}$ $\mathcal{U} = P(\Omega)$ $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$

$\{\omega\} = \omega$ wird gesendet

B: Qu. Zeichen nennt B $\Rightarrow B = \{a,c\}$

$P(\{a\}|B) = \frac{P(\{a\})}{P(\{a,c\})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

b) $\Omega = \{(a,a),(a,c),(b,c),(c,b)\}$

Interpretation $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ Buchst. ω_1 wird gesendet, bekannt ω_2

bekannt: $P(\{(b,c)\}) = P(\{c,b\}) = P(\{(a,b),(c,c)\}) = \frac{1}{3}$

also $P(\{(a,c)\}) + P(\{a,c\}) = \frac{1}{3}$. Es ist nicht bekannt, wie die elementaren W'keiten aussehen. Man weiß nicht, wie oft ein Buchstabe vorkommt, wenn der Code aus 4 Zeichen besteht.

c) Es sei $P(\{a,b\}) = p$, also $P(\{(a,a),(a,c)\}) = \frac{1-p}{3}$

A: A wird gesendet $A = \{(a,b),(a,c)\}$

B: Qu. Zeichen nennt b $B = \{(a,b),(c,b)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(6,6)\})}{P(\{(4,6),(5,6),(6,6)\})} = \frac{1}{3}$$

Für $n = \frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Für $n > \frac{1}{2}$ ist

$\frac{n}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ ...

$\Omega = \{1,\dots,6\}^2$, $|\Omega| = 6^2$

$E_i^j = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = j\}$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,\dots,6\}$

$|E_i^j| = 6$, $P(E_i^j) = \frac{1}{6}$

$P(E_1^{\omega_1} \cap E_2^{\omega_2}) = P(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = \frac{1}{36} = P(E_1^{\omega_1}) \cdot P(E_2^{\omega_2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

A: Augenzahl gerade $A = E_2^2 \cup E_2^4 \cup E_2^6$ $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

B: Augenzahl ≤ 2 $B = E_1^1 \cup E_1^2 \cup E_2^2$ $P(B) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

C: Summe der Augenzahlen $= 7$ $C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ $P(C) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cap B = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in \{2,4,6\}, \omega_2 \in \{1,3,5\}\}$ $|A \cap B| = 9$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap C = \{(5,2),(3,4),(1,6)\}$, $P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(C)$

$B \cap C = \{(1,6)\}$ $P(B \cap C) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(C)$

$A \cap B \cap C = \{(1,6)\}$ $\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{24} = P(A)P(B)P(C)$

(11) $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = X_j(i)\}) = \frac{1}{2^{|J|}}$

für $X_j(i) \in \{0,1\}$ und $X_j(i) \le i$

A_n: Ereignis, dass die ersten n Würfe $m = (m_1,\dots,m_L)$.

A: Ereignis, dass irgendwann m kommt $\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: irgendwann auf

$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) \ge \lim_{n \to \infty} P(A_n \mid \Omega)$

$= \lim_{n \to \infty} (1 - P(A_n^c \cap \Omega^c)) = 1 - \lim_{n \to \infty} P(\{\omega \in \Omega \mid \forall 1 \le i \le n \ \exists 1 \le j \le L : \omega_{i+j} = m_j\})$

$= 1 - \lim_{n \to \infty} P(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \le j \le L : \omega_{i+j} \neq m_j\})$

u.a. $= 1 - \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n-1} P(\{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \le j \le L : \omega_{i+j} \neq m_j\})$

$= 1 - \lim_{n \to \infty} (1 - 2^{-L})^n = 1$

(16) a) $A_k = \{$"Rote Kugel im k-ten Zug"$\}$ $\quad \Omega = \bigtimes_{n=1}^{\infty} \Omega_n$

$\Omega_k = \{ i \mid 1 \le i \le k+1 \}$, $i=1$: Kugel rot, $i \neq 1$: Kugel schwarz

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega_k|} = \frac{1}{1+1+k-1} = \frac{1}{1+k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} = \infty \quad \text{(divergent)}$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_{k\to\infty} \sup A_k\right) = 1$$ ✓

b) $A_k = \{$"Rote Kugel im k-ten Zug"$\}$ $\quad \Omega = \bigtimes_{n=1}^{\infty} \Omega_n$

$$\Omega_k = \{ i \mid 1 \le i \le 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} j}_{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \} = \{ i \mid 1 \le i \le 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \}$$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega_k|} = \frac{1}{1+1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}} = \frac{2}{2+2+k^2-3k+3} = \frac{2}{7+5+k^2-3k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{7+5+k^2-3k} < \infty \quad \text{(konvergent), da der quadratische Term am stärksten wächst und } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_{k\to\infty} \sup A_k\right) = 0$$ ✓

Endlich!!! Ich vermutete schon, in der Diskussion hätte keiner aufgepasst!

