Formelzettel zur Klausur

Elektronische Grundlagen für Informatiker

WS06/07

Dies ist eine privat erstellte Formelsammlung.
Es handelt sich nicht um offizielles Material der Vorlesung.
Es gibt keine Garantie auf inhaltliche Korrektheit.
TEX-Quelldatei erhältlich bei s-inf.de oder per E-Mail (s.u.)

Letzte Änderung: Mittwoch, 14. März 2007

Florian.Weingarten@RWTH-Aachen.de
Johannes.Gilger@RWTH-Aachen.de

Mikro (μ): 10^{-6}, Nano (n): 10^{-9}, Pico (p): 10^{-12}

Einheiten

Kraft (F)	$N = \frac{kg\cdot m}{s^2} = \frac{V\cdot A\cdot s}{m}$
Energie/Arbeit (W)	$J = Nm = \frac{m^2\cdot kg}{s^2} = VAs$
Leistung (P)	$W = \frac{Nm}{s} = \frac{m^2\cdot kg}{s^3} = VA = \frac{J}{s}$
Ladung (Q)	$C = As$
Spannung (U)	$V = \frac{m^2\cdot kg}{s^3 A} = \frac{W}{A} = A\Omega = \frac{Nm}{C}$
Widerstand (R)	$\Omega = \frac{m^2 kg}{s^3 A^2} = \frac{V}{A}$
Leitwert (G)	$S = \frac{1}{\Omega} = \frac{s^3 A^2}{m^2 kg} = \frac{A}{V}$
Kapazität (C)	$F = \frac{s^4 A^2}{m^2 kg} = \frac{C}{V} = \frac{As}{V}$
Induktivität (L)	$H = \frac{m^2 kg}{s^2 A^2} = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A}$
Fluss (Φ)	$Wb = \frac{m^2 kg}{s^2 A} = Vs$
Induktion/Flussdichte (B)	$T = \frac{kg}{s^2 A} = \frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2}$

Konstanten

$\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm} = 8,854187\frac{pF}{m}$
$\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}$, $e^- = -1,602\cdot 10^{-19}C$
$\rho_{\text{Kupfer}} = 1,78\cdot 10^{-8}\Omega m$

Geometrien

$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$, $U_{\text{Kreis}} = 2\pi r$, $A_{\text{Kreis}} = \pi r^2$, $A_{\text{Zylinder}} = \underbrace{(2\pi rh)}_{\text{Mantel}} + \underbrace{(2\pi r^2)}_{\text{Grundflächen}}$

Trigonometrie

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (a gegenüber α, etc.)
Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$
$\cos(x\pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp \sin(x)\cdot\sin(y)$
$\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

Rechtwinklige Dreiecke

$\sin = \frac{\text{Gegenkatete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\cos = \frac{\text{Ankatete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\tan = \frac{\text{Gegenkatete}}{\text{Ankatete}} = \text{Steigung}$

Elektrostatik

Spannung: $U_{21} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{s}$ (vom Integrationsweg unabhängig)
Coulombsches Gesetz: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{\epsilon}\cdot\vec{e}_r$
Elektr. Feld um Ladung Q: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{Q}{\epsilon}\cdot\vec{e}_r$
Kraft im Feld um Q auf Ladung q: $\vec{F} = q\cdot\vec{E}$
Flächenladungsdichte: $D = \frac{Q}{A}$, $\vec{D} = \epsilon\cdot\vec{E}$
Widerstand eines Leiters: $R = \frac{l}{\sigma\cdot A} = \rho\frac{l}{A}$ (σ spez. Leitf, ρ spez. Wid.)
Leistung: $P = \frac{W}{t} = U\cdot I = I^2\cdot R = \frac{U^2}{R}$, Leistung maximal: $P'(t) = 0$
Stromdichte: $J = \frac{I}{A}$, $\int_A \vec{J}d\vec{A} = I$ (I Strom, A Fläche)
Wirkungsgrad: $\eta = \frac{\text{genutzte Leistung}}{\text{gesamte Leistung}}$, Widerstandsbelag: $\frac{\Omega}{l}$
Kapazitätsbelag: $C' = \frac{C}{l}$, z.B. Coaxialkabel: $C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{r_a}{r_i})}$

Plattenkondensator

Kapazität: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon\cdot A}{d}$, Feld: $E = \frac{U}{d}$, Energie: $W = \frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2 = \frac{Q^2}{2C}$
Parallel: $C_{\text{ges}} = \sum C_i$, $Q_{\text{ges}} = \sum Q_i$
Reihe: $\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum\frac{1}{C_i}$, $Q_{\text{ges}} = Q_1 = Q_2 = ...$
Änderung von d: $U_{\text{neu}} = U_{\text{alt}}\cdot\frac{d_{\text{neu}}}{d_{\text{alt}}}$, Änderung von ϵ: $U_{\text{neu}} = U_{\text{alt}}\cdot\frac{\epsilon_{\text{alt}}}{\epsilon_{\text{neu}}}$
(Bei beiden Änderungen bleibt schon vorhandene Ladung gleich!)

