Übungsblatt 1

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 05 Nov 2007 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:05 AM CET

Zur Erinnerung die Bewertung der Online-Aufgaben: richtige Antwort 1 Punkt, falsche Antwort -1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte (es ist also besser, nicht zu raten). Bis zum Abgabezeitpunkt können Sie das Blatt immer wieder aufrufen und Ihre Antworten abändern, nach dem Abgabezeitpunkt sehen Sie die Auswertung. Mit der schriftlichen Aufgabe können Sie bis zu 5 Bonuspunkte bekommen.

1	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1,\{2,3\},3\})$ hat 8 Elemente.	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ ist gerade}\}\subseteq\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid x+y=0\}\subseteq\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid x\cdot y=0\}$	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Menge $\{(x,y)\in\{1,2,3\}\times\{2,3\}\mid x\cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat genau 2 Elemente.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt! Hier ist $M\setminus N$ die **Differenzmenge** zweier Mengen M und N, also gleich $\{m\in M\mid m\notin N\}$.	
	Wenn $A\cup B\subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A\subseteq C$ als auch $B\subseteq C$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$	◯ Ja / ◯ Nein
	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $A\subseteq B$, dann ist $C\cap A\subseteq C\cap B$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
	$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},(x,y)\mapsto x^2+2y$ ist eine surjektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
	$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},x\mapsto(x^2,x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
	$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},x\mapsto(x,x+1)$ ist eine surjektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
	$f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},(x,y)\mapsto(x^2,x-y)$ ist eine injektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
	$F:\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z},x\neq y\}\to\mathbb{Z},(x,y)\mapsto x^2+y$ ist eine surjektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Welche der folgenden Relationen R sind Äquivalenzrelationen?	
	$R=\{(A,B)\in\mathrm{Pot}(\mathbb{N})\times\mathrm{Pot}(\mathbb{N})\mid$ es gibt eine bijektive Abbildung von A nach $B\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}\subseteq\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid a-b \text{ ist durch 6 teilbar}\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid a/b=1\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$R=\big\{(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\mid a^2+b^2=1\big\}$.	◯ Ja / ◯ Nein

5	Entscheiden Sie für jede der folgenden Gleichungen, ab sie für alle Mengen M und N und alle Abbildungen $f : M \to N$, sowie alle Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq M$ und $N_1, N_2 \subseteq N$ richtig ist. Falls ja, beweisen Sie die Gleichung. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an. (a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ (b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$ (c) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ (d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 5. November 2007, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).

Übungsblatt 2

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 19 Nov 2007 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:09 AM CET

1	Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen A, B und C. Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?	
	Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist g bijektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist g injektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $A = C$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f injektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Es seien die folgenden Mengen gegeben: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 10\}$, $B := \{\{\}, 1, \mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$, $C := \{5, 6, 7, 8\}$. Außerdem seien die folgenden Abbildungen gegeben: $i : A \to \mathbb{Z}, n \mapsto n$; $f : C \to A, n \mapsto n/2$ falls n gerade ist und $n \mapsto (n-1)/2$ falls n ungerade ist; $g : \mathbb{Z} \to A, z \mapsto r$, wobei $z = 11q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 11$. Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Geben Sie als Ergebnisse entweder eine Zahl oder das Wort `unendlich` an.	
	Anzahl der bijektiven Abbildungen $B \to C$.	______
	Anzahl der surjektiven Abbildungen $A \to B$.	______
	Anzahl der Elemente in der Definitionsmenge von i.	______
	Anzahl der injektiven Abbildungen $B \to A$.	______
	Anzahl der Elemente im Urbild von $\{3, 4\}$ unter f.	______
	Sei $h = g \circ i \circ f$. Anzahl der Elemente in der Faser $h^{-1}(\{3\})$	______
	Anzahl der Elemente in der Wertemenge von $g \circ i$.	______
	Anzahl der Fasern von g.	______
	Anzahl der Elemente in der Wertemenge von f.	______
	Anzahl der Elemente in der Wertemenge von i.	______
3	Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?	
	Zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge M sind genau dann gleich, wenn jede Äquivalenzklasse bezüglich der ersten Relation auch eine Äquivalenzklasse bezüglich der zweiten ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für jede Menge M gibt es genau eine Relation auf M, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 81 verschiedene Relationen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.	◯ Ja / ◯ Nein

4	(a) Finden Sie geschlossene Formeln für die Summen $f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ und $g(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion. (b) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $x > -1$ und $x \neq 0$. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt: $(1+x)^n > 1+nx$.