Stochastik 2000

Übung 5

(12) a) X Zufallsvariable $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}^1 : X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$

$\overset{(a,\infty) \in \mathcal{B}^1}{\Rightarrow} \forall q \in \mathbb{R} : \{X > q\} = X^{-1}((q,\infty)) \in \mathcal{U}$

Beweis des Hinweis

$\mathcal{K} := \{B \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{U}\}$ σ-Algebra

i) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{K}$

ii) $B \in \mathcal{K} \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{U} \Rightarrow (X^{-1}(B))^c = X^{-1}(B^c) \in \mathcal{U} \Rightarrow B^c \in \mathcal{K}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : X^{-1}(B_n) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(B_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{K}$

Nach Voraussetzung gilt nun $\forall q \in \mathbb{R} : \{X > q\} = X^{-1}((q,\infty)) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall \alpha \leq \beta \in \mathbb{R} : \{X > \alpha\} \cap \{X > \beta\}^c = X^{-1}((\alpha, \beta]) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall \alpha \leq \beta \in \mathbb{R} : (\alpha, \beta] \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow \mathcal{U}(\{(\alpha,\beta] \mid \alpha \leq \beta \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{K}$

$\Rightarrow B \in \mathcal{B}^1 : X^{-1}(B) \in \mathcal{U} \Rightarrow X$ Zufallsvariable

b) Fall 1: $\mathcal{L} = 0$ Zu zeigen: $\alpha \cdot X$ Zufallsvariable

$\forall B \in \mathcal{B}^1 \quad (\alpha X)^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & 0 \in B \\ \emptyset, & 0 \notin B \end{cases} \in \mathcal{U}$

Fall 2: $\mathcal{L} \neq 0$

X ZV $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X > \alpha\} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X > \alpha \mathcal{L}^{-1}(\alpha - a)\} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{\mathcal{L} X + a > \alpha\} \in \mathcal{U} \overset{a)}{\Rightarrow} \mathcal{L} X + a \in \mathcal{U}$

c) Z.z.: $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X^2 > \alpha\} \in \mathcal{U}$

$\alpha < 0 : \{X^2 > \alpha\} = \Omega \in \mathcal{U}$

$\alpha \geq 0 : \{X^2 > \alpha\} = \{X > \sqrt{\alpha}\} \cup \{X < -\sqrt{\alpha}\}$

$= X^{-1}(\underbrace{(\sqrt{\alpha}, \infty)}_{\in \mathcal{B}^1}) \cup X^{-1}(\underbrace{(-\infty, -\sqrt{\alpha})}_{\in \mathcal{B}^1}) \in \mathcal{U}$

(13) $\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$= \frac{1}{k!} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k}{n} (\lambda^k)$

$\overset{!!}{=}$ $\to 1$ $\to 1$ $\to 1$ $\to \lambda$

$$\prod_{k=1}^{n} i = \prod_{k=n-k+1}^{n} i = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \prod_{\ell=0}^{k-1}(n-\ell)$$

$$f_n = \binom{n}{n} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n p_n}{n}\right)^n$$

Voraussetzung: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n p_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

Satz: $f_n(x) \to f(x)$, $p_n := \frac{\lambda}{n} \to 0 \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$

es gilt festhalten:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ monotonfallend $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ stetig, $x_n \to x$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

f_n monoton $f_n(x+\varepsilon) \le f_n(x_n) \le f_n(x-\varepsilon)$

$n \to \infty$ $f(x+\varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) \le f(x-\varepsilon)$

$\varepsilon \to 0$ $f(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) \le f(x)$

Bsp: $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ monoton fallend in x mit $f(x) = e^{-x}$ stetig,

folgt die Behauptung.

(20) a) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$

$F(x) = P(X \le x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}$

1) $P(X > 100) = 1 - P(X \le 100) = 1 - F(100) = e^{-100\lambda} = \frac{1}{e}$

2) $P(5 \le X \le 100) = P(X \le 100) - P(X < 5) \overset{\text{stetig}}{=} P(X \le 100) - P(X \le 5)$

$= F(100) - F(5) = 1 - e^{-100\lambda} - 1 + e^{-5\lambda} = e^{-5\lambda} - e^{-100\lambda}$

3) $P(X = 100) = P(X \le 100) = F(100) = 1 - e^{-100\lambda} = 1 - e^{-1/2}$

4) $P = P(X \le x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - \mu = e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \ln(1-\mu) = -\lambda x \Rightarrow x = \frac{-\ln(1-\mu)}{\lambda} = -100 \ln(1-\mu)$

$\mu = 0.5 \Rightarrow x = 69{,}315$ $\quad \mu = 0.9 \Rightarrow x = 230{,}26$

(11) a) $F_X(x) = P(X \le x) \in [0,1]$

b) i) $x < y$: $F_X(x) = P(X \le x) = P^X((-\infty, x]) \overset{\text{Satz}}{=} P^X((-\infty, y])$

$= P(X \le y) = F_X(y)$

ii) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \le x) = \lim_{x \to +\infty} P^X((-\infty, x])$

$x_n = n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \to \infty} P^X((-\infty, n]) = \lim_{n \to \infty} P^X\left(\bigcup_{i=1}^{n} (-\infty, i]\right)$

$\overset{\text{Satz}}{=} P^X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = P^X(\mathbb{R}) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to -\infty} P^X((-\infty, x]) = \lim_{n \to \infty} P^X((-\infty, -n])$

