DiStr - Diskussion 03.05.00

-1-

christoph.schmitz2@post.rwth...

Fr., nach V: Musterlösung

prime Restklassen haben multiplikatives Inverse

Lsg. A2.2

$A=\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \quad S=\sum_{i=0}^{n} a_i \quad a_i \in \{0,\dots,9\}$

2.2. $A \equiv S$ (mod 3 / mod 9) bzw.

$10 \equiv 1$ (mod 3 / mod 9)

$\Rightarrow 10^k \equiv 1^k$ —— " —— $k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow a_k \cdot 10^k \equiv a_k$ —— " ——

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i$ (mod 3 / mod 9)

$\to$ analog f. andere Zahlensysteme:

~~Hex~~: f. 15 u. 3 u. 5 (3, 5 sind Teiler von $a_{max} = 15$)

A1.1c

$5 \mid (n^4 - 1) \Leftrightarrow 5 \nmid n$

"$\Rightarrow$": $5 \mid n \Rightarrow 5 \mid n^4 \Rightarrow 5 \nmid (n^4-1)$ / Widerspruchsbeweis

"$\Leftarrow$": $5 \nmid n$: $n = 5k + r \quad 1 \le r \le 4$

z. B. mit kl. Fermat

$n^4 - 1 = (5k+r)^4 - 1 = (5k)^4 + 4(5k)^3 r + 6(5k)^2 r^2 + 4(5k) r^3$

$+ \underbrace{r^4 - 1}_{5 \mid ?}$ $\to$ Werte für r testen ✓

zu 2.5:

$1001x + 343y = 7$

Euklid $\rightarrow$ $ggT(1001, 343) = 7$

Euklid:

p	q	r
1001	343	315
343	315	28
315	28	7
28	7	0

im Prinzip...

$$7 = 315 - 11\cdot 28 = 315 - 11\cdot(343 - 315)$$
$$= 343(-11) + (+12)(1001 - 2\cdot 343)$$
$$= (+12)\cdot 1001 \cancel{+9} -35 \cdot 343$$

(Werte wahrsch. verkehrt...)

$A, B \subseteq E(G)$

$m_G(A,B) = |\{ab \in K(G) \mid a \in A,\ b \in B\}|$

Ü4

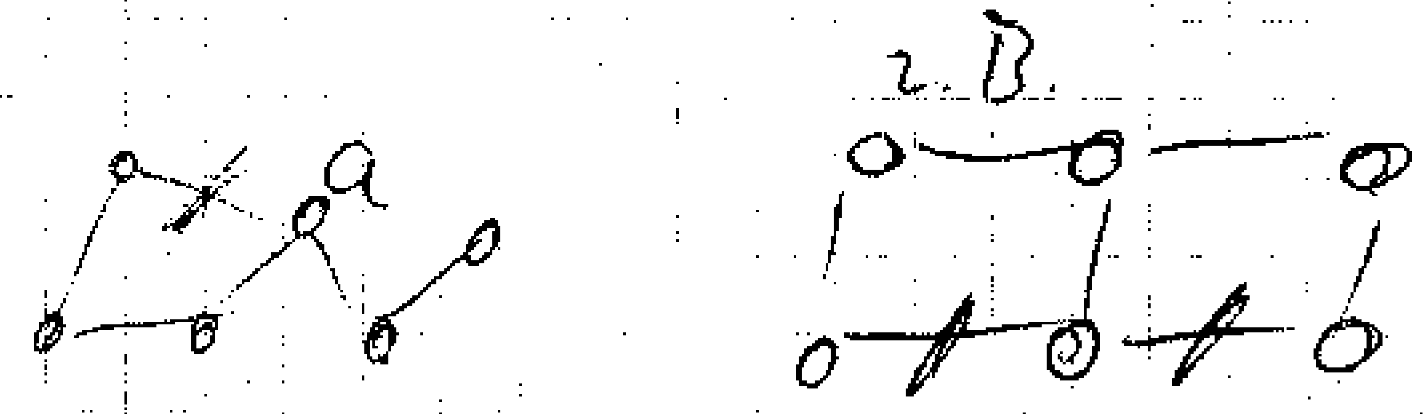
A11

G zusammenhängend; $a \in E(G)$ bel., aber fest

z.z. $\exists$ Gerüst T von G: $d(a,T) = \kappa(G-a)$

$\varkappa = \kappa(G-a)$

z.B.



