Übungsblatt 5

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. E. Triesch, WS 2006/07

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Fr 02 Feb 2007 02:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: So 21 Jan 2007 18:19:29 CET

Zur Erinnerung: Jede richtige Antwort gibt 1 Punkte. Jede falsche Antwort gibt -1 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. Pro Aufgabe gibt es nicht weniger als 0 Punkte.

1	Seien $p = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $q = x^3 - 3x - 2$ Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. ggT bezeichne den größten gemeinsamen Teiler. Zur Vereinfachung der Aufgabenstellung kürzen wir ab: Für ein Polynom r sei $N(r)$ die Menge der Nullstellen. Für eine Nullstelle y eines Polynoms r sei $v(r,y)$ ihre Vielfachheit. Sei weiterhin $$V(r) = \max_{y \in N(r)} v(r,y).$$ Geben Sie den Wert der folgenden Ausdrücke als ganze Zahl an.	
	$\lvert N(\mathrm{ggT}(pq, q^3))\rvert$	____________
	$\lvert N(p^2 q)\rvert$	____________
	$V(\mathrm{ggT}(p^2, q^3))$	____________
	$V(p^2 q^3)$	____________
2	Seien $\pi = (1,2)(3,4,6)(5)$ und $\rho = (1,3,2,4,6)(5)$ Permutationen in Zykelschreibweise. Außerdem sei $\sigma = \pi \cdot \rho = (1,4,3)(2,6)(5)$, id bezeichne die Permutation $(1)(2)(3)(4)(5)(6) = ()$. Gelten folgende Aussagen?	
	$\rho^7 = (1,2,6,4,3)(5)$.	◯ ja / ◯ nein
	Es gibt eine Permutation τ der Zahlen 1 bis 6 mit $\tau^{-1}\pi\tau = \sigma^{-1}$	◯ ja / ◯ nein
	$\sigma^{666666} = id$.	◯ ja / ◯ nein
	$\pi^{-1}\sigma\rho^{-1} = id$.	◯ ja / ◯ nein
3	Seien $\pi = (1,2)(3,4,6)(5)$ und $\rho = (1,3,2,4,6)(5)$ Permutationen in Zykelschreibweise. Die Inversionstafelschreibweise von π ist z.B. 1 0 3 0 1 0. Gelten folgende Aussagen?	
	Es gibt eine Permutation τ, so dass $\pi = \tau\pi^{77}\tau^{-1}$	◯ ja / ◯ nein
	Die Inversionstafel von ρ^2 ist 3 0 3 2 1 0.	◯ ja / ◯ nein
	Es gibt eine Permutation mit Inversionstafel 3 0 3 3 1 0.	◯ ja / ◯ nein
	Für <u>alle</u> Permutationen auf 6 Elementen τ existiert ein σ mit $\sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^7$.	◯ ja / ◯ nein

4	Operatoren sind auch Funktionen; nur bilden sie gewisse Funktionen auf Funktionen ab: Ist F die Menge oder wegen Struktur der auch sogenannte Raum von gewissen Funktionen f, ist ein Operator O eine Funktion $O: F \to F$. Für Funktionen ist Addition und Multiplikation durch Addition und Multiplikation der Funktionswerte definiert. Für Operatoren ist die Addition durch Addition der Funktionen definiert, aber die Multiplikation von zwei Operatoren ist die Hintereinanderausführung! Beispiel: $(E\Delta)(f)(x) = E(\Delta(f))(x) = E(E(f) - Id(f))(x) = f((x+1)+1) - f(x+1)$ Für einen Operator O ist O^n die n-fache Ausführung von O. Ist O umkehrbar, so ist auch $O^{-n} = (O^{-1})^n$ definiert, und nach 0-maliger Ausführung ist also $O^0(f) = f$ also $O^0 = Id$! Sei $F := \{f \| f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$. Für alle Funktionen $f \in F$ seien folgende Operatoren definiert: $$Id(f) := f, \text{ d.h. } Id(f)(x) = f(x) \forall x,$$ $$E(f) \text{ durch } E(f)(x) = f(x+1) \forall x$$ und $$\Delta := E - Id, \text{ d.h. } \Delta(f) := E(f) - Id(f), \text{ d.h. } \Delta(f)(x) := E(f)(x) - Id(f)(x) = f(x+1) - f(x) \forall x.$$ Mit diesen Operatoren wird die zur Differenzialrechnung analoge Differenzenrechnung betrieben. Gelten die folgenden Aussagen?

Aussage	Antwort
$\sum_{x=1}^{n-1}(E\Delta)(f)(x) = f(n+1) - f(1)$ für alle f und $n > 5$.	◯ ja / ◯ nein
Für alle $f \in F$ gilt $Id(f) \neq E(f)$.	◯ ja / ◯ nein
Wenn $\Delta(f) = E(f)$, dann ist $f(x) \neq f(0) * 2^x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.	◯ ja / ◯ nein
Wenn $\Delta(f) = f$ und $f(0) > 0$, dann ist $0 \leq f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.	◯ ja / ◯ nein

5 Die Funktionen f, g und h werden rekursiv berechnet:

$$f(n) := f(\lfloor n/2 \rfloor) + n, \text{ wenn } n \geq 2; f(n) := n \text{ sonst.}$$

$$g(n) := f(\lfloor n/2 \rfloor) + g(n-1), \text{ wenn } n \geq 2; g(n) := n \text{ sonst.}$$

$$h(n) := f(n) + g(n) + h(n-3), \text{ wenn } n \geq 2; h(n) := n \text{ sonst.}$$

($\lfloor . \rfloor$ bedeutet Abrunden auf die nächste ganze Zahl.)
Für die Berechnung der linken Seite einer Funktion werden die Funktionen auf der rechten Seite aufgerufen.
Man gebe die Anzahl der Funktionsaufrufe der Funktion f für die folgenden Ausdrücke an, d.h.: Wie oft wird der Ausdruck $f(n)$ für irgendwelche n durch eine der möglichen rechten Seite ersetzt?
Beispiel: $f(1)$ ruft nur einmal f auf: $\boxed{\text{f(1)}} \to 1$.
Beispiel: $f(4)$ ruft dreimal f auf: $\boxed{\text{f(4)}} \to f(2)+4$ und $\boxed{\text{f(2)}} \to f(1)+2$ und $\boxed{\text{f(1)}} \to 1$.
Beispiel: $g(4)$ ruft viermal f auf: $g(4) \to f(2) + \underline{g(3)}$, $\boxed{\text{f(2)}} \to f(1)+2$, $\boxed{\text{f(1)}} \to 1$;
$g(3) \to f(1) + \underline{g(2)}$, $\boxed{\text{f(1)}} \to 1$;
$g(2) \to f(1) + \underline{g(1)}$, $\boxed{\text{f(1)}} \to 1$;
$g(1) \to 1$.
Ist das Argument einer der Funktionen keine Zahl sondern ein Ausdruck, so wird erst dieser Ausdruck ausgewertet, um den Wert zu berechnen:
Beispiel: $f(f(2))$. Auswertung innerer Ausdruck: $f(2)$ ruft zweimal f auf. Es ist $f(2) = f(1) + 2 = 3$. $f(3)$ ruft f ebenfalls zweimal auf, also insgesamt 4 Aufrufe der Funktion f.

Ausdruck	Antwort
$f(f(4))$	________________
$f(1100)$	________________

	$g(5)$	________________
	$h(4)$	________________
Abgabe bis spätestens 1.2.2007		