$= \lim_{n \to \infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, -i]\right) \overset{\text{Satz}}{=} P^X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = P^X(\emptyset) = 0$

iii) $x_n \downarrow x_0$ für $n \to \infty$

$F_X(x_0) = P^X((-\infty, x_0]) = P^X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) \overset{\text{Satz}}{=} \lim_{n \to \infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, x_i]\right)$

$= \lim_{n \to \infty} P^X((-\infty, x_n]) \overset{(x_n) \text{ beliebig}}{=} \lim_{x \downarrow x_0} P^X((-\infty, x])$

$= \lim_{x \downarrow x_0} P(X \le x) = \lim_{x \downarrow x_0} F_X(x)$

c) $F_{-X}(x) = P(-X \le x) = P^X([-x, \infty)) \overset{\text{Satz}}{=} P^X((-\infty, x])$

$= P(X \le x) = F_X(x)$

Stochastik 2000

Übung 6

Aufgabe 21:

$$P([y,\infty)) = P([x+y,\infty) \mid [x,\infty)) = \frac{P([x+y,\infty) \cap [x,\infty))}{P([x,\infty))} = \frac{P([x+y,\infty))}{P([x,\infty))}$$

$$\Rightarrow P([x+y,\infty)) = P([x,\infty)) \cdot P([y,\infty))$$

a) $T = \mathbb{N}_0$

sei $n \geq 2$: $P([n,\infty)) = P([n-1,\infty)) \cdot P([1,\infty))$

Induktion VRÜ $= P([1,\infty))^n$

Setze $q := P([1,\infty)) = 1 - P(\{0\}) \leq 1$ für $n \geq 1$ folgt

$P(\{n\}) = P([n,\infty)) - P([n+1,\infty))$

$= q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) \overset{p=1-q}{=} (1-p)^n p$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : P(\{n\}) = (1-p)^n p$

$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n p + p = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n p = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : P([n,\infty)) > 0$

$\Rightarrow 0 < p < 1 \Rightarrow Geo(p)$

b) F stetig

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ : P([x,\infty)) = P(\{x\}) + P((x,\infty))$

$= P((x,\infty))$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ : P([x,\infty)) = 1 - F(x) =: \bar{F}(x)$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}_+ : \bar{F}(x+y) = \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(y)$

F stetig, $F \neq 0$ $\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : \bar{F}(x) = e^{\mu x}$

Annahme: $\mu > 0 \Rightarrow \bar{F}$ streng monoton wachsend ↯ F VF

$\Rightarrow \bar{F} \equiv 1 \Rightarrow F \equiv 0$ ↯ F VF

~~$\mu = 0$~~

$\Rightarrow \mu < 0$, setze $\lambda := -\mu$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow Exp(\lambda)$

Aufgabe 22

Beh.: $G_X^{(k)}(z) = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (i-j) \right) p_i z^{i-k}$

$p_i = P(X=i)$

Beweis per Induktion

$k=0$: $G_X^{(0)}(z) = G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{-1} (i-j) \right) p_i z^{i-0}$

$k \to k+1$: $G_X^{(k+1)}(z) = \left(G_X^{(k)} \right)'(z) = \sum_{i=k}^{\infty} (i-k) \left(\prod_{j=0}^{k-1} (i-j) \right) p_i z^{i-k-1}$

$= \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k} (i-j) \right) p_i z^{i-(k+1)}$

$z := 0$

$G_X^{(k)}(0) = k! \, p_k z^0 = k! \, p_k$

$\Rightarrow p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

b) $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

$G_X(0) = G_X^{(0)}(0) = 0! \, p_0 = p_0$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Aufgabe 23:

a) $p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k}$

$= (pz + 1 - p)^n$

b) $p_i = \frac{1}{i(i+1)} \qquad i \in \mathbb{N}$

$p_i \geq 0$ ✓

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

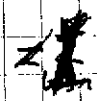
$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} z^{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

$$= \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z\right)$$



Hinweis

$$= -\ln(1-z) + \ln(1-z)\cdot\frac{1}{z} + 1$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)\ln(1-z)$$

Aufgabe 24:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x c\,x\,y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} c x y^2\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} c x^3\,dx = \left[\frac{1}{8} c x^4\right]_0^1 = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$$

Randdichten

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy \cdot 1_{[0,1]}(x)\,dy$$

$$= \left[4xy^2 1_{[0,1]}(x)\right]_0^x = 4x^3 1_{[0,1]}(x)$$

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^1 8xy\,1_{[0,1]}(y)\,dx$$

$$= [4y - 4y^3] \cdot 1_{[0,1]}(y)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x 4t^3 \cdot 1_{[0,1]}(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^4 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_0^y (4t - 4t^3)\,1_{[0,1]}(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 2y^2 - y^4 & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

Verteilungsfkt von (X,Y)

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

$$= \int_{0}^{\min(1,x)}\int_{0}^{\min(u,y)} 8uv\,dv\,du$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \text{ oder } y<0 \\ 1 & x>1 \text{ und } y>1 \\ x^4 & 0\le x\le 1 \quad y>x \\ 2y^2-y^4 & x>1 \quad 0\le y\le 1 \end{cases}$$

Sei also $0\le x\le 1$, $y\le x$

$$F(x,y) = \int_{0}^{y}\int_{0}^{u} 8uv\,dv\,du + \int_{y}^{x}\int_{0}^{y} 8uv\,dv\,du$$

$$= y^4 + 2y^2(x^2-y^2) = 2x^2y^2-y^4$$

$$F\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \neq \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{8}{9}-\left(\tfrac{2}{3}\right)^4\right) = F_X\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot F_Y\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ nicht stochastisch unabh.