$G_1, G_2, \ldots, G_\varkappa$ Komp. von $(G-a)$

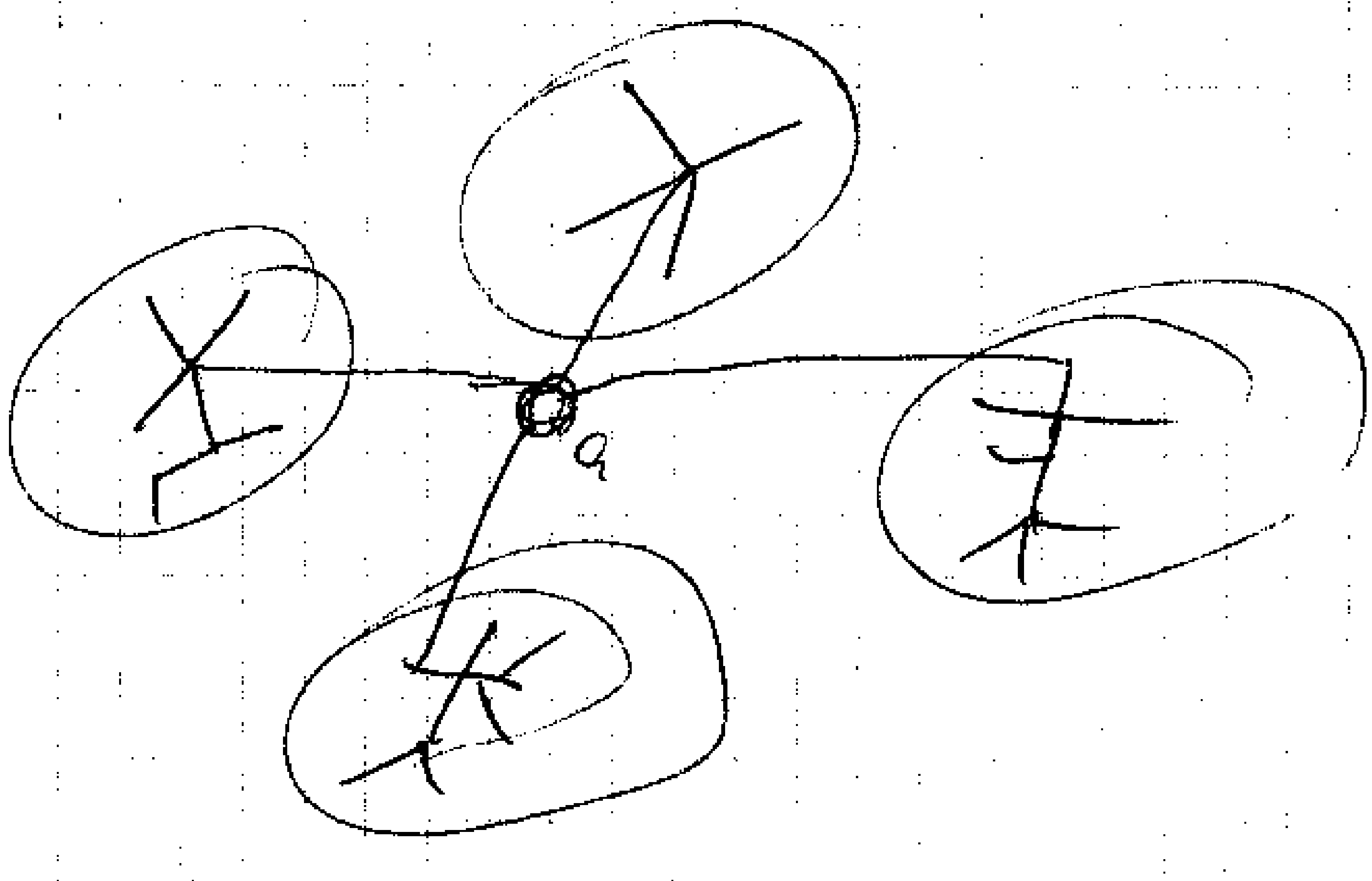
G zsh. $\Rightarrow \forall i \in \{1,\ldots,\varkappa\}\ \exists x_i \in E(G_i) \cap N(a,G)$

Sei T_i Gerüst von $G_i \Rightarrow x_i \in E(T_i)$

T: $E(T) = E(G) = \bigcup_{i=1}^{\varkappa} \underbrace{E(T_i)}_{E(G_i)} \cup \{a\}$;

$K(T) = \bigcup_{i=1}^{\varkappa} K(T_i) \cup \{a x_i \mid 1 \le i \le \varkappa\}$

Beweis zu "$\exists$": gibt an, wie man es konstruiert



Blatt 2

A2 $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

$n \geq 4$ $\quad n > m$

$[m!+2, m!+m]$ $\quad n \in \{m!+2, \dots, m!+m\}$

$n = m! + k \qquad 2 \leq k \leq m$

$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) k (k+1) \ldots m + k$

$= k(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)(k+1) \ldots m + 1)$ $\cancel{+k}$

$\Rightarrow k \mid n, \; 1 < k < n$

$\Rightarrow n$ ist keine Primzahl

$\Rightarrow$ keine Primzahlen in $[m!+2, m!+m]$

A1 → machen

A6

a) Bew. $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ $\quad$; p prim

$(\Rightarrow)$ $(a+b)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} \equiv a^p + b^p$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} \equiv 0$ $\quad$ | Def $\binom{n}{k}$

$p \equiv 0$!

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(i+1)(i+2) \ldots p}{i!} a^i b^{p-i} \equiv 0 \pmod p$

$i! \nmid p$, denn p prim und $i < p$

b) $(a+b)^p = \underbrace{(a+b)^{p-1}}_{\equiv 1 \text{ Fermat}}(a+b) \equiv 1(a+b)$

$= a+b$

$= 1 \cdot a + 1 \cdot b$

$\equiv a^{p-1}a + b^{p-1}b$

$= a^p + b^p$

Ü6

A6) $n \in \mathbb{N}$ besitze r versch. Primfaktoren $\qquad n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$

z.z. $\varphi(n) \geq \frac{n}{r+1}$

Nach Satz 5.21: $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{s_i})$

Bem. 5.12: $\varphi(p_i^{s_i}) = p_i^{s_i}(1 - \frac{1}{p_i})$

$\Rightarrow \quad \varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \underline{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i} \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)} \left[\geq n \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{2}) = n \cdot 2^{-r}\right]$

$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ und es gilt $p_i \geq i+1$ ($\to$ Induktion)

$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{p_i} \geq 1 - \frac{1}{i+1} \;\Rightarrow\; \varphi(n) \geq n \prod_{i=1}^{r} \frac{i}{i+1} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{r}{r+1} = \frac{n}{r+1}$

