Wir betrachten den gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \underline{8}$ und den Kanten E aus der folgenden Tabelle:

Kante	Gewicht
{3,4}	1
{5,4}	2
{5,1}	3
{8,4}	4
{5,8}	5
{4,7}	6
{3,7}	7
{5,6}	8
{6,4}	9
{2,7}	10
{1,4}	11
{2,8}	12
{1,8}	13

Beantworten Sie die folgenden Fragen. **7 von 9 Punkten**

2 von 2 Punkten

Wie viele Zusammenhangskomponenten hat der auf auf der Teilmenge $\{3, 5, 6, 7\} \subset V$ induzierte Teilgraph von G?

2 ✓

2 Punkte

Besitzt der Graph G einen Eulerzug, eine Eulertour, oder beides oder keines davon?

Beantworten Sie die folgenden Fragen. **7 von 9 Punkten**

2 von 2 Punkten

Wie viele Zusammenhangskomponenten hat der auf auf der Teilmenge $\{3, 5, 6, 7\} \subset V$ induzierte Teilgraph von G?

2 ✓

2 Punkte

Besitzt der Graph G einen Eulerzug, eine Eulertour, oder beides oder keines davon?

keines davon ✗ Eulerzug

1 von 1 Punkt

Was ist der maximale Grad eines Knotens in G?

6 ✓

2 von 2 Punkten

Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum von G und geben Sie die Gewichte seiner Kanten, mit Kommas getrennt, in aufsteigender Reihenfolge an.

1,2,3,4,6,8,10 ✓

2 von 2 Punkten

Wie viele Brücken besitzt der Graph G?

0 ✓

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben die Ergebnisse als Zahl an (nicht als Formel mit Binomialkoeffizienten oder Fakultäten).

10 von 10 Punkten

2 von 2 Punkten

(a) Wie viele Tupel aus $\{1, 2, 3\}^7$ gibt es, in denen genau drei Mal die 2 vorkommt?

560 ✓

2 von 2 Punkten

(b) Wie viele natürliche Zahlen n mit $n \leq 180$ gibt es, die durch 6, 9 oder 20 teilbar sind?

46 ✓

2 von 2 Punkten

(c) Wie viele Wörter lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

34650 ✓

2 von 2 Punkten

(d) Wie viele Ergebnisse gibt es beim Wurf von drei (ununterscheidbaren) Würfeln, in denen keine 2 vorkommt?

35 ✓

2 von 2 Punkten

(e) Wie viele natürliche Zahlen mit 5-stelliger Dezimaldarstellung (ohne führende 0) gibt es, in der genau einmal die Ziffer 6 vorkommt?

29889 ✓

Lösungsweg

2 von 2 Punkten

(a) Wie viele Tupel aus $\{1, 2, 3\}^7$ gibt es, in denen genau drei Mal die 2 vorkommt?

560 ✓

2 von 2 Punkten

(b) Wie viele natürliche Zahlen n mit $n \leq 180$ gibt es, die durch 6, 9 oder 20 teilbar sind?

46 ✓

2 von 2 Punkten

(c) Wie viele Wörter lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

34650 ✓

2 von 2 Punkten

(d) Wie viele Ergebnisse gibt es beim Wurf von drei (ununterscheidbaren) Würfeln, in denen keine 2 vorkommt?

35 ✓

2 von 2 Punkten

(e) Wie viele natürliche Zahlen mit 5-stelliger Dezimaldarstellung (ohne führende 0) gibt es, in der genau einmal die Ziffer 6 vorkommt?

29889 ✓

Lösungsweg

(a) Binomial(7,3)*2^4 = 560

(b) 30 + 20 + 9 - 10 - 3 - 1 + 1 = 46

(c) 11! / 4! / 4! / 2! = 23355711 = 34650

(d) Binomial(3+5-1, 3) = 35

(e) 9^4 + 8 * 4 * 9^3 = 29889

(a) Seien $f = X^5 + X^4 + X^2 + 1$ und $g = X^5 + X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ zwei Polynome und $I = (f, g) \subseteq \mathbb{F}_2[X]$ das davon erzeugte Ideal.

Geben Sie Koeffizienten als `0` oder `1` ein und ein Polynom durch die Koeffizienten mit Komma getrennt, angefangen mit dem Leitkoeffizienten (z.B. $X^3 + X + 1$ als `1,0,1,1`.)

1 von 4 Punkten

3 Punkte

Berechnen Sie ein Polynom $d \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $I = (d)$.

1 ✗ 1,1

1 von 1 Punkt

Was ist der Grad von $f^4 - gf^3$?

