Übungsblatt 4

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. E. Triesch, WS 2006/07

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: So 24 Dez 2006 02:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 18 Dez 2006 17:45:35 CET

Zur Erinnerung: Jede richtige Antwort gibt 1 Punkte. Jede falsche Antwort gibt -1 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. Pro Aufgabe gibt es nicht weniger als 0 Punkte.
In Übereinstimmung mit der Vorlesung bezeichne $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen, wobei 0 nicht zu den natürlichen Zahlen gerechnet werden soll. Beachten Sie auch das 4. Übungsblatt!
Achtung: Überprüfen Sie die Rechenaufgaben auf Rechen- oder Denkfehler, etwa durch Vergleich mit den Lösungen anderer. Denn jeder Fehler ergibt einen Minuspunkt.

1 Seien $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Falls $n \geq 1$, gelte für die Funktion f, dass

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k).$$

Das ist die Rekursion der Binomialkoeffizienten. ($\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.)
Nun seien noch die Werte von f für $n = 0$ definiert. In Abhängigkeit von diesen sogenannten Anfangswerten, die angegeben werden, beantworten Sie die folgenden Fragen. (Für negative k und $k \geq n+1$ ist $\binom{n}{k} = 0$.)
Tipp: Zeichnen Sie ein Analogon zum Pascalschen Dreieck, um zu sehen, was passiert.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & & a & & b & & c & & \dots \\
\dots & ?+a & & a+b & & b+c & & c+? & \dots \\
\dots & & ?+2a+b & & a+2b+c & & b+2c+? & & \dots
\end{array}$$

Sei $f(0,k) = \begin{cases} 3, & \text{falls } k = 0 \\ 1, & \text{falls } k = -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Gilt $f(25,-1) = 0$?	◯ ja / ◯ nein
Sei $f(0,k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Gilt für alle n,k, dass $f(n,k) = \binom{n+1}{k}$?	◯ ja / ◯ nein
Sei $f(0,k) = \begin{cases} 3, & \text{falls } k = 0 \\ 99, & \text{falls } k = -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Gilt für alle n,k, dass $f(n,k)$ durch 3 teilbar ist?	◯ ja / ◯ nein
Sei $f(0,k) = \begin{cases} 2, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Gilt für alle n,k, dass $f(n,k) = 2\binom{n+1}{k}$?	◯ ja / ◯ nein

2 Sei ι die Indikatorfunktion der Menge X, d.h.

$$\iota_X(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in X \\ 0 & \text{, falls } x \notin X \end{cases}.$$

Gelten die folgenden Aussagen für <u>alle</u> entsprechenden Mengen X, Y, Z?

	Seien X und Y beliebige Mengen. Aussage: $\sum_{x\in Y}(\iota_X(x)+\iota_Y(x)) = \lvert Y\rvert$.	◯ ja / ◯ nein
	Seien X, Y und Z beliebige Mengen. Aussage: $\sum_{x\in X\cup Y\cup Z}(\iota_X(x)\iota_Y(x)\iota_Z(x)) \geq \lvert X\cap Y\cap Z\rvert$.	◯ ja / ◯ nein
	Seien X und Y Mengen mit $X\subseteq Y$. Aussage: $\iota_X(x)\leq\iota_Y(x)$ für alle $x\in X\cup Y$.	◯ ja / ◯ nein
	Seien X und Y Mengen mit $X\subseteq Y$. Aussage: $\iota_X(x)\iota_Y(x)=\iota_X(x)$ für alle $x\in X\cup Y$.	◯ ja / ◯ nein
3	Wie groß sind die angegebenen Mengen M? Sie können mit dem Prinzip der Inklusion–Exklusion arbeiten.	
	M sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 999 sind und weder durch 12 noch 17 noch 9 teilbar sind.	____________
	M sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 999 sind und weder von der Form n^2 noch n^3 sind ($n\in\mathbb{N}$).	____________
	In einem Teich sind 200 Fische. 60 sind rot. 30 haben kurze Flossen. 40 sind zu klein, wobei einige der Fische mehrere Eigenschaften besitzen: Jeder dritte rote Fisch ist zu klein. Jeder fünfte mit kurzen Flossen ist ebenfalls zu klein. Es gibt jedoch nur einen kurzflossigen roten Fisch, und der ist ebenfalls zu klein. M sei die Menge aller Fische, die weder zu klein noch rot sind und auch keine kurzen Flossen haben.	____________
	M sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 999 sind und weder eine 5 noch eine 6 als Ziffer in der Dezimaldarstellung haben.	____________
4	In einem Kartenspiel befinden sich 12 Karten: 4 Buben, 4 Damen und 4 Könige. Von jeder Farbe (Kreuz, Pik , Herz, Karo) existiert jeweils ein Bube, eine Dame und ein König. Ein Blatt besteht aus 3 Karten, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Somit gibt es z.B. genau 4 verschiedene Blätter nur mit Buben. Weiteres Beispiel: Alle Blätter, die keinen Karobuben enthalten, erhält man durch Auswahl von 3 aus $12-1$ Karten: $\binom{11}{3}$. (Zum Teil ist das Prinzip Inklusion–Exklusion anwendbar.)	
	Im ersten Spiel haben wir kein Pik und keinen König im Blatt enthalten, im zweiten kein Herz, aber in einem von beiden einen Buben. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Paarungen von erstem und zweitem Blatt, sodass diese Aussage stimmt? (Achtung: „eine[n/m]“ bedeutet „mindestens eine[n/m]“.)	____________
	Wieviele mögliche Blätter gibt es, die kein Pik enthalten und auch keinen Buben?	____________
	Wieviele mögliche Blätter gibt es, die höchstens zwei Damen und höchstens zwei Buben enthalten, aber keine Pikdame?	____________
	Wieviele mögliche Blätter gibt es, die nur Buben enthalten oder mindestens 2 Damen, aber kein Pik?	____________
5	Gelten folgende Gleichungen für alle $n\in\mathbb{N}$? (Umsummieren oder doppeltes Abzählen[, oder wenn nichts funktioniert: Induktion])	
	$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+k}{i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+k}{n+2k-i}$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\sqrt[200]{i}\sqrt[201]{k} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\sqrt[200]{i}\sqrt[201]{k-i}$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}e^k\pi^l = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}e^{n-l+k}\pi^{n-l+1}$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+k}{i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n+i-k}{n-k}$	◯ ja / ◯ nein
Abgabe bis spätestens 23.12.2006		