$= \frac{i}{i+1}$

Diskr.-Diskussion 13.05.08

-1-

G n. v. $\Rightarrow \exists x, y \in E(G): xy \notin K(G)$

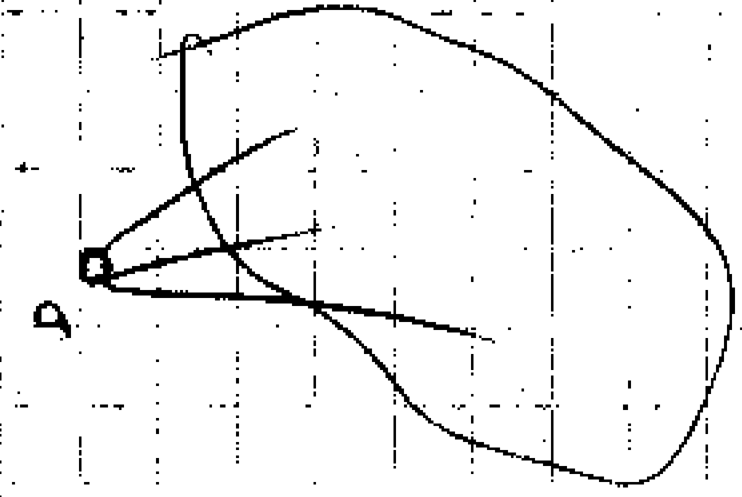
$V = v_0 v_1 \dots v_t \quad v_i \in E(G),\ v_0 = x,\ v_t = y$

$\exists v_0, v_1, v_2 : v_0 v_1, v_1 v_2 \in K(G),\ v_0 v_2 \notin K(G)$ $t \geq 2$

zu (3)

a) G zush. $n(G) \geq 2$

a) $\forall a \in E(G) \quad K(G-a) \leq d(a, G)$



b) $\forall a \in E(G): d(a,G)$ gerade:

$2\, K(G-a) \leq d(a,G) \quad \forall a$

Bew. $a \in E(G)$ beliebig, H Komponente von $G-a$,

$a_1, \dots, a_t \in N(a,G) \cap E(H) \qquad t \geq 1$

$d(a_i, H) = d(a_i, G) - m(a, a_i) \quad \forall\ 1 \leq i \leq t$

\# Kanten zw. a u. a_i

$d(b,H) = d(b,G)$ gerade $\forall b \in E(H) \setminus \{a_1, \dots, a_t\}$

Handschlag-lemma $\Rightarrow 2m(H) = \sum_{b \in E(H) \setminus \{a_1,\dots,a_t\}} d(b,G) + \sum_{i=1}^{t} (d(a_i,G) - m(a,a_i))$

$= 2m(G) - \sum_{i=1}^{t} m(a, a_i) = 2m(G) - m(a, E(H))$

$\Rightarrow m(a, E(H))$ gerade

$\Rightarrow m(a, E(H)) \geq 2$

$H_1, \dots, H_{\mathcal{K}}$ Komp $b-a$, $\mathcal{K} = K(b-a)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \underbrace{m(a, E(H_i))}_{\substack{\geq 2 \\ \text{für bel. Kante}}} = d(a,b) \geq \mathcal{K} \cdot 2$$

$\Rightarrow 2 \cdot K(b-a) \leq d(a,b)$

8)

c) $n=2$: $1,1$ s. r.

$n=3$: $1,1,2$ s. r.

$n \geq 4$: $1,1,2,3,\dots,n-1$

$1,2,3,\dots,n-2,n-2$

$2,3,\dots,n-3,n-3,n-2$ n s. r.

$\rightarrow$ 9e h) 8

$1,1,2,\dots,n-1$ realisierbar $\Leftrightarrow 1+\sum_{i=1}^{n-1} i$ gerade und

$1+\sum_{i=1}^{n-2} i \geq n-1$ (gilt für $n \geq 3$)

$$1+\sum_{i=1}^{n-1} i = 2b \Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 2b-1$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n = 2\underbrace{(2b-1)}_{\text{ungerade}} \equiv 2 \pmod 4$$

~~gerade~~ $2 \cdot$ ungerade $\equiv 2 \pmod 4$ gilt?

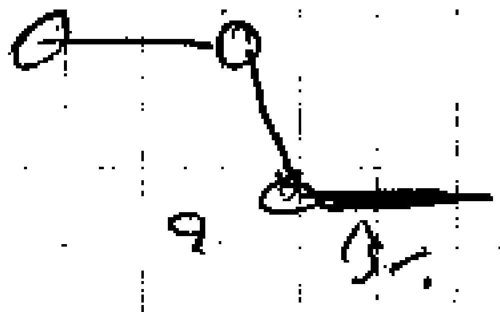
$n \equiv 1 \pmod 4$: $(n-1)n \equiv 0 \pmod 4$ $-$

$n \equiv 2$ " : $(n-1)n \equiv 2$ " $+$

$n \equiv 3$ " : $(n-1)n \equiv 2$ " $+$

$n \equiv 0$ " : $(n-1)n \equiv 0$ " $-$

A7)



G schlicht, zus.h. ; $\delta(G) \geq 2$

Beh.: G besitzt Brücke $\Rightarrow 2m(G) \leq (n-3)(n-4)+8$

Bew. $k = ab$ Brücke $\mathcal{K}(G-k) = \mathcal{K}(G)+1 = 2$

G_1, G_2 Komponenten

$a \in E(G_1), b \in E(G_2)$

$\Rightarrow d(a, G_1) = d(a, G) - 1 \geq \delta(G) - 1 \geq 1$

$\Rightarrow \exists a' \in N(a, G_1) \wedge d(a', G_1) \geq 2$

$\Rightarrow n(G_1) \geq 3$ analog $n(G_2) \geq 3$

OE sei $n_1 = n(G_1) \leq n(G_2) = n_2 = n - n_1$

$m(G) = m(G_1) + m(G_2) + \underbrace{1}_{\text{Brücke}} \leq \underbrace{\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}}_{\text{m vom vollst. Gr.}} + 1$