Stochastik 2000

Übung 7

(25) X_n = Anzahl der Anrufe in Sekunde n

$X_n \sim \text{Poi}(\lambda)$

$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (Anzahl der Anrufe in n Sekunden)

a) $P(Y_n = k) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$

Beweis: Induktion

$n=1$: $P(Y_1 = k) = P(X_1 = k) \overset{\text{Vor.}}{=} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ✓

$n \to n+1$: $P(Y_{n+1} = k) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i = k\right) = \sum_{j=0}^{k} P(Y_n = k-j, X_{n+1} = j)$

$\overset{\text{s.u.}}{=} \sum_{j=0}^{k} P(Y_n = k-j) P(X_{n+1} = j) = \sum_{j=0}^{k} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$

$= \frac{e^{-(n+1)\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,j!} (n\lambda)^{k-j} \lambda^j = e^{-(n+1)\lambda} \frac{((n+1)\lambda)^k}{k!}$

b) $P(Y_{n_0} = k_0 \mid Y_n = k) = \frac{P(Y_{n_0} = k_0, Y_n = k)}{P(Y_n = k)}$

$= \frac{P(Y_{n_0} = k_0, \sum_{i=n_0+1}^{n} X_i = k - k_0)}{P(Y_n = k)} = \frac{P(Y_{n_0} = k_0) \cdot P(Y_{n-n_0} = k - k_0)}{P(Y_n = k)}$

$= \frac{e^{-\lambda n_0} \frac{(n_0\lambda)^{k_0}}{k_0!} \cdot e^{-\lambda(n-n_0)} \frac{((n-n_0)\lambda)^{k-k_0}}{(k-k_0)!}}{e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}}$

$= \frac{k!\, n_0^{k_0} (n-n_0)^{k-k_0}}{k_0!\,(k-k_0)!\, n^k}$

$= \binom{k}{k_0} \left(\frac{n_0}{n}\right)^{k_0} \left(\frac{n-n_0}{n}\right)^{k-k_0} \Rightarrow \text{Bin}\left(k, \frac{n_0}{n}\right)$

(26) L: Sekunden zwischen zufällig herausgegriffenen Anrufen

Annahme: $P(L<0) = 0$, $P(L=0) = 0{,}05$, $P(L \le x, L > 0) = 1 - e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow$ Verteilungsfkt. von L

$$F(x) = P(L \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0{,}05 & , x = 0 \\ 0{,}05 + (1 - e^{-\lambda x}) 0{,}95 & , x > 0 \end{cases}$$

Satz

$P(L \le x) = P(L \le x \mid L \le 0) P(L \le 0) + P(L \le x \mid L > 0) P(L > 0)$

$= 0 + 0{,}95 \cdot (1 - e^{-\lambda x}) + 1 \cdot 0{,}05$

Die Verteilungsfkt. ist rechtsstetig und hat [illegible]

$P(L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$, aber $P(L = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(27) X: Augenzahl von Würfel 1 Y: Augenzahl von Würfel 2

$S = X + Y$

$P(X=i) \overset{!}{=} \frac{1}{6}$ $i \in \{1,\dots,6\}$

$P(X=i) = x_i$ $P(Y=i) = y_i$ $i \in \{1,\dots,6\}$

$P(S=2) = x_1 y_1$
$P(S=12) = x_6 \cdot y_6$
$\Rightarrow$ $x_1 y_1 = x_6 y_6 = \frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{y_6}{y_1} = \frac{x_1}{x_6} =: z$

$\frac{1}{11} = P(S=7) = x_1 y_6 + x_6 y_1$
$= x_1 x_6 \frac{y_1}{y_1} + x_6 y_1 \frac{x_1}{x_1} = x_1 y_1 \left(\frac{y_6}{y_1} + \frac{x_6}{x_1}\right) = \frac{1}{11}\left(z + \frac{1}{z}\right)$
$\Leftrightarrow$ $z + \frac{1}{z} = 11$ ✓

(28) $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ X_i: Augenzahl im i-ten Wurf, N: Anzahl der Würfe

$P(S=s \mid N=n) = \frac{P(S=s, N=n)}{P(N=n)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = s, N=n\right)}{P(N=n)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = s, N=n\right)}{P(N=n)}$

$= \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) P(N=n)}{P(N=n)} = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) = P(S_n = s)$

a) $P(N=2 \mid S=4) = \frac{P(N=2, S=4)}{P(S=4)} = \frac{P(S=4 \mid N=2) P(N=2)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(S=4 \mid N=i) P(N=i)}$