Zylinderkondensator

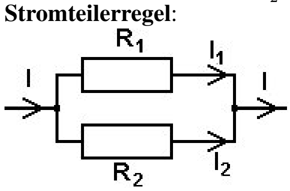
Kapazität: $C = 2\pi\epsilon\cdot\frac{l}{\ln(\frac{r_a}{r_i})}$, Spannung: $U = \frac{Q}{2\pi l\epsilon}\ln(\frac{r_a}{r_i})$
Feld, Verschiebungsdichte: $D = \frac{Q}{2\pi rl}$, $E = \frac{D}{\epsilon}$

Spule

Reihe: $L_{\text{ges}} = \sum L_i$, Parallel: $\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum\frac{1}{L_i}$, Induktivität: $L = \mu\frac{N\cdot A}{l}$

Netzwerktheorie

Pfeile: Strom fließt gegen Spannungspfeilrichtung durch die Quelle, aber in Spannungspfeilrichtung durch Verbraucher (sonst Vorzeichen umdrehen)
Mehrere Quellen: zwei Spannungsquellen in Reihe: Spannungen addieren; zwei Stromquellen parallel: Ströme addieren
Spannungsteilerregel: $\frac{U_i}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_i}{R_{\text{ges}}}$ (Teilspannung verhält sich zu Gesamtspannung wie Teilwiderstand zu Gesamtwiderstand); Wenn zwei Widerstände R_1 und R_2 in Reihe: $\frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2}$
Stromteilerregel:



$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$, $\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$

Ersatzquellen

Berechne Innenwiderstand (Gesamtwiderstand R_i **an Klemmen** (dazu Quellen ignorieren)), Leerlaufspannung U_0 (Spannung ohne Last zwischen Klemmen, also die am letzten Widerstand R_L abfallen würde; berechne dazu R_{ges} (**an Quelle!**), dann $I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$ (U Quellenspannung!), über Stromteilerregel erhält man I_L an der Last, dann ist $U_0 = I_L\cdot R_L$; $I_K = \frac{U_0}{R_i}$; Spannungsquelle: U_0 und R_i angeben, Stromquelle: I_K und R_i.
Welche Leistung gibt Quelle ab: Ausgangsschaltung betrachten, **nicht** Ersatzschaltung! Dann $P = I^2\cdot R_{\text{ges}}$ (R **mit** Last!)

Superpositionsverfahren

Anwendbar bei mehreren Quellen. Prinzip: Nacheinander alle Quellen bis auf jeweils eine kurzschließen (Spannungsquelle) bzw. unterbrechen (Stromquelle) und gesuchte Größen einzeln berechnen, danach addieren.

Vollständiger Baum

Besteht aus $k-1$ *Baumzweigen* die alle Knoten derart miteinander verbinden, dass keine geschlossene Masche gebildet wird. Die restlichen $z-(k-1)$ nicht im Baum benutzten Zweige heißen *Verbindungszweige*. Gesuchte Größen sollten in Verbindungszweigen liegen. Wähle nun Maschenumlauf so, dass **genau** ein Verbindungszweig in jedem Maschenumlauf genutzt wird!

Maschengleichungen

Maschengleichungen aufstellen

1. beliebige Masche wählen
2. benutzte Masche an einer bel. Stelle auftrennen und neue Masche bilden. Zum schließen nur vorher nicht benutzte Zweige verwenden
3. Schritt 2 so oft wiederholen bis alle Zweige verwendet wurden

Maschenstromverfahren

$z-(k-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen. Gesucht sind Ströme.

1. Alle Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln
2. Koeffizientenmatrix R: Diagonale ist Summe der Widerstände der Masche, (i,j) ist Summe der gemeinsamen Widerstände der Maschen i und j (negatives Vorzeichen wenn Stromrichtungen/Umlaufrichtungen entgegengesetzt)
3. Ergebnisvektor U: Summe der Spannungen der Masche (**positiv** wenn Richtung des Maschenstromes **entgegengesetzt** den Spannungspfeilen der Quellenspannungen)
4. Lösen: $R\cdot I = U$ mit I Vektor der virtuellen Maschenströme

Knotenpotentialverfahren

$k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen. Gesucht sind Spannungen.

