Markus

Klausur

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Prof. B. Rauhut, SS89, Prüfungs- und Scheinklausur.
Von den 57 möglichen Punkten waren 18 zum Bestehen der Vordiplomsklausur (für Mathematiker) und 14 zum Erhalt des Übungsscheines (für Informatiker) nötig.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

In einer Urne befinden sich n Kugeln ($n \in \mathbb{N}$, n gerade), die mit den Nummern $1,\ldots,n$ versehen sind (also unterscheidbar). Aus der Urne wird k-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen ($k \leq n$), wobei die Nummern jeweils notiert werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß alle k notierten Nummern verschieden sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau r Kugeln mit einer geraden Nummer zu ziehen ($r \leq k$)?

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ und sei P definiert durch $P(\{\omega_1\})=x$, $P(\{\omega_2\})=y$, $P(\{\omega_3\})=\frac{1}{4}$ und $P(\{\omega_4\})=\frac{1}{8}$. Bestimmen Sie $x,y \in \mathbb{R}$, so daß (Ω,P) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, in dem die Ereignisse $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$ und $B=\{\omega_2,\omega_3\}$ stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Seien (Ω,P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A,B stochastisch unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) \iff P(A) = P(B) \text{ und } P(A) \in \{0,1\}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Gegeben seien zwei Urnen. In der ersten Urne befinden sich a rote und b weiße Kugeln, in der zweiten Urne c rote und d weiße ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$). Aus der ersten Urne wird eine Kugel gezogen und, ohne deren Farbe festzustellen, in die zweite Urne gelegt. Dann wird (nach kräftigem Mischen) aus der zweiten Urne eine Kugel gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gezogene Kugel weiß?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war auch die erste gezogene Kugel rot, wenn die zweite rot ist?

$$P(R1|R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Seien (Ω,P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen, $A_n\subset\Omega$ für $n\in\mathbb{N}$.

Zeigen Sie für $A := \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$:

a) Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, so folgt: $P(A) = 0$

b) Falls $P(A_n) = p \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ $(0\leq p\leq 1)$, so folgt: $P(A) > p$

Aufgabe 6 (7 Punkte):

Seien (Ω,P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X:\Omega\to\mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable, sowie $0<p<1$ fest.

Weiter seien $A_k:=\{X=k\}$, $B_k:=\{X\geq k\}$ $\forall\, k\in\mathbb{N}_0$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $P(A_k) = p(1-p)^k \quad \forall\, k\in\mathbb{N}_0$ (d.h. $X\sim geo(p)$)

b) $P(A_k|B_k) = p \quad \forall\, k\in\mathbb{N}_0$

Aufgabe 7 (4 Punkte):

Sei X eine $b(n,p)$-verteilte Zufallsvariable, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $0<p<1$.

a) Bestimmen Sie $\varphi_X(t) := E[t^X]$, $t>0$

b) Zeigen Sie:

i) $E[X] = \varphi_X'(1)$ $\left(= \frac{d}{dt}\varphi_X(t)\big|_{t=1}\right)$

ii) $Var(X) = \varphi_X''(1) + \varphi_X'(1) - [\varphi_X'(1)]^2$

Hinweis zu a) Setzen Sei für festes $t>0$: $g(x):=t^x$ und berechnen Sie $E[g\circ X]$.

Aufgabe 8 (6 Punkte):

a) Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitraum (Ω,P) und stochastisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$, je mit Verteilungsfunktion $F(x) = P(\{X_i\leq x\})$ $\forall\, 1\leq i\leq n$, $x\in\mathbb{R}$.

Weiter sei $X_{1:n}$ definiert durch

$$X_{1:n}(\omega) := \min(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)), \qquad \omega\in\Omega$$

Zeigen Sie:

Die Verteilungsfunktion $F_{1:n}$ von $X_{1:n}$ ist gegeben durch

$$F_{1:n}(x) = 1-[1-F(x)]^n \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

b) Seien $X_1,\ldots,X_n$ stochastisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $X_i\sim ex(\lambda)$, $1\leq i\leq n$, $(\lambda>0)$.