$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6^4} \cdot \frac{1}{16}} = \frac{432}{2197}$

b) $P(S=4 \mid N \text{ ungerade}) = \frac{P(S=4, N \text{ ungerade})}{P(N \text{ ungerade})} = \frac{P(S=4, N=1) + P(S=4, N=3)}{P(N \text{ ungerade})}$

$= \frac{P(S=4 \mid N=1) P(N=1) + P(S=4 \mid N=3) P(N=3)}{P(N \text{ ungerade})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{216} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{216}}{\frac{3}{7}}$

$= \frac{7}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{108}\right) = \frac{19}{54}$

c) $P(N \le m) = \sum_{n=1}^{m} P(N=n \mid N=n) P(N=n) = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$ ✱

$P(N=m) = P(N \le m) - P(N \le m-1)$

Aufgabe 27:

Sei a_i die Wahrscheinlichkeit mit dem Würfel a die Zahl i zu würfeln und b_i die Wahrscheinlichkeit mit dem Würfel b die Zahl i zu würfeln.

Da alle Augensummen gleichwahrscheinlich sein sollen, gilt:

I: $a_1 \cdot b_1 = \frac{1}{11}$

II: $a_1 \cdot b_2 + a_2 b_1 = \frac{1}{11}$

III: $a_1 \cdot b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 = \frac{1}{11}$

IV: $a_1 \cdot b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 = \frac{1}{11}$

V: $a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 + a_5 b_1 = \frac{1}{11}$

VI: $a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 + a_6 b_1 = \frac{1}{11}$

VII: $a_2 b_6 + a_3 b_5 + a_4 b_4 + a_5 b_3 + a_6 b_2 = \frac{1}{11}$

VIII: $a_3 b_6 + a_4 b_5 + a_5 b_4 + a_6 b_3 = \frac{1}{11}$

IX: $a_4 b_6 + a_5 b_5 + a_6 b_4 = \frac{1}{11}$

X: $a_5 b_6 + a_6 b_5 = \frac{1}{11}$

XI: $a_6 b_6 = \frac{1}{11}$

Aus I-XI folgt: $a_1 \cdot b_1 = a_6 b_6 \Rightarrow \frac{a_1}{a_6} = \frac{b_6}{b_1} =: z > 0$, da $a_i, b_i > 0$

Aus VI-I folgt:

$$a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 + a_6 b_1 = a_1 b_1 \quad | : (a_6 \cdot b_1)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 b_6}{a_6 b_1} + \frac{a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2}{a_6 b_1} + \frac{a_6 b_1}{a_6 b_1} = \frac{a_1}{a_6}$$

$$\Rightarrow z^2 + \frac{a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2}{a_6 b_1} + 1 = z$$

$$\Rightarrow z^2 - z + 1 = -\frac{a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2}{a_6 b_1}$$

$$\Rightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2}{a_6 b_1} - \frac{3}{4} \quad | \text{dies ist}$$

nicht Lösbar in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ die Würfel kann man nicht geeignet

Stochastik 2000

Übung 8

8. ML

Aufgabe 30

$N \sim Poi(\lambda)$ $\quad T \sim Exp(\mu)$

a) gesucht $P(N \le 4, T < 50)$

$\overset{St.u.}{=} P(N<4)\,P(T<50)$

$= P(N \in [0,3])\,P(T \in [0,50))$

$= \left(e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^i}{i!}\right)\left(1 - e^{-50\mu}\right)$

$= 0{,}265026 \cdot 0{,}393469 = 0{,}104278$

b) gesucht $P(N \le 12, NT \le 300)$

$= \sum_{k=0}^{12} P(N=k, NT \le 300)$

$= \sum_{k=1}^{12} P\left(N=k, T \le \frac{300}{k}\right) + P(N=0)$

$= \sum_{k=1}^{12} P(N=k)\,P\left(T \le \frac{300}{k}\right) + P(N=0)$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{12} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - e^{-\frac{300\mu}{k}}\right) + e^{-\lambda} = 0{,}496726$

Aufgabe 31

a) $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$

$y<0$: $P(X_1+X_2 \le y) = 0 \Rightarrow f_{X_1+X_2}(y) = 0$

$y \ge 0$: $f_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t)\, f_{X_2}(y-t)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} e^{-\lambda t} 1_{(0,\infty)}(t) \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} (y-t)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(y-t)} \cdot 1_{(0,\infty)}(y-t)\, dt$

$= \int_0^y \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda t - \lambda(y-t)} t^{\alpha_1-1} (y-t)^{\alpha_2-1}\, dt$

$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} \cdot \int_0^y t^{\alpha_1-1} (y-t)^{\alpha_2-1}\, dt$

$\overset{t=s\cdot y}{=} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} \int_0^1 y^{\alpha_1-1} s^{\alpha_1-1} (y-sy)^{\alpha_2-1} \cdot y\, ds$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} \int_0^1 y^{\alpha_1} s^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-s)^{\alpha_2-1} \, ds$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 s^{\alpha_1-1} (1-s)^{\alpha_2-1} \, ds$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-\lambda y} y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \quad \Rightarrow X_1+X_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$$

b) Zeige zunächst

$$Bin(n,p) * Bin(1,p) = Bin(n+1,p) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) f_{X_2}(k-i)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (1-p) + \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} p$$

$$= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] p^k (1-p)^{n-k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n-k+1} \qquad k = 0, \dots, n+1$$