$= m(K_{n_1}) + m(K_{n_2}) + 1$ // gibt mehr Kanten

$\leq m(K_3) + m(K_{n-3}) + 1$

$= 3 + \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1$

$\Rightarrow 2m(G) \leq (n-3)(n-4)+8$

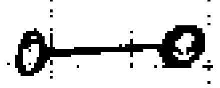
Diskr.-Diskussion 21.06.00

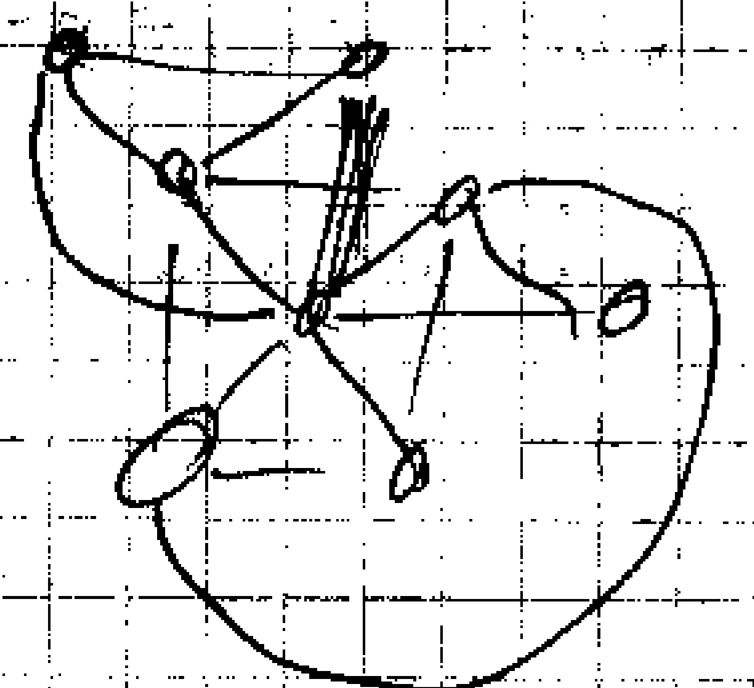
Ü4, A10b

Baum T, Ordnung $n(T)$ gerade

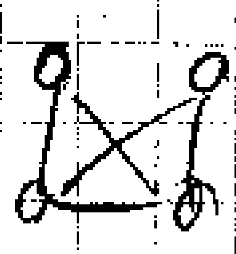
zeige: T^2 besitzt perfektes Matching

$n(T) = 2$





I.A. für bel. $t \in \mathbb{N}$ besitzt jeder Baum T mit $n(T) = 2t$ einen Potenzgraph T^2 mit perfektem Matching.

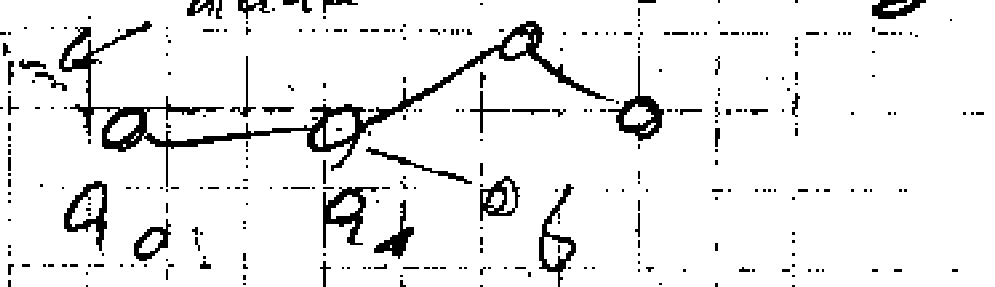


I.S.: Sei T Baum mit $n(T) = 2(t+1)$

Sei $W = a_0 a_1 \cdots a_l$ ein längster Weg $\Rightarrow$

$N(a_0) \subseteq E(W)$

$N(a_0) = \{a_1\}$



1. Fall: $\exists b \in N(a_1, T) \setminus E(W)$

$\Rightarrow d(b, T) = 1$ (?! "$\Rightarrow$" ...)

$d_T(a_0, b) = 2 \Rightarrow a_0 b \in K(T^2)$

$T' = T \setminus \{a_0, b\}$ ist Baum, $n(T') = 2t$

$\overset{\text{I.A.}}{\Rightarrow} (T')^2$ besitzt perf. Matching M', $M' \subseteq K(T')$

$\Rightarrow M' \cup \{a_0 b\}$ ist perf. M. von T^2.

2. Fall $N(a_1, T) = \{a_0, a_2\} \Rightarrow T' = T \setminus \{a_0, a_1\}$ ist Baum mit $n(T') = t$

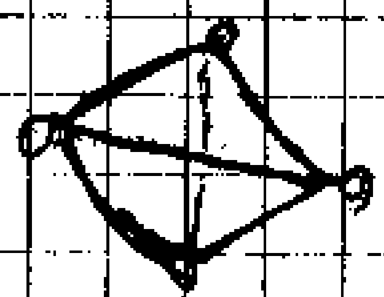
s.o.

$\rightarrow$ gilt sogar f. schlichten zus. Graphen gerader Ordnung...

Ü5 A1

$xy = k$ eine Kante von K_n. Für welche $n \geq 3$ ist $K_n - k$ semi-Eulersch?