19 ✓

(b) Jetzt sei $h = X^3 + 4X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

Geben Sie ein Polynom wie oben als Koeffizientenliste an mit Koeffzienten `0`, `1`, `2`, `3`, `4`.

3 von 3 Punkten

3 von 3 Punkten

Geben Sie einen normierten irreduziblen Faktor von h in $\mathbb{F}_5[X]$ an.

1,2 ✓

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Zahl $d = \operatorname{ggT}(451, 671)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot 451 + y \cdot 671 = d$.

3 von 3 Punkten

1 von 1 Punkt

Geben Sie hier d ein:

11 ✓

2 von 2 Punkten

Geben Sie x, y mit Komma getrennt ein:

3,-2 ✓

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{73}$ eine Lösung der Gleichung $\overline{67} \cdot x + \overline{29} = \overline{0}$.

3 von 3 Punkten

3 von 3 Punkten

Tippen Sie Ihr Ergebnis als ganze Zahl $0 \leq x \leq 72$ ein:

17 ✓

(c) Wie viele Einheiten hat der Ring $\mathbb{Z}_{390}$?

3 von 3 Punkten

3 von 3 Punkten

$|\mathbb{Z}_{390}^{\times}| =$

96 ✓

Für $a \in \mathbb{Q}$ seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ -6 & a^2 - 2a & a+1 \\ -4 & -2a & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle gefragten Werte mit Komma getrennt an, oder schreiben Sie `alle` wenn die gesamte Menge die gefragte Eigenschaft erfüllt.

8 von 10 Punkten

3 von 3 Punkten

Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung?

-1 ✓

2 Punkte

Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das homogene
lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ unendlich viele Lösungen?

-4 ✗ 0,-1

3 von 3 Punkten

Geben Sie eine Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von $Ax = b$ im Fall $a = -2$ an.

(Schreiben Sie x_1, x_2, x_3 mit Komma getrennt in das Antwortfeld.)

0,1,1 ✓

2 von 2 Punkten

Sei $a = -2$. Für welche $c \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$
hat in diesem Fall das Gleichungssystems $Ax = c$ eine Lösung?

alle ✓

Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 8 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Permutationen aus S_9.

10 von 10 Punkten

3 von 3 Punkten

Geben Sie $\sigma \circ \pi$ in disjunkter Zykelschreibweise an.

(1,7,8,2,3,6,9,5,4) ✓

2 von 2 Punkten

Was ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, so dass $\sigma^k = \mathrm{id}$ ist?

10 ✓

2 von 2 Punkten

Was ist das Signum von π?

-1 ✓

3 von 3 Punkten

Geben Sie σ^{-1} in disjunkter Zykelschreibweise an.

(1,7,9,2,4)(6,8) ✓

Seien $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$f = 2X^4 + X^3 - 3X + 4, \quad g = -2X^3 - X^2 + 6, \quad h = X^{11} - X^6 + 1.$$

5 von 5 Punkten

1 von 1 Punkt

Was ist der Grad von $-4h - X^4fg$?

10 ✓

1 von 1 Punkt

Was ist der Leitkoeffizient von fgh?

-4 ✓

1 von 1 Punkt

Was ist die Summe der Koeffizienten von f?

4 ✓

1 von 1 Punkt

Was ist der konstante Koeffizient von $f^2 - (X+2)g$?

4 ✓

1 von 1 Punkt

Was ist der Wert von f an der Stelle -1?

8 ✓

(a) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^t$ ist. Seien $A, B \in K^{n \times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass AB genau dann symmetrisch ist, wenn $AB = BA$ gilt. *(4 Punkte)*

(b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Relation R mit

$$(u,v)R(x,y) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ mit } (u,v) = (cx, cy)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass R keine Äquivalenzrelation ist. *(4 Punkte)*

(c) Sei R ein Ring und $r \in R$ ein nilpotentes Element, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r^n = 0$.
Zeigen Sie, dass dann $(1 - r)$ eine Einheit in R ist. *(4 Punkte)*

(d) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $H := \{A \in GL_n(K) \mid AA^t = E_n\}$.
Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von $GL_n(K)$ ist. *(4 Punkte)*

(e) Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Begründung. (Für Antworten ohne Begründung gibt es keine Punkte!)

1. Ist $\mathbb{N}$ bezüglich der Multiplikation ein Monoid? *(1 Punkt)*
2. Ist $(\mathbb{N}_0, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$? *(1 Punkt)*
3. Ist $\mathbb{Z}_6$ ein Körper? *(1 Punkt)*
4. Sei K ein endlicher Körper mit genau q Elementen. Wie viele Elemente enthält die Einheitengruppe des Polynomrings $K[X]$? *(1 Punkt)*