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 19. November 2007, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).

Übungsblatt 3

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 03 Dec 2007 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:11 AM CET

1	Bitte tragen Sie Zahlen als Ergebnisse ein.	
	Wieviele 7-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?	______
	Auf wieviele Arten lässt sich die Buchstabenfolge `EXZELLENZ` umsortieren?	______
	Wieviele Teilmengen mit höchstens 4 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 10\}$?	______
	Auf wieviele Arten lässt sich die Buchstabenfolge `abcd` umsortieren?	______
	Wieviele Dezimalzahlen mit bis zu zehn Ziffern enthalten die Ziffer 3?	______
2	Bitte tragen Sie Zahlen als Ergebnisse ein.	
	Wieviele Bitfolgen der Länge 32 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?	______
	Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen mindestens eine ein beschädigtes Ei enthält?	______
	Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es zwei Zuschauerinnen und einen Zuschauer auszusuchen?	______
	Bei einer Tagung sollen 10 Leute vortragen. Wieviele mögliche Vortragsprogramme gibt es noch, wenn die ersten drei Vorträge bereits fest besetzt sind?	______
	Wieviele Augenkombinationen gibt es bei einem Wurf von 6 Würfeln?	______
3	Eine Menge mit r Elementen besitzt $\binom{r}{l}$ l-elementige Teilmengen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Aus einem beliebig großen Vorrat von Kugeln in l Farben sollen i Kugeln ausgewählt werden. Es gibt $\binom{i+l-1}{i}$ mögliche Farbzusammenstellungen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Anzahl der n-Tupel aus einer Menge von k Elementen und mit paarweise verschiedenen Einträgen ist $\binom{k}{n}n!$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b+1}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Anzahl der Zeichenketten der Länge k aus einem Alphabet mit n Zeichen ist $\binom{n}{k}$.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Es sollen Passwörter gebildet werden aus 26 Kleinbuchstaben, 26 Großbuchstaben, 10 Ziffern und 10 Satzzeichen. Typische Passwörter sollten mindestens 8 Zeichen enthalten, in diesen Aufgaben erlauben wir kürzere, damit die Rechnungen leichter sind. Bitte tragen Sie Zahlen als Ergebnisse ein.	
	Wieviele Passwörter der Länge 5, die ein Satzzeichen und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?	______
	Wieviele Passwörter der Länge 4 ohne Satzzeichen sind möglich?	______
	Wieviele Passwörter mit höchstens 5 Zeichen, in denen mindestens ein Groß- und ein Kleinbuchstabe, sowie mindestens eine Ziffer und ein Satzzeichen vorkommen, sind möglich?	______

	Wieviele Passwörter mit 5 Zeichen, unter denen mindestens ein Groß- und ein Kleinbuchstabe vorkommt, sind möglich?	________________
	Wieviele Passwörter mit höchstens 5 Zeichen aus paarweise verschiedenen Buchstaben sind möglich?	________________
Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.		
5	Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Personen so auf eine Reihe von n Stühlen zu setzen, dass keine zwei nebeneinanderstehenden Stühle besetzt sind? Beweisen Sie Ihre Behauptung.	
Abgabe bis spätestens am Montag, dem 3. Dezember 2007, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).		

Übungsblatt 4

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 17 Dec 2007 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:13 AM CET