Es folgt:

$$Bin(n,p) = \underbrace{Bin(1,p) * \dots * Bin(1,p)}_{n}$$

$$\Rightarrow Bin(n_1,p) * Bin(n_2,p) = (\underbrace{Bin(1,p) * \dots * Bin(1,p)}_{n_1}) * (\underbrace{Bin(1,p) * \dots * Bin(1,p)}_{n_2})$$

$$= Bin(n_1+n_2, p)$$

c) $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$, $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$

$$f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) \cdot f_{X_2}(k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \Rightarrow X_1+X_2 \sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)$$

d) $X_1, \dots, X_n$ st. unabh. $\sim Geo(p)$

$\Rightarrow P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k) = \binom{n+k-1}{n-1} (1-p)^k p^n$

Also: $\underbrace{Geo(p) * \dots * Geo(p)}_{n} = \overline{Bin}(n,p)$

Bew. Induktion

$n=1: P(X_1 = k) = \binom{k}{0} (1-p)^k p^1$ ✓

$n \to n+1$

$P(\sum_{i=1}^{n+1} X_i = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j) P(X_{n+1} = k-j)$

IV $\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{n-1} (1-p)^j p^n (1-p)^{k-j} p$

$= (1-p)^k p^{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{n-1}$

$\overset{\text{üb 2.4}}{=} \binom{n+k}{n} (1-p)^k p^{n+1}$

e) $X_1 \sim \overline{Bin}(n_1, p)$, $X_2 \sim \overline{Bin}(n_2, p)$

d) $\Rightarrow \overline{Bin}(n_1, p) * \overline{Bin}(n_2, p)$

$= \underbrace{(Geo(p) * \dots * Geo(p))}_{n_1} * \underbrace{(Geo(p) * \dots * Geo(p))}_{n_2}$

$= \overline{Bin}(n_1 + n_2, p)$

Aufgabe 32:

a) $z \geq 0$: $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(t, z-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(t+z-t) e^{-(t+z-t)} 1_{(0,\infty)}(t) 1_{(0,\infty)}(z-t)\, dt$

$= \int_0^z \frac{1}{2} z e^{-z}\, dt = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}$

$z < 0$: $P(X+Y \leq z) = 0 \Rightarrow f_{X+Y}(z) = 0$

b) $0 \le z \le 2$:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(t, z-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, \mathbb{1}_{[0,t]}(z-t)$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{t} \mathbb{1}_{[0,t]}(z-t)\, dt$$

$$= \int_{\frac{z}{2}}^{\min(1,z)} \frac{1}{t}\, dt$$

$$= [\log t]_{\frac{z}{2}}^{\min(1,z)}$$

$$= \begin{cases} \log \frac{z}{z} & z \ge 1 \\ \log 2 & z < 1 \end{cases} = \log \frac{2}{\max(1,z)}$$

$0 \le z-t \le t$

$\frac{z}{2} \le t \le \min(1,z)$

$z < 0 \Rightarrow f_{X+Y}(z) = 0$

$z > 2 \Rightarrow \mathbb{P}(X+Y \le z) = 1 \Rightarrow f_{X+Y}(z) = 0$

$$f_{X+Y}(z) = \log \frac{2}{\max(1,z)}\, \mathbb{1}_{[0,2]}(z)$$

Stochastik 2000

Übung 9

Stochs-VRÜ

Übungsleiter: Michael Schneider

Mo 17.7 $15^{00} - 16^{30}$ III

Di 18.7 $10^{00} - 11^{30}$ III

Mi 19.7 $10^{00} - 11^{30}$ III

Klausur: Do 20.7 $9^{00} - 11^{00}$ Anfänger ⇒ Ergebnis 24.7 12^{00}
Einsicht $14^{30} - 15^{30}$ SG12

(33) Poisson-Prozess:

$N(1)$: Anzahl der Programme, die im Zeit $t+1$ abgearbeitet werden können

$\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ist PP(2)

$N(3) \sim Poi(2 \cdot 3) \Rightarrow N(6) \sim Poi(12)$

$$0{,}95 \leq P(N(6) \geq n) = e^{-12} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{12^i}{i!} = 1 - e^{-12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{12^i}{i!}$$

$$\Rightarrow e^{-12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{12^i}{i!} \leq 0{,}05$$

$n=6 \Rightarrow 0{,}0458 < 0{,}05$

$n=7 \Rightarrow 0{,}0895 > 0{,}05 \Rightarrow n \leq 6$

alternative Lösung: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n,2)$ Bearbeitungszeit für n Programme

X_i ... $\sim Exp(2)$

$0{,}95 \leq P(S_n \leq 6) = \dots$

(32) $N \sim Poi(\mu)$, $M \sim Bin(N, p)$, $P^{M|N=n} = Bin(n, p)$

$$P(M=n, N-M=k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(M=n, N-M=k, N=j)\, P(N=j) \quad \text{(satz von viele)}$$

Satz von Lemma

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(M=n, M=j-k \mid N=j)\, P(N=j)$$

$$= P(M=n \mid N=n+k)\, P(N=n+k)$$

$$= \binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k e^{-\mu} \frac{\mu^{n+k}}{(n+k)!}$$

$$= \underbrace{\frac{(p\mu)^n}{n!} e^{-p\mu}}_{Poi(p\mu)} \cdot \underbrace{\frac{((1-p)\mu)^k}{k!} e^{-(1-p)\mu}}_{Poi((1-p)\mu)}$$

zeige: N, M
- $\exists$ gemeinsame Verteilung an, zeige dass sich die Zahl der Zufallsrichtungen zusammensetzt.