1. Alle Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln
2. Widerstände in Leitwerte umwandeln
3. Bezugsknoten (Nullpotential) wählen, virtuelle Spanungen definieren (Spannungen zwischen den Knoten/Potentialen)
4. Koeffizientenmatrix G: Diagonale ist Summe der Leitwerte (immer positiv), die an den Knoten grenzen. (i,j) ist negative Summe **aller** Leitwerte zwischen den Potentialen (immer negativ!)
5. Ergebnisvektor I aufstellen: Summe der Ströme (der Quellen) am Knoten (einzelne Summanden sind *positiv*, wenn auf Knoten hin gerichtet)
6. Lösen des Systems $G\cdot U = I$ mit U Vektor der virtuellen Spannungen (neg. Vorzeichen falls umgekehrte Richtung) (Spannung von Knoten der Matrixspalte zu Nullpotential)

MSV vs. KPV

	MSV	**KPV**
Anzahl Gleichungen	z-(k-1)	(k-1)
gesucht	Strom	Spannung
gegeben	Spannung	Strom
benötigte Quellen	Spannungsquellen	Stromqueuellen

(Wenn Anzahl der Gleichungen und Anzahl der nötigen Quellenumwandlungen kleiner dann Verfahren besser)

Cramersche Regel

$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ mit $A_i = A$, nur dass i-te Spalte durch Ergebnisvektor ersetzt

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Größere Determinanten entwickeln: Zeile oder Spalte wählen (möglichst mit vielen Nullen), Vorzeichen immer wechseln (mit $+$ anfangen)

Vektorrechnung

Winkel: $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\right)$, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Magnetismus

Durchflutung: $\Theta = N \cdot I$
Feldstärke allgemein: $H = \frac{\Theta}{l} = \frac{N \cdot I}{l}$
Feldstärke **ausserhalb** von Leitern: $H = \frac{I}{2\pi r}$
Feldstärke **im innern** des Leiters: $H = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r$ ($r \leq R$)
Flussdichte: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$
Fluss: $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} = B \cdot A$ ($\vec{A}$ Normalenvektor auf Fläche, falls Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{B}$ $180°$ oder $0°$ dann skalar rechnen (bei $180°$ mit $-$), d.h. z.B. wenn Feldlinien **in** Zeichenebene hinein und Normalenvektor der Fläche aus Ebene heraus)
Induktionsgesetz: $U_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -n \cdot B \cdot l \cdot v \cdot \sin\varphi$
Induktivität: $L = \mu \cdot A \cdot \frac{n^2}{l}$
Durchflutungsgesetz: $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \Theta$
Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ ($|\vec{F}| = F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha$)

Komplexe Wechselstromrechnung

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ($\hat{u}$ Amplitude)
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
Effektivwert (quadratischer Mittelwert, RMS): $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt}$
Effektivwert bei Sinus Spannungen/Strömen: $I_{\text{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ (Spannung analog)
Arithmetisches Mittel: $\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$

Resonanzfrequenz: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Gleichstrom: $\omega = 0$, Gleichstromverstärkung: Verstärkung bei $\omega = 0$
Bei $\omega = 0$ Kondensator wie Leerlauf, Spule wie Kurzschluss. Bei $\omega \to \infty$ umgekehrt.

Widerstand (Impedanz): $\underline{Z} = R + jX$, R Resistanz, X Reaktanz
Leitwert (Admitanz): $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$, G Konduktanz, B Suszeptanz

Ohmsch (rein reell): $\underline{Z}_R = \frac{U}{I} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = R = R \cdot e^{j0°}$
Spule: $\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{+j90°}$
Kondensator: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j90°}$
Scheinwiderstand: $|\underline{Z}|$ (Betrag der Impedanz)

Widerstand heißt *induktiv* wenn Blindwiderstand positiv und *kapazitiv* wenn negativ (Wichtig: Nicht jeder induktive komplexe Widerstand ist eine Spule, z.B. bei invertierender OpAmp mit Kondensator!)
Schaltung nimmt nur Wirkleistung auf, wenn U und I in Phase sind, d.h. wenn $\underline{Z}$ rein reell
Wirkleistung: $P = I^2 \cdot \Re(\underline{Z})$
Blindleistung: $Q = I^2 \cdot \Im(\underline{Z})$
Scheinleistung: $S = U \cdot I = I^2 \cdot Z = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$\underline{z} \cdot \underline{z}^* = |\underline{z}|^2 = a^2 + b^2$
$\underline{z} = x + jy = r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$
$\left.\begin{array}{l} r = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{array}\right\}$ kartesisch nach polar
$\left.\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = x \cdot \sin\varphi \end{array}\right\}$ polar nach kartesisch
Moivre: $(\cos\alpha + j\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + j\sin(n\alpha)$
Eulersche Formel: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$
Amplitudengang: $A(\omega) = |H(\omega)|$, Phasengang $\varphi(\omega) = -\arctan(\Im(\underline{Z}))$
Grenzfrequenz: Ausgangswert fällt auf 3dB unter den Bezugswert (entspricht dem ca. 70.7% oder dem $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fachen), d.h. $|\underline{H}| = |\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bei OPAMP: $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fache der Verstärkung: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v$ (v Gleichspannungsverstärkung).

