

## Diskrete Strukturen

### Abschlussklausur

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Bitte beachten Sie die auf der Rückseite dieses Blattes angegebenen Regeln und Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme. Ferner bestätigen Sie, dass Sie sich gesund und prüfungsfähig fühlen.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Für die Aufgaben 1 bis 7 sind keine Begründungen nötig. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte. Unter den Aufgaben sowie auf den Rückseiten befindet sich Raum für Notizen, welche nicht bewertet werden.

Bei den Aufgaben 8 bis 10 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Bei Aufgabe 8 tragen Sie die Begründungen in die dafür vorgesehen Kästchen ein. Für die Aufgaben 9 und 10 gilt: Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite fort. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	8	
2	7	
3	7	
4	3	
5	6	
6	8	
7	6	
8	4	
9	5	
10	6	
$\Sigma$	60	
Note	—	

*Hinweise zur Durchführung der Klausur.*

- Sofern Sie bisher noch an keiner Abschlussprüfung in diesem Modul teilgenommen haben, müssen Sie zur Teilnahme an dieser Klausur vorab eine Zulassung erworben haben. Ferner müssen Sie sich je nach Studiengang gegebenenfalls bei dem für Sie zuständigen Prüfungsamt zu dieser Klausur angemeldet haben. Ihre Teilnahme an dieser Klausur erfolgt vorbehaltlich einer gültigen Zulassung und Anmeldung.
- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können *nicht* korrigiert werden.
- Die Klausur besteht aus 10 Aufgaben auf 12 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.
- Bitte halten Sie Ihre RWTH BlueCard zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen Sie diese in Ihren Taschen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden. Für Markierungen in Aufgabe 7 darf ein zweiter farbiger Stift (nicht rot oder grün) benutzt werden; diese Markierungen zählen als Notizen und werden nicht bewertet.
- Als Hilfsmittel ist ein beidseitig handschriftlich beschriebener Notizzettel im Format DIN A4 erlaubt. Dieser darf sich, ebenso wie dieser Klausurbogen, während des gesamten Bearbeitungszeitraums nur auf Ihrem Tisch befinden.
- Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Bücher, Taschenrechner, etc., sind nicht erlaubt.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb eines Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive Rückseiten) nicht zur Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur. Machen Sie in diesem Fall bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, kommen Sie bitte mit Ihrer Klausur und Ihrer RWTH BlueCard zu den Aufsichtspersonen. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen.
- Bitte reden Sie während der Klausur nicht laut. Bei Unklarheiten geben Sie bitte Handzeichen, eine Aufsichtsperson kommt dann an Ihren Platz.
- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit beenden und den Hörsaal vorzeitig verlassen – mit folgenden Einschränkungen: Bleiben Sie bitte zum einen mindestens 15 Minuten. Zum anderen sollten Sie 15 Minuten vor Ablauf der Bearbeitungszeit bitte bis zum Ende bleiben, um Unruhe zu vermeiden.
- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll.

Bearbeiten Sie die folgenden sieben Aufgaben und schreiben Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie müssen Ihre Entscheidungen nicht begründen. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

1	Es seien $\pi, \rho, \sigma \in S_9$ gegeben durch $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \rho = (193)(26)(4875), \sigma = (27)(49658).$ Ferner sei $\xi \in S_9$ mit $\xi \circ \rho = \sigma$ gegeben. Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Verwenden Sie zur Angabe von Permutationen stets die Zykelschreibweise. <span style="float: right;"><i>(8 Punkte)</i></span>		
$\pi =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\rho^{-1} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>
$\xi =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\rho^4 \circ \sigma^5 =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>
$\min \{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{id}_{\{1, \dots, 9\}}\} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\{i \in \{1, \dots, 9\} \mid \sigma(i) = i\} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>
$\text{sgn}(\rho \circ \sigma) =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\text{sgn} \rho^{10} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>

Punkte:  /8

(Raum für Notizen)

2	Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke, sofern sie existieren; andernfalls schreiben Sie „ex. nicht“ ins Antwortfeld. Verwenden Sie zur Angabe von Restklassen stets den kleinsten nicht-negativen Repräsentanten. <span style="float: right;">(7 Punkte)</span>			
	$\overline{25}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{35}$ :	<input type="text"/>	$\overline{23}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{35}$ :	<input type="text"/>
	$\min \{x \in \mathbb{N}_0 \mid 20x \equiv_{35} 17\} =$	<input type="text"/>	$\overline{17}^{80}$ in $\mathbb{Z}_{35}$ :	<input type="text"/>
	$ \mathbb{Z}_{35}^\times  =$	<input type="text"/>		