(34) $T : \begin{cases} (0,\infty) \to (0,\infty)^2 \\ (x_1,x_2) \mapsto (x_1 x_2, x_2) \end{cases}$ $\quad T^{-1}(a,b) = \left(\frac{a}{b}, b\right)$

$T^{-1}(T(x_1,x_2)) = T^{-1}(x_1 x_2, x_2) = (x_1, x_2)$
$T(T^{-1}(a,b)) = T\left(\frac{a}{b}, b\right) = (a,b)$
$\Rightarrow T$ bij $\subset (0,\infty)^2$ ✓

$\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) = \det\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_2 \neq 0$ ✓

$f_{(x_1 x_2, x_2)}(y,t) = \frac{1}{t} f_{(x_1,x_2)}\left(\frac{y}{t}, t\right)$

$f_{x_1 x_2}(y) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_{(x_1,x_2)}\left(\frac{y}{t}, t\right) dt$

$= \int_0^\infty \frac{1}{t} f_{x_1}\left(\frac{y}{t}\right) f_{x_2}(t)\, dt$

Aufg 35

a) $E[aX+bY] = \sum_{x,y} (ax+by)\, P(X=x, Y=y)$

$= \sum_{x,y} ax\, P(X=x, Y=y) + \sum_{x,y} by\, P(X=x, Y=y)$

$= a \sum_x x\, P(X=x) + b \sum_y y\, P(Y=y)$

$= a\, E[X] + b\, E[Y]$

b) $X \le Y \Rightarrow Y - X \ge 0$

$\Rightarrow E[Y-X] = \begin{cases} \sum_{x,y} (y-x)\, P(X=x, Y=y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\, f(x,y)\, dy\, dx \end{cases} \ge 0$

$\overset{\text{Lin.}}{\Rightarrow} E[Y] - E[X] \ge 0 \quad \Rightarrow \quad E[X] \le E[Y]$

Aufg 34 b)

Setze $T: \begin{cases} (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, x_2\right) \end{cases}$

$\Rightarrow T^{-1}(a,b) = (ab, b)$

$\overset{\text{wie a)}}{\Rightarrow}$ T ist bijektiv auf $(0,\infty)^2$

$\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2} \neq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}, x_2\right)$ abs. stetig mit Dichte

$f_{\left(\frac{x_1}{x_2}, x_2\right)}(z,t) = t \cdot f_{(x_1,x_2)}(zt, t)\, 1_{(0,\infty)^2}(z,t)$

$\overset{\text{s.u.}}{\Rightarrow} f_{\frac{x_1}{x_2}}(z) = \int_0^\infty t\, f_{x_1}(zt)\, f_{x_2}(t)\, dt\, 1_{(0,\infty)}(z)$

Lösungen Ü 9 2/3

Aufg 36

a) $E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$

$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{d}{d\lambda} \lambda^i}{(i-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda})$

$= \lambda (1+\lambda) = \lambda + \lambda^2$

$Var[X] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

b) $\text{Bin}(n,p) = \underbrace{Geo(p) * \dots * Geo(p)}_{n}$

$Y_i \sim Geo(p) \quad i = 1, \dots, n \quad$ st. u.

$X := \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = n E[Y_1] = \frac{n(1-p)}{p}$

$E[Y_1^2] = E[Y_1(Y_1-1) + Y_1] = E[Y_1(Y_1-1)] + E[Y_1]$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) q^k p + \frac{q}{p}$

$= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + \frac{q}{p}$

$= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial q^2} q^k + \frac{q}{p}$

$= pq^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{k=2}^{\infty} q^k + \frac{q}{p}$

$= pq^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{q^2}{1-q} + \frac{q}{p}$

Lösungen Ü 5 3/3

$$= pq^2 \frac{d}{dq} \frac{2q(1-q)+q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{d}{dq} \frac{2q-q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{(2-2q)(1-q)^2 + 2(1-q)(2q-q^2)}{(1-q)^4} + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{(2-2q)(1-q) + 2(2q-q^2)}{(1-q)^3} + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{2}{p^3} + \frac{q}{p} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$\mathrm{Var}[Y_1] = \mathbb{E}[Y_1^2] - (\mathbb{E}[Y_1])^2 = \frac{2q^2+pq-q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] \overset{\text{s/u.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Y_i] = n\,\mathrm{Var}[Y_1] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

c) $$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \frac{R^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-Rx}\,dx$$

$$= \frac{R^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^\lambda e^{-Rx}\,dx$$

$$= \frac{R^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{R^{\lambda+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{R^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} x^\lambda e^{-Rx}\,dx}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda}{R}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{R^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-Rx}\,dx$$

$$= \frac{R^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+2)}{R^{\lambda+2}} \int_0^\infty \frac{R^{\lambda+2}}{\Gamma(\lambda+2)} x^{\lambda+1} e^{-Rx}\,dx = \frac{(\lambda+1)\lambda}{R^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] = \frac{(\lambda+1)\lambda}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R^2} = \frac{\lambda}{R^2}$$

d) $$\mathbb{E}(X^+) = \int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi} \ln(1+t^2) = \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X] \not\exists$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] \not\exists$$