Bestimmen Sie die Verteilung von $X_{1:n}$.

Hinweis zu a) Sind $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, so ist

$\min(a_1,\ldots,a_n) = x \iff \exists\, j\in\{1,\ldots,n\} \ni a_j=x$

Aufgabe 9 (7 Punkte):

Gegeben sei die Dichtefunktion f einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) durch
$$f(x,y) = \begin{cases} kx(1-xy) & x\in[0,1],\ y\in[0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante $k\in\mathbb{R}$, sowie die Marginaldichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

b) Berechnen Sie $E[X]$, $E[Y]$, $Kov(X,Y)$.

c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 10 (4 Punkte):

Die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_{40}$ beschreiben die Füllgewichte von 40 Kartoffelsäcken nach der Ernte. Dabei seien $E[X_i]=50$, $Var(X_i)=25$, $1\le i\le 40$.

Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, daß das Gesamtfüllgewicht der 40 Säcke mindestens 1920 und höchstens 2080 [kg] beträgt.

Aufgabe 11 (6 Punkte):

Gegeben seien stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n$ mit $E[X_i] = \mu = E[Y_j]$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ und $Var(X_i) = \sigma_x^2 > 0$, $1\le i\le m$, $Var(Y_j) = \sigma_y^2 > 0$, $1\le j\le n$, $(n,m\in\mathbb{N})$.

Die Schätzfunktion δ sei definiert durch:

(*) $$\delta(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n) = a\sum_{i=1}^{m} X_i + b\sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Bestimmen Sie $a,b\in\mathbb{R}$ so, daß

i) δ erwartungstreu ist für $\mu\in\mathbb{R}$.

ii) δ unter allen erwartungstreuen Schätzfunktionen der Form (*) die kleinste Varianz besitzt.

Hinweis zu ii) Differentialrechnung!

Viel Spaß beim Rechnen...

Musterlösung zur Schein-/Vordiplomsklausur SoSe 89; Rauhut

Aufgabe 1:

$\Omega = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \{1; \dots ; n\} \right\}$

$|\Omega| = n^k$

a) $A = \{(\omega_1; \dots ; \omega_k) \in \Omega \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j;\ 1 \leq i, j \leq k\}$

$$|A| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}$$

b) $B = \left\{ \omega \in \Omega \mid \begin{array}{l} \omega_i \text{ gerade } \forall\, i \in I;\ |I| = r;\ I \subset \{1; \dots ; k\}; \\ \omega_j \text{ ungerade } \forall\, j \in \{1; \dots ; k\} \setminus I \end{array} \right\}$

$$|B| = \binom{k}{r} \left(\frac{n}{2}\right)^r \left(\frac{n}{2}\right)^{k-r} = \binom{k}{r} \left(\frac{n}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{k}{r}\left(\frac{n}{2}\right)^k}{n^k} = \frac{\binom{k}{r}}{2^k}$$

Aufgabe 2:

Erste Bedingung: $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

$$\Rightarrow x + y + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow x = \frac{5}{8} - y \qquad (1)$$

Zweite Bedingung: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

$$\Rightarrow P(\{\omega_3\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \cdot \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{8}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{4}\right) = xy + \frac{x}{4} + \frac{3y}{8} + \frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow xy + \frac{x}{4} + \frac{3y}{8} - \frac{5}{32} = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} y \cdot \left(\frac{5}{8} - y\right) + \frac{\frac{5}{8} - y}{4} + \frac{3y}{8} - \frac{5}{32} = 0$$

$$\Rightarrow y\frac{5}{8} - y^2 + \frac{5}{32} - \frac{y}{4} + \frac{3y}{8} - \frac{5}{32} = 0$$

$$\Rightarrow -y^2 + \frac{3}{4}y = 0$$

$$\Rightarrow (y = 0) \vee \left(-y + \frac{3}{4} = 0\right)$$

$$\Rightarrow (y = 0) \vee \left(y = \frac{3}{4}\right) \qquad (2)$$

Dritte Bedingung: $x, y \in [0; 1]$

$$(1); (2) \rightarrow \left(x = \frac{5}{8} - 0\right) \vee \left(x = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8} < 0\right)$$

$$\rightarrow y = 0 \wedge x = \frac{5}{8}$$

Aufgabe 3:

"$\Rightarrow$":

Es gilt: $P(A \cup B) = P(A \cap B)$

$\rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap B)$

$\rightarrow P(A) + P(B) = 2 \cdot P(A \cap B)$

$\rightarrow P(A) + P(B) = 2 \cdot P(A) \cdot P(B)$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $P(A) = 0$

$\rightarrow 0 + P(B) = 0$

$\rightarrow P(B) = P(A) = 0$

2. Fall: $P(A) = 1$

$\rightarrow 1 + P(B) = 2 \cdot P(B)$

$\rightarrow 1 = P(B)$

$\rightarrow P(A) = P(B) = 1$

3. Fall: $P(A) \in (0; 1)$; sei $p = P(A)$

$\rightarrow p + P(B) = 2p \cdot P(B)$

$$\rightarrow 1 + \frac{P(B)}{p} = 2\,P(B)$$

$$\rightarrow 1 = 2 \cdot P(B) - \frac{P(B)}{p} = P(B)\left[2 - \frac{1}{p}\right]$$

$$\frac{1}{p} > 1 \rightarrow 2 - \frac{1}{p} < 1 \rightarrow P(B)\left[2 - \frac{1}{p}\right] < 1 \quad \lightning$$

"$\Leftarrow$":

Es gilt $P(A) = P(B)$ und $P(A) \in \{0; 1\}$

1. Fall: $P(A) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0 \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned}\right\} =$$

2. Fall: $P(A) = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1 \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1 \end{aligned}\right\} =$$

$\rightarrow$ Behauptung.

Aufgabe 4:

Definiere Ereignisse:

W_1: aus der ersten Urne wird eine weiße Kugel gezogen;

R_1: aus der ersten Urne wird eine rote Kugel gezogen;

W_2: aus der zweiten Urne wird eine weiße Kugel gezogen;

R_2: aus der zweiten Urne wird eine rote Kugel gezogen.

$\Rightarrow P(W_1) = \frac{b}{a+b}\ ;\ P(R_1) = \frac{a}{a+b}$

Beim Ziehen aus der zweiten Urne befinden sich dort $c + d + 1$ Kugeln.
Falls die Kugel aus der ersten Urne rot ist:

$$P(W_2 | R_1) = \frac{d}{c+d+1} \quad \left(\Rightarrow P(R_2 | R_1) = \frac{c+1}{c+d+1} \right)$$

Analog, falls die Kugel aus der ersten Urne weiß ist:

$$P(W_2 | W_1) = \frac{d+1}{c+d+1} \quad \left(\Rightarrow P(W_2 | W_1) = \frac{c}{c+d+1} \right)$$

a) $P(W_2) = P(W_1)\, P(W_2 | W_1) + P(R_1)\, P(W_2 | R_1)$ (totale Wahrscheinlichkeit)

$$= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{d+1}{c+d+1} + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d+1}$$

$$= \frac{bd + b + ad}{(a+b)(c+d+1)}$$

b) $P(R_1 | R_2) = \dfrac{P(R_1)\, P(R_2 | R_1)}{P(R_1)\, P(R_2 | R_1) + P(W_1)\, P(R_2 | W_1)}$ (Formel von Bayes)

$$= \frac{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1}}{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}}$$

$$= \frac{a(c+1)}{a(c+1) + bc}$$

Aufgabe 5:

Zeige zunächst: $P(A) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supset \bigcup_{m=2}^{\infty} A_m \supset \dots \Rightarrow \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \searrow A$$

$\Rightarrow$ (Satz der Vorlesung; Ω diskret, also abzählbar, $\Omega \neq \emptyset$ oBdA.; P σ-additiv)

$$P(A) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$$

a) $0 \leq P(A) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n-1} P(A_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) - \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = 0$$

$\Rightarrow P(A) = 0$

b) $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \geq \lim_{n\to\infty} P(A_n) = p$ (da $P(B) \geq P(A)$, falls $B \supset A$)