F. 4.3: G s.-E. $\Leftrightarrow$ 0 oder 2 Ecken ung. Grades



$\forall z \in G \setminus \{x,y\}: d(z,G) = n-1$; $d(x,G) = d(y,G) = n-2$

n gerade: $n-2$ Ecken unger. Grades $\Rightarrow$ Beh. gilt f. $n = 4$

n ungerade: nur x,y ung. Gr. $\Rightarrow$ G ist semi-Eulersch

---

A3

$\mathbb{N} \ni q \geq 2$, G schl. $(2q+1)$-reg. Graph; $n(G) \leq 4q+1$

Zeige: G besitzt Eulerschen Faktor mit $\delta(G') \geq 2$

$n(G)$ ist gerade ($\to$ Handschlaglemma), $2\delta(G) = 2(2q+1) > n(G)$

$\Rightarrow$ (Satz 4.19) G Hamiltonsch

$\Rightarrow \exists$ H.-Kreis gerader Ordnung

$\Rightarrow \exists$ perf. Matching M

$G' = G - M$ ist schlichter $2q$-regulärer Faktor

entferne Kanten, nicht Ecken...

Ang. G' zerfällt in G_1', G_2' $\Rightarrow \delta(G_i') = 2q$

$\Rightarrow n(G_i') \geq 2q+1 \Rightarrow n(G) = n(G') \geq 4q+2 > 4q+1$ ↯

$\Rightarrow G'$ ~~zu~~ zusammenhängend

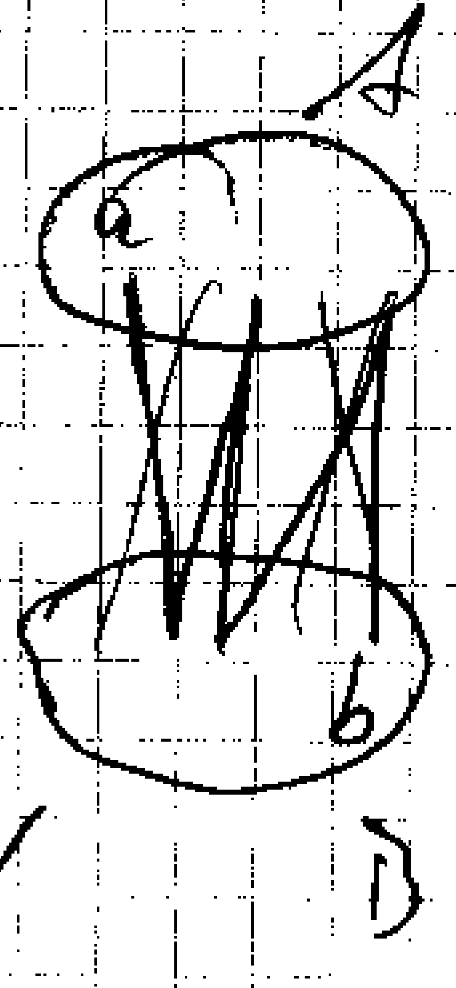
$n(G') = n(G) > \delta(G) \geq \ldots$

$\delta(G') = 2q > 2$, (Satz 4.10) $\Rightarrow G'$ Eulersch

A6 G schlicht, bipartit mit Bipart. A, B; $|A| = |B| = n$

$a \in A, b \in B$: $ab \notin K(G)$, $d(a,G) + d(b,G) \geq n+1$

$\Rightarrow$ G Hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + ab$ Hamiltonsch



Bew. Sei a, b wie oben: G Ham. $\Rightarrow G+ab$ Ham. ✓

Sei $G+ab$ Ham., C sei Ham.-Kreis: $ab \notin K(C)$ ✓

$ab \in K(C)$: $C - ab = x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ ist Hamilton-Weg in G von a nach b

$\Rightarrow A = \{x_{2i-1}\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, $B = \{x_{2i}\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$

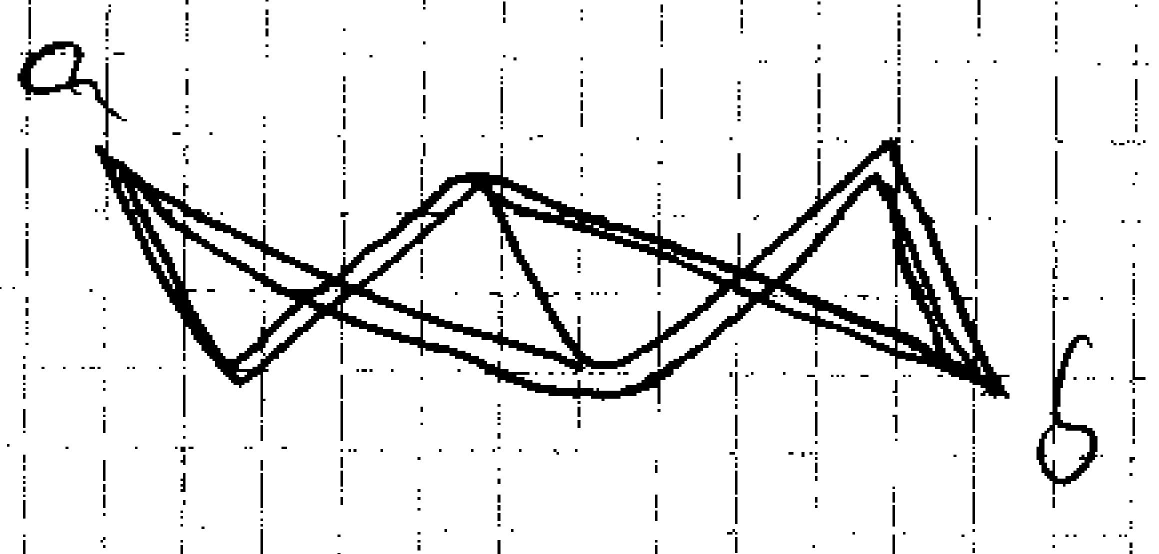
$X = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid a x_{2i} \in K(G)\}$, $Y = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid b x_{2i-1} \in K(G)\}$