Punkte:  /7

(Raum für Notizen)

3	<p>Es seien <math>A \in \mathbb{Q}^{3 \times 4}</math>, <math>b \in \mathbb{Q}^{3 \times 1}</math>, <math>C \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}</math>, <math>D \in \mathbb{Q}^{3 \times 2}</math> gegeben durch</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$ <p>Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke, sofern sie existieren; andernfalls schreiben Sie „ex. nicht“ ins Antwortfeld. <span style="float: right;"><i>(7 Punkte)</i></span></p>		
$\mathbb{L}(A, b) =$		$b^t A =$	
$(D^t A)^{-1} =$		$CADD^t =$	
$C + D =$		$CD =$	

Punkte:    /7

(Raum für Notizen)

4	<p>Es sei <math>A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}</math> gegeben durch</p> $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$ <p>Bestimmen Sie die Inverse von <math>A</math>. <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p>
	<p><math>A^{-1} =</math> <input data-bbox="314 521 694 745" type="text"/></p>

Punkte:  /3

(Raum für Notizen)

5 Es sei  $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und es seien Relationen  $R$  und  $S$  auf  $M$  gegeben durch

$$R = \{(4, 1), (4, 6), (5, 2)\}$$

$$S = R \cup \{(4, 5)\}.$$

Ferner sei  $C$  die bzgl. Inklusion kleinste Äquivalenzrelation auf  $M$  mit  $R \subseteq C$  und es sei  $P$  die bzgl. Inklusion kleinste (partielle) Ordnung auf  $M$  mit  $S \subseteq P$ . Schließlich seien Teilmengen  $U, U', V, V'$  von  $M$  gegeben durch

$$U = \{x \in M \mid x \text{ ist ein minimales Element bzgl. } P\},$$

$$U' = \{x \in M \mid x \text{ ist ein Minimum bzgl. } P\},$$

$$V = \{x \in M \mid x \text{ ist ein maximales Element bzgl. } P\},$$

$$V' = \{x \in M \mid x \text{ ist ein Maximum bzgl. } P\}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Verwenden Sie zur Angabe von Mengen stets eine nicht redundante Darstellung, d.h. geben Sie jedes Element genau einmal an. (6 Punkte)

$ C  =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>	$ P  =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>
$M/C =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>	$[1]_C =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>
$U =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>	$U' =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>
$V =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>	$V' =$	<input style="width: 90%;" type="text"/>

Punkte:  /6

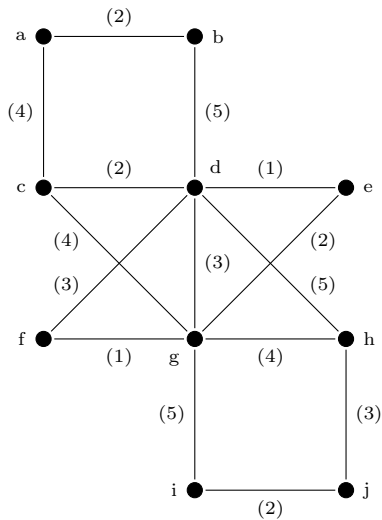
(Raum für Notizen)

6	Berechnen Sie die folgenden Anzahlen. <span style="float: right;"><i>(8 Punkte)</i></span>
	Wieviele PINs bestehend aus (genau) vier arabischen Ziffern beginnen nicht mit einer Null und enthalten kein Zeichen mehrfach? <div style="text-align: right; border: 1px solid black; width: 150px; height: 30px; margin: 10px auto;"></div>
	Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer Speisekarte mit vier Vorspeisen, sechs Hauptgerichten und drei Nachspeisen, eine Bestellung für zwei Personen zusammenzustellen, sofern diese höchstens zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Vorspeisen, höchstens zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Nachspeisen und entweder genau ein Hauptgericht oder zwei verschiedene Hauptgerichte enthalten soll? <div style="text-align: right; border: 1px solid black; width: 150px; height: 30px; margin: 10px auto;"></div>
	Wieviele verschiedene siebenstellige Rufnummern lassen sich aus drei Dreien und vier Vieren bilden, sofern weder alle drei Dreien noch alle vier Vieren am Anfang stehen dürfen? <div style="text-align: right; border: 1px solid black; width: 150px; height: 30px; margin: 10px auto;"></div>
	Punkte: <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 20px; display: inline-block;"></div> /8

(Raum für Notizen)



7 Es sei  $G = (V, E)$  der folgende gewichtete Graph.



(6 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes  $v \in V$  den Grad von  $v$ .