Aufgabe 6:

$$B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n; \quad A_n \text{ disjunkt} \Rightarrow P(B_k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)$$

a) ⇒ b):

Es gilt: $P(A_k) = p(1-p)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow P(B_k) = \sum_{n=k}^{\infty} p(1-p)^n$$

$$= p \cdot \sum_{n=k}^{\infty} (1-p)^n$$

$$= p\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n - \sum_{n=0}^{k-1} (1-p)^n\right)$$

$$= p\,\frac{1}{1-(1-p)} - p\,\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}$$

$$= 1 - (1-(1-p)^k) = (1-p)^k$$

$$P(A_k \mid B_k) = \frac{P(A_k \cap B_k)}{P(B_k)} = \frac{P(A_k)}{P(B_k)} = \frac{p(1-p)^k}{(1-p)^k} = p \quad \Rightarrow \text{b)}$$

b) ⇒ a)

Sei also $P(A_k \mid B_k) = \dfrac{P(A_k \cap B_k)}{P(B_k)} = \dfrac{P(A_k)}{P(B_k)} = p$

$$P(B_k) \underset{\text{s.o.}}{=} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \Rightarrow P(A_k) = p \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)$$

vollständige Induktion:

$k=0$: $P(A_0) = p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = p \cdot 1 = p = p(1-p)^0$ (da $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$)

$k \to k+1$: $P(A_k) = p \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)$

$$= p\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) - \sum_{n=0}^{k-1} P(A_n)\right)$$

$$= p\left(\quad 1 \quad - p \cdot \sum_{n=0}^{k-1} (1-p)^n\right) \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

$$= p\left(1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}\right)$$

$$= p(1-(1-(1-p)^k)) = p(1-p)^k$$

⇒ Behauptung.

Aufgabe 7:

a) Nach Hinweis gilt

$$E[g\cdot X] = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (g(x) = t^x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (pt + 1 - p)^n$$

$$\Rightarrow \varphi_x(t) = (pt + 1 - p)^n$$

b) i) Nach Vorlesung für $b(n;p)$-verteilte Zufallsvariable: $E[X] = n\cdot p$

$$\varphi'_x(t) = n\,(pt + 1 - p)^{n-1}\cdot p$$

$$\varphi'_x(1) = n\,(p + 1 - p)^{n-1}\cdot p = np$$

ii) Nach Vorlesung: $\mathrm{Var}(X) = np\,(1-p)$

$$\varphi''_x(t) = np\cdot(n-1)\cdot p\cdot(pt + 1 - p)^{n-2}$$

$$\varphi''_x(1) = np^2\cdot(n-1)$$

$$\varphi''_x(1) + \varphi'_x(1) - [\varphi'_x(1)]^2 = n\cdot(n-1)\cdot p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np\cdot(1-p)$$

Aufgabe 8:

a)
$$F_{1:n}(x) = P\left(\min_{1\le i\le n} X_i \le x\right) = 1 - P\left(\min_{1\le i\le n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - P(X_1 > x;\ X_2 > x;\ \dots;\ X_n > x)$$

$$\underset{\text{st.unab.}}{=} 1 - P(X_1 > x)\,P(X_2 > x)\cdots P(X_n > x)$$

$$\underset{\text{id.vert.}}{=} 1 - [P(X_1 > x)]^n$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \le x))^n$$

$$= 1 - (1 - F(x))^n$$

b)
$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x})]^n = 1 - e^{-\lambda n x}$$

Aufgabe 9:

a) $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy = \int_0^1 kx\,(1 - xy)dy = kx \cdot \int_0^1 (1 - xy)\, dy$

$= kx\,[1 - x \cdot \int_0^1 y dy] = kx\,[1 - x\,[\frac{1}{2}\,y^2]_0^1\,] = kx\,[1 - \frac{x}{2}\,] = kx - k\frac{x^2}{2}$

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx = \int_0^1 (kx - kx^2 y)\, dx = \frac{k}{2} - \frac{k}{3}\,y$