$\Rightarrow |X| = d(a,G)$, $|Y| = d(b,G)$

$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| \geq d(a,G) + d(b,G) - n \geq 1$

$\Rightarrow \exists i \in X \cap Y: a x_{2i} \in K(G), b x_{2i-1} \in K(G)$; $a = x_1, b = x_{2n}$

$\Rightarrow$ $x_1 x_2 \ldots x_{2i-1} x_{2n} x_{2n-1} \ldots x_2 x_1$ ist H.-Kr.

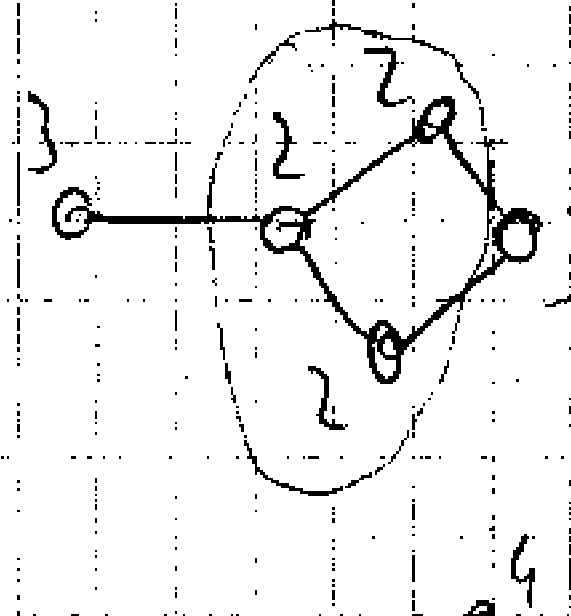


Tutor-Diskussion 24.05.00

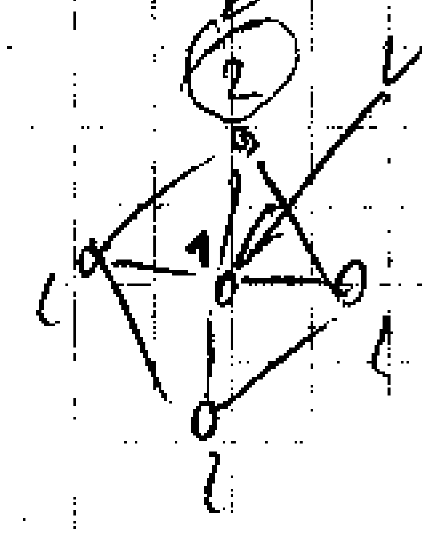
$dm(G) = \max_{x \in E(G)} e(x)$, $r(G) = \min_{x \in E(G)} e(x)$,

$e(x) = \max_{y \in E(G)} d(x, y)$

Exzentrizität



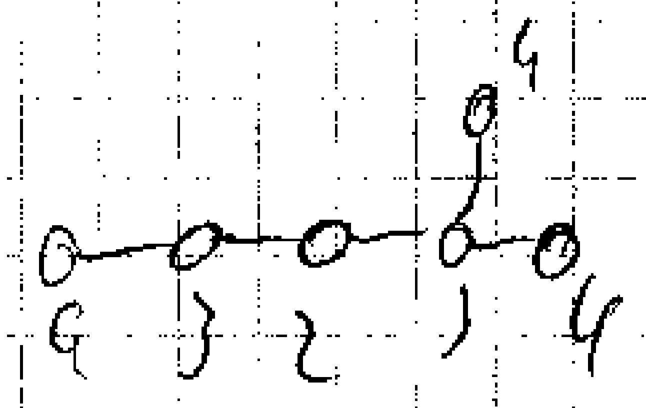
$r = 2$
$dm = 3$



von allen anderen Ecken nur 1 entfernt

$r = 1$

$dm = 2$ („Randecke" zu „Randecke")



$r = 2$
$dm = 4$

---

4 b) $\sum m(H) = \sum_{b \in E(H) \setminus \{a_1 \dots a_f\}} d(b, b) + \sum_{i=1}^{f} d(a_i, b) - m(a, a_i)$