$v$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\deg(v)$										

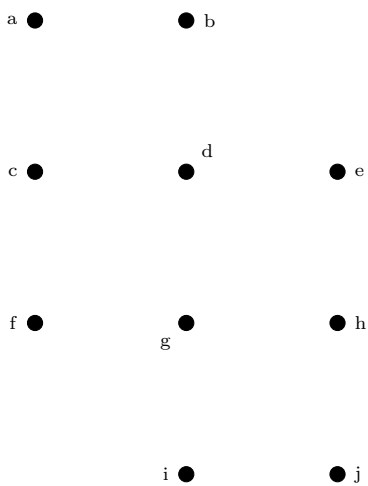
Bestimmen Sie.

$\Gamma(h) =$

Gibt es einen offenen (d.h. nicht geschlossenen) Eulerzug oder eine Eulertour in  $G$ ?

- offener Eulerzug  
 Eulertour  
 weder noch

Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum von  $G$  und zeichnen Sie die Kanten in folgender Skizze ein.



Punkte:  /6

(Raum für Notizen)

Kreuzen Sie in folgender Aufgabe bei jeder Frage genau eine Antwort an und geben Sie eine *kurze* Begründung zu Ihrer Antwort. Pro Frage gibt es 1 Punkt, sofern das Kreuz richtig gesetzt ist und die Begründung richtig ist. Alle anderen Fälle (falsches oder fehlendes Kreuz oder falsche/unzureichende oder fehlende Begründung) ergeben 0 Punkte.

8	Beschreibt $\bar{0} \mapsto \bar{0}, \bar{1} \mapsto \bar{1}, \bar{2} \mapsto \bar{2}, \bar{3} \mapsto \bar{3}, \bar{4} \mapsto \bar{4}$ eine Abbildung von $\mathbb{Z}_4$ nach $\mathbb{Z}_3$ ? <span style="float: right;"><input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein</span>
	<i>Begründung.</i>
	Es sei eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ gegeben und es sei $\mathcal{P} := \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in N\}$ . Ist $\mathcal{P}$ stets eine Partition von $M$ ? <span style="float: right;"><input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein</span>
	<i>Begründung.</i>
	Es seien Abbildungen $f: M \rightarrow M$ und $g: M \rightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M$ gegeben. Ist $f$ stets surjektiv? <span style="float: right;"><input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein</span>
<i>Begründung.</i>	
Ist die Abbildung $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ mit $f(\bar{-5}) = \bar{2}, f(\bar{0}) = \bar{-3}, f(\bar{2}) = \bar{-1}, f(\bar{4}) = \bar{2}$ injektiv oder surjektiv? <span style="float: right;"> <input type="checkbox"/> injektiv, n. surj.  <input type="checkbox"/> surjektiv, n. inj.  <input type="checkbox"/> bijektiv  <input type="checkbox"/> weder noch         </span>	
<i>Begründung.</i>	

Punkte:    /4

(Raum für Notizen)

Bei den folgenden beiden Aufgaben sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite fort.

9	Zeigen oder widerlegen Sie: Die logischen Terme $B \Rightarrow (A \vee C)$ und $(B \wedge \neg A) \Rightarrow C$ sind zueinander logisch äquivalent. <span style="float: right;"><i>(5 Punkte)</i></span>
---	---

Punkte:  /5

10	<p>Es sei</p> $U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}.$ <p>Zeigen Sie, dass <math>U</math> eine Untergruppe von <math>GL_2(\mathbb{R})</math> ist. Ist <math>U</math> kommutativ? <span style="float: right;">(6 Punkte)</span></p>
----	--

Punkte:  /6

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_ Name: \_\_\_\_\_

---

Blatt 11

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_ Name: \_\_\_\_\_

---

Blatt 12

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)