Nichtlineare Bauelemente

Diode

Arbeitspunkt einer Diode feststellen: Diode kurzschließen und I_K bestimmen, Diode rausnehmen (Leerlauf) und U_0 bestimmen. I_K und U_0 als Punkte auf Achsen eintragen. Schnittpunkt der Gerade durch die Punkte mit der Kennlinie ist Arbeitspunkt. Grafisch Diodenstrom und Diodenspannung bestimmen.

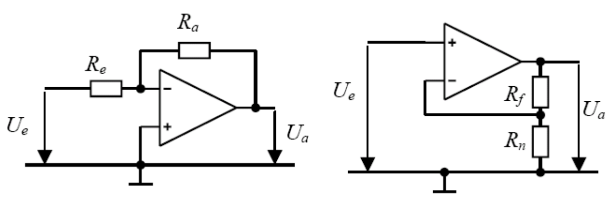
Transistoren

Bipolartransistor besteht aus *Basis-Emitter-Diode* und Kollektor-Basis-Diode. Zwei Arten: PNP (Emitter-**P**feil **n**ach **P**latte) und NPN (von Platte weg). Drei Schaltungstypen: Basis-Schaltung: Kollektor und Emitter an einem Pol; Kollektor-Schaltung: Spannungsquelle ist über einen gemeinsamen Anschlußpunkt mit dem Kollektor verbunden; Emitter-Schaltung: Spannungsquelle ist über einen gemeinsamen Anschlusspunkt mit dem Emitter verbunden. Für $U_E = 0V$ sperrt Transistor. **Kollektorwiderstand bestimmen**: Entweder rechnerisch über $I_C \cdot R_C + U_{CE} = U_B \Leftrightarrow R_C = \frac{U_B - U_{CE}}{I_C}$ oder grafisch in Diagramm: Arbeitspunkt der Kollektor-Basis-Diode ermitteln, d.h. Punkt (U_{CE}, I_C) eintragen, an der Stelle $I_C = 0$ gilt $U_B = U_{CE} = X$, daher Punkt $(X, 0)$ eintragen (Arbeitsgerade!), Schnittpunkt der so definierten Gerade mit der I_C-Achse liefert Strom Y für $\frac{X}{Y} = R_C$
Basisstrom-/Gleichstromverstärkung: $B = \frac{A}{1-A} = \frac{I_C}{I_B}$ mit $A = -\frac{I_B}{I_C}$
Verlustleistung: $P = I_C \cdot U_{CE}$

Ideale Operationsverstärker

Bei Maschenumläufen: Niemals durch den OPAMP durch!
Verstärkung: $\frac{U_A}{U_D}$ (U_A Ausgangsspannung, bei Wechselstrom Übertragungsfunktion, gleich definiert)
Differenzspannung: $U_D = 0$, Ströme: $I_{E-} = 0$, $I_{E+} = 0$
Wenn $+$ von Quelle an $+$ von OpAmp (und $-$ an $-$) dann Ausgangsspannung positiv, sonst negativ!
Bei Wechselstrom OpAmps: Gleichspannungsverstärkung heisst Verstärkung ($\underline{U}_a/\underline{U}_e$) für $\omega = 0$.

Invertierender (links) und Nicht-Invertierender Verstärker (rechts)



Invertierender: Aus Summe der Ströme am neg. Eingang $\sum I = 0$ folgt: $\frac{U_e}{R_e} + \frac{U_a}{R_a} = 0$ und somit $U_a = -U_e \cdot \frac{R_a}{R_e}$
Nicht invertierender: Mit $U_D = 0$ folgt $U_n = U_e$ (U_n Spannung von $-$ zu GND). Summe der Ströme am Knoten zwischen R_f und R_n: $\frac{U_e}{R_n} + \frac{U_e - U_a}{R_f} = 0$ und somit $U_a = U_e \cdot \left(1 + \frac{R_f}{R_n}\right)$

Potentiometer als Spannungsteiler