Stochastik 2000

Übung 10

Ex 4 – UR Übg

(4) $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_n \quad n \in \mathbb{N}$

$A_n \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{1+\mu}\right)$

$X_n \sim \mathrm{Geo}(1-\pi)$

$P(X_{n+1} = k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k \mid A_n = \ell) P(A_n = \ell)$ $\quad \max(0, X_n - 1)$

$= \sum_{\ell=0}^{\infty} P((X_n - 1)^+ + A_n = k \mid A_n = \ell) P(A_n = \ell)$

$= \sum_{\ell=0}^{\infty} P((X_n - 1)^+ + \ell = k) P(A_n = \ell)$

unendliche Zahlenreihe → endliche Zahlenreihe ($n \to k$)

$= \sum_{\ell=0}^{k} P((X_n - 1)^+ = k - \ell) \left(1 - \frac{1}{1+\mu}\right)^{\ell} \frac{1}{1+\mu}$

Umformung und Fall $\ell = 0$ raus → $\sum_{\ell=0}^{k-1}$

$= \sum_{\ell=0}^{k-1} P(X_n = k - \ell + 1) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{\ell} \frac{1}{1+\mu} + P(X_n - 1)^+ = 0) \cdot \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{k} \frac{1}{1+\mu}$

$= \sum_{\ell=0}^{k-1} (1 - (1-\lambda))^{k-\ell+1} (1-\lambda) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{\ell} \frac{1}{1+\mu} + (1-\lambda) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{k} \frac{1}{1+\mu}$

$= \lambda^{k+1} \frac{(1-\lambda)}{1+\mu} \sum_{\ell=0}^{k} \lambda^{-\ell} \frac{\mu^{\ell}}{(1+\mu)^{\ell}} + \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{k}$

$= \lambda^{k+1} \frac{(1-\lambda)}{(1+\mu)} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{1+\mu}} + \frac{1-\mu}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{k} = \ldots = (1 - (1-\lambda))^{k} (1-\lambda)$

(5) $P(|\bar{X} - \mu| \le \varepsilon) \ge 0.9 \iff P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \le 0.1$

a) $X_1, \ldots, X_n$ [illegible] $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ $\quad$ Varianz ²

$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}$

Kein Lösen: $P(|\bar{X} - \mu| \le \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon \le \bar{X} - \mu \le \varepsilon) = 1 - P\left(-\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5} \le \frac{\sqrt{n}}{1,5}(\bar{X} - \mu) \le \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{1,5}\right)$ $\quad \frac{\sqrt{n}}{1,5}$

näherungsweise $\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right)\right]$

$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right)\right]$ $\quad$ wegen Symmetrie

$= 2 - 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right)$

$\Rightarrow 2 - 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right) \le 0,1 \iff \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5}\right) \ge 0,95$

$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{1,5} \ge \Phi^{-1}(0,95) = 1,64 \iff n \ge \left(\frac{2,7 \cdot 1,64}{\varepsilon}\right)^2$

$\varepsilon = 0,1 \Rightarrow n \ge 1624$

b) $P(|\bar{X}-\mu|\geq c) \leq \frac{Var(\bar{X})}{c^2} = \frac{0,25}{n\cdot c^2} \leq 0,1$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{0,25}{0,1\cdot c^2}$ $\quad c=0,1 \Rightarrow n = 62,5$

(3.2) X_n gemäß Aufgabe.

$P(X_n = n) = \frac{1}{1+n^2}$ $\quad P(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{1+n^2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$E(X_n) = \frac{1}{1+n^2}\cdot n + \frac{n^2}{1+n^2}\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2} = 0$

$Var(X_n) = E(X_n^2) - \underbrace{(E(X))^2}_{0} = \frac{1}{1+n^2}\cdot n^2 + \frac{n^2}{1+n^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n^2+1}{1+n^2} = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{n} Var(X_n) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \overset{\text{Satz 8.5}}{\Rightarrow}$ (X_n) genügt [illegible]

Erw-Tunnel-U

X zU mit Träger $T = \{-1, 0, 1\}$, $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

$g(x) = x^2$, $Y = g(X) = X^2$.

$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$

$E(X^2) = E(g(X)) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Y ist zU mit Träger $T' = \{0, 1\}$, $P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{3}$

$P(Y=1) = P(\{X \mid X^2 = 1\}) = P(\{X=-1\} \cup \{X=1\})$

$= P(X=-1) + P(X=1) = \frac{2}{3}$

$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$