Übungsblatt 6

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. E. Triesch, WS 2006/07

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Fr 16 Feb 2007 02:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Sa 03 Feb 2007 18:29:45 CET

Zur Erinnerung: Jede richtige Antwort gibt 1 Punkte. Jede falsche Antwort gibt -1 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. Pro Aufgabe gibt es nicht weniger als 0 Punkte. Z.B. Aufgabe 1 ergibt maximal 4 Punkte und zwei falsche und zwei richtige Antworten ergeben 0 Punkte.
Beachten Sie auch Blatt 5 für die Definitionen der Operatoren E und Δ.

1 Gegeben sei die Menge $M = \{a,b,c,d,e,f\}$ und die Operation $\circ : M \times M \to M$ dargestellt durch folgende Tabelle:

$$\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & x_2 & & & \\
 & \circ & a & b & c & d & e & f \\
\hline
 & a & e & f & d & c & a & b \\
 & b & c & d & f & e & b & a \\
x_1 & c & b & a & e & f & c & d \\
 & d & f & e & a & b & d & c \\
 & e & a & b & c & d & e & f \\
 & f & d & c & b & a & f & e
\end{array}$$

Also etwa: $x_1 = b$ und $x_2 = c$ und dann $x_1 \circ x_2 = b \circ c = f$. Gelten folgende Aussagen für die Gruppe M mit der Operation $\circ$?
Erläuterung der Begriffe:
G ist abelsch. $\Leftrightarrow$ Für alle $x,y \in G$ gilt $xy = yx$.
n ist neutrales Element von G. $\Leftrightarrow$ Für alle $y \in G$ gilt $ny = yn = y$.
y ist das Inverse von x (geschrieben $y = x^{-1}$). $\Leftrightarrow$ Es gilt $xy = yx = n$ (neutrales Element).
$N \subseteq G$ ist Normalteiler. $\Leftrightarrow$ N ist Gruppe mit der Operation von G und für alle $x \in G$ und $y \in N$ gilt $xyx^{-1} \in N$.

$\{b, b^2, b^3\}$ ist kein Normalteiler von M.	◯ ja / ◯ nein
Die Gruppe M ist nicht abelsch.	◯ ja / ◯ nein
Es gilt $d^{2006} = b$.	◯ ja / ◯ nein
Das Element a ist das neutrale Element.	◯ ja / ◯ nein

2 Sind folgende Mengen M mit der angegebenen Operation $\oplus$ Gruppen?
Zu testen:
1. $a \oplus b \in M$ für alle $\forall a,b \in M$?
2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ für alle $a,b,c \in M$?
3. Existiert $n \in M$ mit $n \oplus a = a \oplus n = a$ für alle $a \in M$?
4. Gibt es für alle $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ mit $\bar{a} \oplus a = a \oplus \bar{a} = n$?

$M = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Z}\}$ mit $(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b')$ (für $(a,b),(a',b') \in M$).	◯ ja / ◯ nein
$M = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ mit $(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b \cdot b')$ (für $(a,b),(a',b') \in M$).	◯ ja / ◯ nein
$M = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ mit $a \oplus b = a + b \mod 7$ (für $a,b \in M$).	◯ ja / ◯ nein

	$M = \{0,1,2,3,4,5\}$ mit $a \oplus b = a+b \mod 6$ (für $a,b \in M$).	◯ ja / ◯ nein
3	Beantworten Sie folgende Fragen zum Thema „Rekursiv definierte Funktionen“!	
	Sei $f(n) = 3f(n-1) - 4f(n-3)$ und $f(0) = 0$. Gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$, sodass $f(n) = 2^n + (a+n)(-1)^n$ die Rekursion erfüllt?	◯ ja / ◯ nein
	Sei $f(n) = f(n-2)$ und $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$, sodass $f(n) = \frac{a-(-1)^n}{2}$ gilt?	◯ ja / ◯ nein
	Sei $f(n) = 3f(n-2) + 2f(n-3)$. Gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$, sodass $f(n) = 2^n + (-1)^n + a$ die Rekursion erfüllt?	◯ ja / ◯ nein
	Sei $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 2^n$. Gilt für alle f_1 und f_2, die die Rekursion erfüllen, dass auch f_3, definiert durch $$f_3(n) := f_1(n) + f_2(n) - 4 \cdot 2^n,$$ die Rekursion erfüllt? (Beachten Sie: Auch $4 \cdot 2^n$ erfüllt die Rekursion!)	◯ ja / ◯ nein
4	Geben Sie den Wert für c an, mit dem die angegebene Lösung tatsächlich die vorgegebene Rekursion löst (die passenden Werten von a und b vorausgesetzt!), wobei auch Anfangswerte gegeben sind. **Achtung:** Es kommt immer ein ganzzahliger Wert heraus!	
	Rekursion: $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$ Anfangswerte: $f(0) = 1,\ f(1) = 3.$ Lösung: $f(n) = c(n+1) + a$ für gewisses $a \in \mathbb{R}$. $c =$?	______________
	Rekursion: $f(n+3) - 2f(n+2) - f(n+1) + 2f(n) = 0.$ Anfangswerte: $f(0) = 2,\ f(1) = f(2).$ Lösung: $f(n) = a2^n + b(-1)^n + c$ für gewisse $a,b \in \mathbb{R}$. $c =$?	______________
	Rekursion: $f(n+2) + 2f(n+1) - 3f(n) = 0$ Anfangswerte: $f(0) = -1,\ f(1) = 3.$ Lösung: $f(n) = a + c(-3)^n$ für gewisses $a \in \mathbb{R}$. $c =$?	______________
	Rekursion: $f(n+2) - 3f(n+1) + 2f(n) = 0$ Anfangswerte: $f(0) = 2,\ f(1) = 3.$ Lösung: $f(n) = a2^n + c$ für gewisses $a \in \mathbb{R}$. $c =$?	______________
5	Sei $F(n)$ die n-te Fibonacci-Zahl, d.h. $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Rekursion: $$F(n+2) = F(n+1) + F(n).$$ Für beliebige Funktionen f mit Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ seien wiederum die Funktionen $\Delta(f)$ durch $\Delta(f)(n) = f(n+1) - f(n)$ und $E(f)$ durch $E(f)(n) = f(n+1)$ sowie $Id(f) = f$ und $S(f)$ durch $S(f)(n) = f(-n)$ definiert. Gelten folgende Aussagen für die spezielle Funktion F der Fibonacci-Zahlen?	
	$\sum_{k=1}^{n} F(2k) = -1 + \sum_{k=1}^{n} F(2k-1).$	◯ ja / ◯ nein
	$\Delta(S(F)) = S(\Delta(F))$. (Rechnen Sie $\Delta(S(F))(n)$ und $S(\Delta(F))(n)$ aus. Der linke Operator wird zuerst ausgerechnet, weil er zwar auf eine Funktion angewandt wird, aber indirekt auf ihr Urbild (=das Argument dahinter) wirkt: etwa $\Delta(S(F))(x) = S(F)(x+1) - S(F)(x)$.)	◯ ja / ◯ nein
	$F(n) + F(n-1) + F(n-3) = F(n-1) + 2F(n-2) + 2F(n-3).$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{k=1}^{n} F(2k) = -F(2n) + \sum_{k=1}^{n} F(2k+1).$	◯ ja / ◯ nein
Abgabe bis spätestens 15.02.2007		