Übungsblatt 2

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. E. Triesch, WS 2006/07

Für Matrikelnummer: 273784
Abgabezeitpunkt: Fr 24 Nov 2006 02:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Fr 10 Nov 2006 16:25:46 CET

Zur Erinnerung: Jede richtige Antwort gibt 1 Punkte. Jede falsche Antwort gibt -1 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. Pro Aufgabe gibt es nicht weniger als 0 Punkte. Z.B. Aufgabe 1 ergibt maximal 4 Punkte und eine falsche und eine richtige Antwort ergeben 0 Punkte. Achtung: Für die Aufgaben hat man ca. 2 Wochen Zeit! Man kann die Aufgaben in der Zeit noch korrigieren. Man überlege sich die Antworten gut, manchmal scheinen sie offensichtlich, sind aber falsch!		
1	Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g ($g \geq 1$) von a und b und stellen Sie ihn in der Form $g = sa + tb$ dar, wobei $1 \leq s \leq 5$ und $s,t \in \mathbb{Z}$ sind. Klicken Sie die richtige Antwort für s an!	
	$a = 2006$, $b = 334$. $s = ?$	◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ 5
	$a = 8$, $b = -13$. $s = ?$	◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ 5
	$a = 777$, $b = 581$. $s = ?$	◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ 5
	$a = 12$, $b = 15$. $s = ?$	◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4 / ◯ 5
2	Seien p,q,r verschiedene Primzahlen. Stimmt die jeweilige Behauptung über das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV(a,b)) bzw. den größten gemeinsamen Teiler (ggT(a,b)) von a und b, falls ...	
	... $a = p^n q^m$, $b = p^m (qr)^n$ ist, wobei $n,m \in \mathbb{N}$ und $n > 0$. Behauptung: $\mathrm{kgV}(a,b) = ((-p)(-q))^{n+m}$ für alle solche m,n.	◯ ja / ◯ nein
	... $a = p^{2n} q^{2m} r$, $b = p^{2m} (qr)^{6n}$ ist, wobei $n,m \in \mathbb{N}$ und $n > 0$. Behauptung: $\mathrm{ggT}(a,b)$ ist eine Quadratzahl für alle solche m,n.	◯ ja / ◯ nein
	... $a = p^3 q^2$, $b = p^2 q^3 r^5$ ist. Behauptung: $\mathrm{ggT}(a,b) = pq$.	◯ ja / ◯ nein
	... $a = p^n q^m$, $b = p^m (qr)^n$ ist, wobei $n,m \in \mathbb{N}$ und $n > 0$. Behauptung: $\mathrm{ggT}(a,b) = ((-p)(-q))^{\min(m,n)}$ für alle solche m,n.	◯ ja / ◯ nein
3	Bestimmen Sie eine natürliche Zahl x, sodass jeweils die Behauptung erfüllt ist, und geben Sie die Zahl ein. Es gibt $i,j,k \in \mathbb{Z}$, sodass ...	
	... $x = 4i + 1$ und $x = 5j + 2$ und $x = 7k + 3$ und $0 \leq x < 140$ ist.	________________
	... $x = 5i + 2$ und $x = 6j + 3$ und $x = 7k + 1$ und $0 \leq x < 210$ ist.	________________
4	Ist die Abbildung eine Bijektion von $\{0,1,2,\ldots\}(= \mathbb{N})$ nach $\{0,1,2,\ldots\}$?	
	$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ x+1, & \text{sonst.} \end{cases}$	◯ ja / ◯ nein
	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 100 \\ 100-x, & \text{sonst.} \end{cases}$	◯ ja / ◯ nein
5	Gelten jeweils die folgenden Kongruenzen für alle $1 \leq a \in \mathbb{N}$?	
	$3^{3a+2} \equiv 4 \mod 7$	◯ ja / ◯ nein
	$19^a \equiv (-1)^a \mod 20$	◯ ja / ◯ nein

	$2^{3a+2} \equiv 4 \bmod 7$	◯ ja / ◯ nein
	$7^{2a+1} \equiv -1 \bmod 8$	◯ ja / ◯ nein
6	Nach den Rechenregeln des Modulorechnens gilt für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ z.B.: $s \equiv s - km \bmod m$, $s^n \equiv (s-km)^n \bmod m$. Ausnutzen der Potenzregeln hilft. Beispiel mod 7: $5^{1000} \equiv (5-7)^{1000} \equiv (-2)^{1000} \equiv (-2)(-2)^{999} \equiv (-2)(-2)^{3\cdot 333} \equiv (-2)\left((-2)^3\right)^{333} \equiv (-2)(-8)^{333} \equiv (-2)(-8+7)^{333} \equiv (-2)(-8+7)^{333} \equiv (-2)(-1)^{333} \equiv (-2)(-1) \equiv 2 \bmod 7$. Berechnen Sie s für $\boxed{s \equiv s' \bmod m}$ mit $0 \leq s \leq m-1$ wobei...	
	... $s' = 17^{13}$ und $m = 15$ ist. $s = ?$	________________
	... $s' = 4^{\left(91^{334}\right)}$ und $m = 5$ ist. $s = ?$	________________
	... $s' = 7^{123456789}$ und $m = 8$ ist. $s = ?$	________________
	... $s' = 1234^{87654321}$ und $m = 3$ ist. $s = ?$	________________
Abgabe bis spätestens 23.11.2006		