1	Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}.	
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	◯ +1 / ◯ -1
2	Es sei σ die folgende Permutation von 9 Punkten: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. In den folgenden Fragen ist jeweils eine Verknüpfung von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable i anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit die susammengesetzte Abbildung gleich σ ist.	
	$(1\,2) \circ (1\,3) \circ (2\,5) \circ (9\,8) \circ (8\,7) \circ (7\,i) \circ (3\,6)$	__________
	$(5\,7) \circ (2\,7) \circ (6\,7) \circ (i\,8) \circ (8\,5) \circ (1\,3) \circ (3\,9)$	__________
	$(1\,2) \circ (i\,7) \circ (2\,5) \circ (1\,6) \circ (1\,7) \circ (3\,9) \circ (8\,9)$	__________
	$(4\,5) \circ (1\,5) \circ (9\,8) \circ (3\,8) \circ (6\,2) \circ (8\,7) \circ (2\,4) \circ (7\,i) \circ (1\,4)$	__________
	$(1\,3) \circ (9\,3) \circ (9\,8) \circ (5\,8) \circ (8\,2) \circ (6\,8) \circ (7\,i)$	__________
3	Seien $s_{n,k}$ und $S_{n,k}$ die Stirlingzahlen erster Art und zweiter Art, wie in der Vorlesung (beziehungsweise in Aufgabe 5) definiert. Berechnen Sie die gefragten Anzahlen, beziehungsweise entscheiden Sie, ob die angegeben Gleichungen richtig sind.	
	Gilt $s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + ns_{n-1,k-1} + n(n-1)s_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?	◯ ja / ◯ nein
	Gilt $s_{n+1,k} = s_{n-1,k-2} + ns_{n-1,k-1} + ns_{n,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?	◯ ja / ◯ nein
	Wieviele Permutationen auf 5 Elementen haben genau einen Zykel?	__________
	Es gibt mehr Partitionen von $\underline{100}$ in genau 97 Teile als es Permutationen von $\underline{100}$ mit genau 97 disjunkten Zykeln gibt.	◯ ja / ◯ nein
	Wieviele Permutationen auf 4 Elementen haben genau 3 Zykel?	__________
4	Bestimmen Sie für die folgenden Permutationen die jeweilige Anzahl disjunkter Zykeln, in die sie zerfallen.	
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 9 & 4 & 2 & 8 & 6 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	__________
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 10 & 2 & 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	__________

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 9 & 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	________
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	________
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	________

Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.

5 Sei A eine Menge und $A_1,\dots,A_k \subseteq A$. Dann heißt $\{A_1,\dots,A_k\}$ eine *k-Partition* von A, wenn $A_i \neq \emptyset$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $1 \le i, j \le k$ und $i \neq j$ ist, und wenn außerdem $\cup_{i=1}^{k} A_i = A$ gilt.
Für $n,k \in \mathbb{N}_0$ sei $S_{n,k}$ die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge, wobei wir $S_{0,0} := 1$ setzen. (Die $S_{n,k}$ heißen *Stirling-Zahlen zweiter Art*.)

(a) Zeigen Sie, dass $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$ und dass $S_{n,k} = 0$ für $k > n$.

(b) Zeigen Sie für $1 \le k \le n$, dass $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ ist.

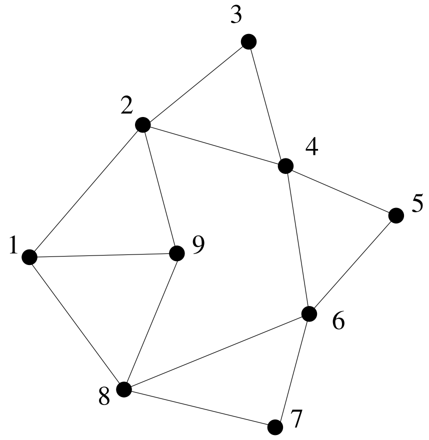
(c) Berechnen Sie alle Stirling-Zahlen $S_{n,k}$ mit $n \le 7$.

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 17. Dezember 2007, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).

Übungsblatt 5

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 07 Jan 2008 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:15 AM CET