$\boxed{?! \;..}$

$= \sum m(H) - \sum_{i=1}^{6} m(a, a_i) = \sum m(H) - m(a, E(H))$

Ü, A10. G schlicht, zus-hängend, $dm(G) = 3$

z. z. $dm(G) \le n(G) - 2\delta(G) + 1$

Studi → Seien $a, b \in E(G)$ mit $d(a,b) = dm(G)$

S sei kürzester Weg // $|S| = d(a, b) + 1$ //

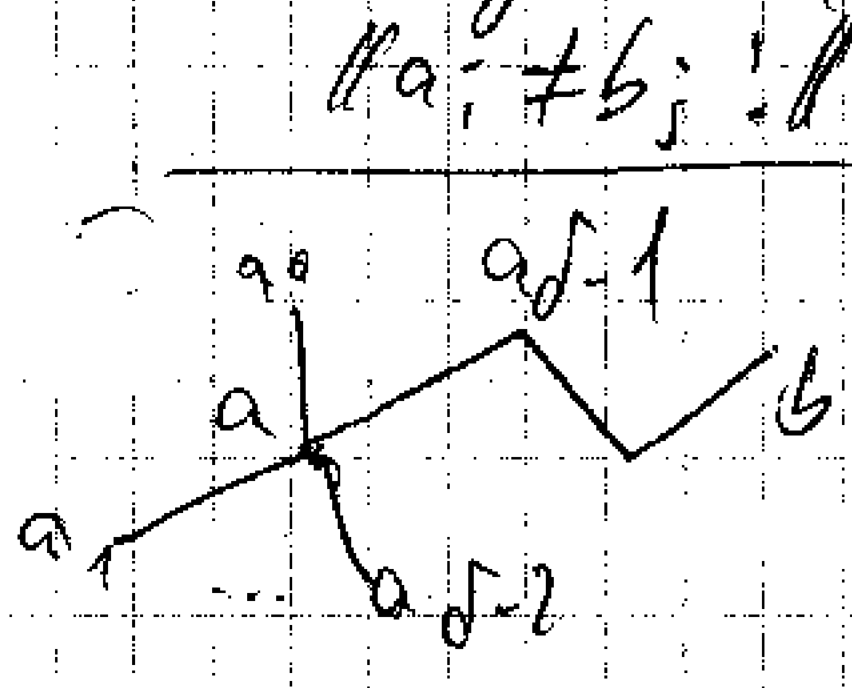
wegen $d(a) \ge \delta(G)$ $\exists\, a_0 a_1 \dots a_{\delta-1}$ mit $a_0 \dots a_{\delta-1} \in N(a) \setminus S$

" $d(b) \ge \delta(G)$ $\exists\, b_0 \dots b_{\delta-1}$ mit $b_0 \dots b_{\delta-1} \in N(b) \setminus S$

wegen $d(a, b) \ge 3 \Rightarrow$ $n \ge |S| + (|N(a)| - 1) + (|N(b)| - 1)$

// $a_i \ne b_j$! //

$\ge \underbrace{d(a,b)}_{dm(G)} + 2\delta - 1$



$\Rightarrow dm(G) \le n(G) - 2\delta + 1$

A6 G schlicht, $n(G)=n$, $q\in\mathbb{N}$, $2\leq q\leq n$ und $\delta(G)\geq\lfloor\frac{n}{q}\rfloor$

z.z. $\mathcal{K}(G)\leq q-1$

$\Rightarrow$ $r := n-\lfloor\frac{n}{q}\rfloor\cdot q \iff n=\lfloor\frac{n}{q}\rfloor\cdot q+r \quad r<q$

irgendeine Zahl

// quasi ist $r=n \bmod q$ //

H bel. Komp v. G

Ecken, die es mind. ggf. geben muss

$\Rightarrow \delta(H)\geq\delta(G) \wedge n(H)\geq\delta(H)+1\geq\underbrace{\lfloor\frac{n}{q}\rfloor}_{\delta(G)}+1$

$\Rightarrow n(G)\geq\mathcal{K}(G)\cdot(\lfloor\frac{n}{q}\rfloor+1)$

$\iff \lfloor\frac{n}{q}\rfloor q+r\geq\mathcal{K}(G)(\lfloor\frac{n}{q}\rfloor+1)$

$\iff \mathcal{K}(G)\leq\frac{\lfloor\frac{n}{q}\rfloor q+r}{\lfloor\frac{n}{q}\rfloor+1}\underset{\text{add. }0}{=}\frac{(\lfloor\frac{n}{q}\rfloor q+q)+(r-q)}{\lfloor\frac{n}{q}\rfloor+1}$

$=q+\underbrace{\frac{r-q \;\}<0}{\lfloor\frac{n}{q}\rfloor+1\;\}>0}}_{<0}<q$

$\Rightarrow \mathcal{K}(G)\leq q-1$

Klausur 4

1) Rest $\forall$ ung. $n \geq 3$ mit $2(n-2)! + \binom{n}{2} - 2 \equiv 0 \pmod n$

$\Rightarrow$ n ung $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod n$

$2(n-2)! - 2 \equiv 0 \pmod n$ und $2(n-1)! - 2(n-1)$
$\equiv 2((n-1)!+1)$
$\equiv 0 \pmod n$

$ggT(2,n) = 1$:

$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$ | Satz v. Wilson

$\Rightarrow$ n ist Primzahl

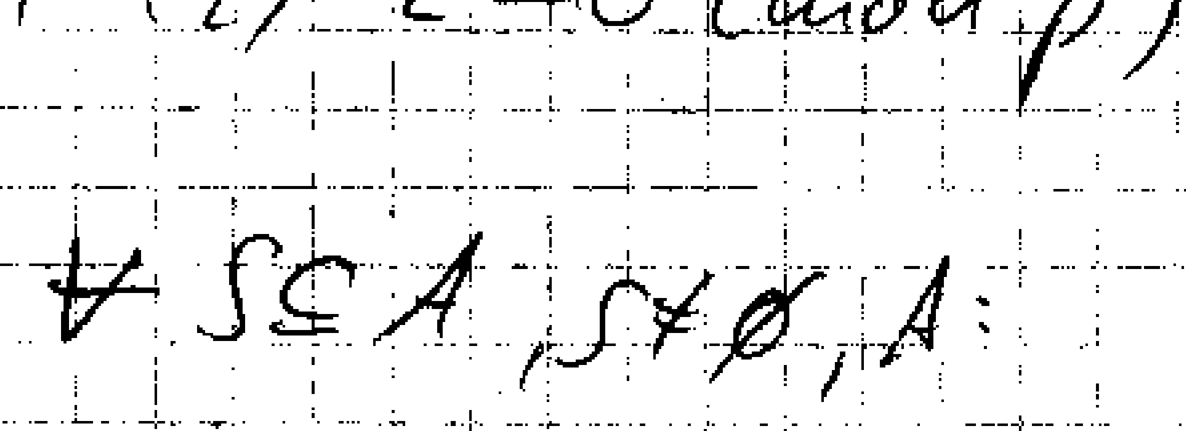
Sei $p \geq 3$ Primzahl: (Satz 2.16) $(p-2)! - 1 \equiv 0 \pmod p$
und $\binom{p}{2} \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow$ $2((p-2)! - 1) + \binom{p}{2} = 2(p-2)! + \binom{p}{2} - 2 \equiv 0 \pmod p$