Es muß gelten: $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy = \int_0^1 (\frac{k}{2} - \frac{k}{3}\,y)\, dy = \frac{k}{2} - \frac{k}{6} = 1$

$\Rightarrow \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$

b) $E[X] = \int_0^1 x\, f_X(x)\, dx = 3 \int_0^1 (x^2 - \frac{x^3}{2})\, dx$

$= 3\,[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}]_0^1$

$= 3\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}) = \frac{5}{8}$

$E[Y] = \int_0^1 y\, f_Y(y)\, dy = 3 \int_0^1 (\frac{y}{2} - \frac{y^2}{3})\, dy$

$= 3\,[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9}]_0^1 = 3\,(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) = \frac{5}{12}$

$E[XY] = \int_0^1\int_0^1 x \cdot y \cdot 3 \cdot x \cdot (1 - xy)dxdy$

$= \int_0^1 [yx^3 - \frac{1}{4}x^4y^2]_0^1\, dy = \int_0^1 (y - \frac{1}{4}\,y^2)dy = [\frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{12}y^3]_0^1 = \frac{5}{12}$

$E[X] \cdot E[Y] = \frac{25}{96}$

$\mathrm{Kov}\,[X, Y] = E\,[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = \frac{5}{12} - \frac{25}{96} = \frac{5}{32} \neq 0$

c) stochastisch abhängig, da Kovarianz ungleich Null.

Aufgabe 10:

Tschebytscheffungleichung lautet: $P\,(|Y - E[Y]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}Y}{c^2}$

Erwartungswert: $E\,[\sum_{i=1}^{40} X_i] = \sum_{i=1}^{40} E\,[X] = 40 \cdot 50 = 2000$

$\mathrm{Var}\,(\sum_{i=1}^{40} X_i) = \sum_{i=1}^{40} \mathrm{Var}X_i + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 40} \mathrm{Cov}\,(X_i; Y_j)$

$= 40 \cdot 25 + 2 \cdot 0$; da stochastisch unabhängig

$= 1000$

$c = 80.$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{40} X_i - 2000\right| \geq 80\right) \leq \frac{1000}{6400} = \frac{5}{32}$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\sum_{i=1}^{40} X_i - 2000\right| < 80\right) > \frac{27}{32}$$

Aufgabe 11:

i) $$E(\delta(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)) = E\left(a \sum_{i=1}^{m} X_i + b \sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$$

$$= a \sum_{i=1}^{m} E[X_i] + b \sum_{j=1}^{n} E[Y_j]$$

$$= am\mu + bn\mu$$

Damit δ erwartungstreu ist:

$$am + bn = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1 - bn}{m}$$

ii) $$\mathrm{Var}(\delta(X_1, \ldots X_m, Y_1, \ldots, Y_n)) = \mathrm{Var}\left(a \sum_{i=1}^{m} X_i + b \sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$$

$$= a^2 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Var}\, X_i + b^2 \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}\, Y_j$$

$$= a^2 m\, \sigma_x^2 + b^2 n\, \sigma_y^2$$

$$\overset{(i)}{=} \left(\frac{1-bn}{m}\right)^2 m\, \sigma_x^2 + b^2\, n\, \sigma_y^2 = f(b)$$

$$f'(b) = \frac{-2(1 - bn)\, n\, \sigma_x^2}{m} + 2bn\, \sigma_y^2 = 0 \text{ (Minimum)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(1 - bn)\, \sigma_x^2}{m} + b\, \sigma_y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sigma_x^2}{m} + \frac{bn}{m} \sigma_x^2 + b\, \sigma_y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b\left(\frac{n}{m} \sigma_x^2 + \sigma_y^2\right) = \frac{\sigma_x^2}{m}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{\sigma_x^2}{m\left(\frac{n}{m} \sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)} = \frac{\sigma_x^2}{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}$$

$$a = \frac{1-bn}{m} = \frac{1 - n \cdot \frac{\sigma_x^2}{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}}{m}$$

$$f''(b) = \frac{n^2\, \sigma_x^2 \cdot 2}{m} + 2n\, \sigma_y^2 > 0 \Rightarrow \text{Minimum.}$$