1	Sei $G = G(V,E)$ der folgende Graph: 	
	Wieviele Knoten hat G, an denen ein Eulerweg beginnt?	
	Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 1?	
	Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{4,6\}$ inzident?	
	Wieviele Kanten hat der auf $\{6,7,8,9\}$ induzierte Teilgraph?	
	Wieviele Zeilen hat die Adjazenzmatrix von G?	
	Wieviele Knoten hat G, an denen eine Eulertour beginnt?	
	Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{4,6\}$ inzident?	
	Wieviele Nachbarn hat der Knoten 9?	
	Was ist die Summe der Grade aller Knoten?	
	Wieviele kürzeste Wege von 1 nach 5 gibt es?	
	Wieviele Wege der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?	
	Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1,4,8,9\}$ induzierte Teilgraph?	
	Was ist der Grad des Knotens 4?	
	Wieviele Zusammenhangskomponenten hat G?	
	Was ist die größte Länge eines Kreises in G?	
2	Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über Graphen $G(V,E)$ richtig sind.	
	Wenn $\|V\| = n$ und $\|E\| > (n-1)(n-2)/2$ ist, dann ist $G(V,E)$ zusammenhängend.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $G(V,E)$ zusammenhängend ist, dann gilt $\|E\| \geq \|V\| - 1$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt einen Graphen, dessen Knoten die Grade $2,2,2,3,3,4,4,4,4$ haben.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $G(V,E)$ zusammenhängend ist und einen Kreis enthält, dann gibt es eine Kante $e \in E$, so dass auch $G(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt einen Graphen, dessen Knoten die Grade $2,2,2,5,6,7,7,8,8,8$ haben.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.		

3	(a) Sei $G(V,E)$ ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis besitzt und sei $A \subseteq V$. Beweisen Sie, dass der auf $V \setminus A$ induzierte Graph höchstens $\lvert A \rvert$ Zusammenhangskomponenten besitzt. (b) Sei Q_n der Würfelgraph in Dimension n. Dieser Graph hat die Knotenmenge $\{(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_i \in \{0,1\}$ für alle $1 \leq i \leq n\}$ und zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Beweisen Sie, dass Q_n einen Hamiltonschen Kreis enthält. (c) Beweisen Sie, dass der zweite Graph in Beispiel (3.14) aus der Vorlesung (der *Petersen Graph*) keinen Hamiltonschen Kreis enthält.

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 7. Januar 2008, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).

Übungsblatt 6

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 21 Jan 2008 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:16 AM CET

1	Sei der Graph $G(V,E)$ ein Baum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind.	
	Für jede Teilmenge $E' \subseteq E$ ist $G(V,E')$ ein Wald.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jeder Teilgraph von $G(V,E)$ ist ein Wald.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für jedes $e \in E$ gilt, dass $G(V, E \setminus \{e\})$ zwei Zusammenhangskomponenten hat.	◯ Ja / ◯ Nein
	Für jedes $v \in V$ gilt, dass der durch $G(V,E)$ auf $V \setminus \{v\}$ induzierte Graph ein oder zwei Zusammenhangskomponenten hat.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten, so dass $V \setminus V'$ nur aus Blättern besteht. Dann ist der auf V' induzierte Teilgraph auch ein Baum.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Geben Sie ganze Zahlen als Antworten an.	
	Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von der Menge der Permutationen von $\{1,2,3\}$ nach $\{-1,1\}$?	__________
	Wieviele 7-stellige Telefonnummern kann es in einem Ortsnetz geben, in denen mindestens eine Ziffer mehrfach vorkommt?	__________
	Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus fünf Sorten Bier eine Kiste mit zwanzig Flaschen zu kaufen?	__________
	Auf wieviel verschiedene Weisen können 7 Autos auf 12 freien Parkplätzen geparkt werden?	__________
	Wieviele Abbildungen gibt es von $\{i \in \mathbb{Z} \mid i^4 < 700\}$ nach $\{-1,1\}$?	__________
	Wieviele Graphen mit Knotenmenge $\{1,2,3,4,5\}$ gibt es?	__________
	Bei einem Seminar sollen 6 Studierende jeweils zwei Vorträge halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Vortragenden?	__________
	Wieviele Lotto-Ziehungen (6 aus 49) gibt es, so dass in einer festen Tippreihe höchstens 4 richtige Zahlen sind?	__________
3	Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. f ist genau dann injektiv, wenn das Urbild $f^{-1}(B)$ jeder nicht-leeren Teilmenge $B \subseteq N$ nicht leer ist.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt eine bijektive Abbildung von der Menge $\{1,2,\ldots,2048\}$ auf die Menge der Graphen mit Knotenmenge $\{a,b,c,d,e\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Faser einer injektiven Abbildung enthält genau ein Element.	◯ Ja / ◯ Nein
	Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist g surjektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto \lvert x \rvert! + x^2 - y$, ist surjektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei M eine endliche Menge. Eine injektive Abbildung $f : M \to M$ ist bijektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.		

4	Es sei G ein endlicher Graph mit n Knoten. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen: (a) G ist ein Baum. (b) G hat $n-1$ Kanten und keine Kreise. (c) G hat $n-1$ Kanten und ist zusammenhängend. (d) G ist zusammenhängend, und jede Kante von G ist eine Brücke (das heißt, dass der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, wenn diese Kante weggelassen wird).

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 21. Januar 2008, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).

Übungsblatt 7

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Für Matrikelnummer: [redacted]
Abgabezeitpunkt: Mon 04 Feb 2008 10:00:00 AM CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 13 Feb 2008 11:54:17 AM CET

1	Treffen die folgenden Behauptungen im Allgemeinen zu?	
	In einer abelschen Gruppe $(G,\cdot)$ bilden die Elemente $\{x\cdot x \mid x\in G\}$ eine Untergruppe.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt Körper mit unendlich vielen Elementen.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jede Gruppe ist ein Ring.	◯ Ja / ◯ Nein
	Jeder Ring ist ein Körper.	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei G eine Gruppe mit Untergruppen U_1 und U_2. Dann ist $U_1\cup U_2$ keine Untergruppe von G.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Entscheiden Sie jeweils ob die Behauptung richtig ist.	
	Sei S die symmetrische Gruppe auf einer endlichen Menge. Die Permutationen von S mit Signum -1 bilden eine Untergruppe von S.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die surjektiven Abbildungen einer Menge in sich selbst bilden eine Gruppe.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die symmetrische Gruppe auf einer Menge mit fünf Elementen ist abelsch.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die geraden ganzen Zahlen bilden einen Ring.	◯ Ja / ◯ Nein
	Die geraden ganzen Zahlen sind eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Berechnen Sie jeweils nach dem Euklidischen Algorithmus einen größten, gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen a und b. Bestimmen Sie dann Zahlen $x,y\in\mathbb{Z}$ mit $x\cdot a+y\cdot b=\lvert d\rvert$, so dass $0\le x<\frac{b}{\lvert d\rvert}$ ist. Beantworten Sie dann die jeweilige Frage.	
	Was ist x für $a=2561792$ und $b=2562304$?	________________
	Was ist $\lvert d\rvert$ für $a=987$ und $b=610$?	________________
	Was ist $\lvert d\rvert$ für $a=65432100$ und $b=12345600$?	________________
	Was ist y für $a=75789033$ und $b=309264066$?	________________
	Was ist $\lvert d\rvert$ für $a=247$ und $b=323$?	________________
4	Es sei $R=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m\in\mathbb{N}$ der in der Vorlesung definierte Restklassenring. Weiter sei a eine Einheit in R. Dann ist eine Potenz von a gleich $\bar{1}$, der kleinste Exponent $k\in\mathbb{N}$ mit $a^k=\bar{1}$ heißt die *Ordnung* von a. Dieses k ist immer ein Teiler von $\varphi(m)$ (Euler φ-Funktion). Bestimmen Sie jeweils für die angegebenen a und m die Ordnung von a. Mitunter ist a als Potenz einer Einheit b gegeben, deren Ordnung in der Aufgabenstellung angegeben ist.	
	Die Ordnung von $\overline{96}$ für $m=1001$ ist 60. Die Ordnung von $\overline{96}^{789}$ für $m=1001$ ist	________________
	Die Ordnung von $\overline{11}$ für $m=12$ ist	________________
	Die Ordnung von $\overline{17}$ für $m=121$ ist 110. Die Ordnung von $\overline{17}^{44}$ für $m=121$ ist	________________
	Die Ordnung von $\overline{25}$ für $m=51$ ist	________________
	Die Ordnung von $\overline{13}$ für $m=97$ ist 96. Die Ordnung von $\overline{13}^{51}$ für $m=97$ ist	________________
Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.		

5	(a) Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche φ-Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $T(n)$ die Menge der positiven Teiler von n. Zeigen Sie, dass $n = \sum_{d \in T(n)} \varphi(d)$ ist. (b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p (\mod p)$.

Abgabe bis spätestens am Montag, dem 4. Februar 2008, um 10 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufrufen des Blattes die Auswertung der Online-Fragen. Die Lösung der schriftlichen Aufgabe geben Sie bitte im Zettelkasten am Lehrstuhl D ab (Templergraben 64, 2. Stock).