4) G bip. (Bip A, B), $|A| = |B| \geq 2$, $\forall S \subseteq A, S \neq \emptyset, A$:
$|S| + 1 \leq |N(S,G)|$

Zeige: Jede Kante gehört zu perf. Matching

$k = ab$, $a \in A, b \in B$ bel.; $H = G - \{a,b\}$



H bip., $A' = A - \{a\}$, $B' = B - \{b\}$

Sei $X \subseteq A'$, $X \neq \emptyset$: $|X| + 1 \leq |N(X,G)|$
$\leq |N(X,H)| + 1$

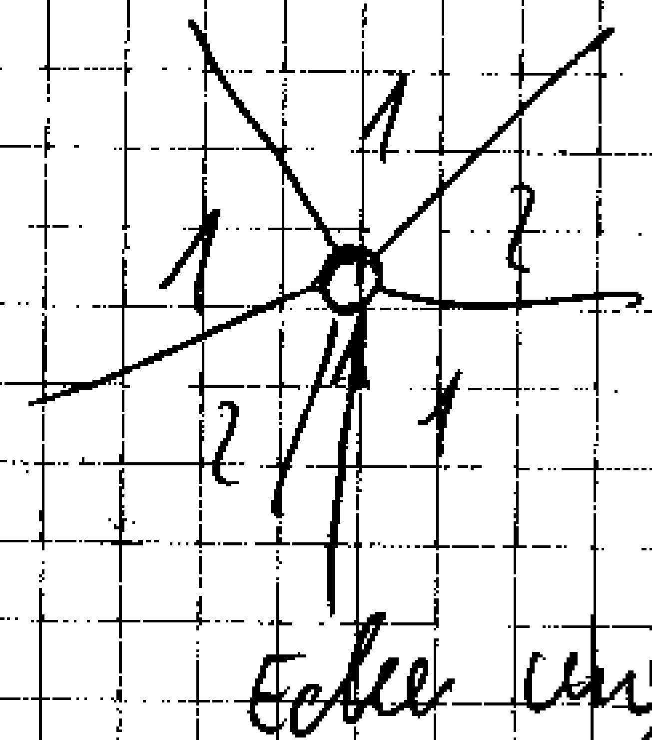
$\Rightarrow |X| \leq |N(X,H)|$

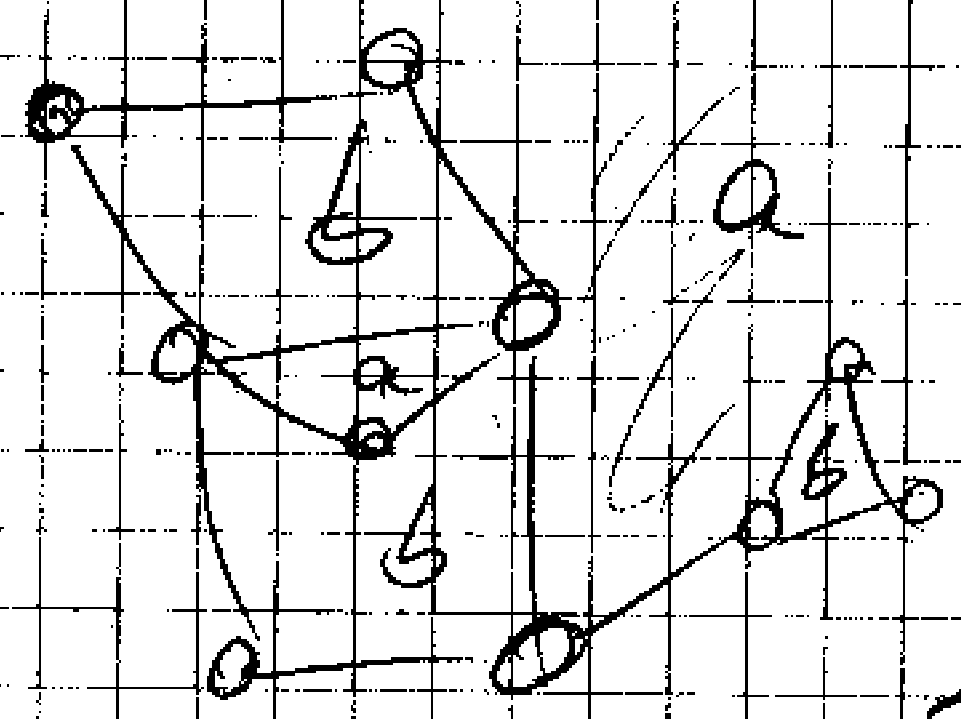
H bes. nach Satz 3.16 Matching M mit $|M| = |A'|$
$\Rightarrow$ $M \cup \{k\}$ ist perf. Matching von G

ÜS
A9)

G zusammenhängend, nicht-triviale Landkarte ohne Brücken
ZZ: G 2-färbbar $\Rightarrow$ G Eulersch

Intuitiver Beweis





Ecken ungeraden Grades
$\Rightarrow$ nicht 2-färbbar
$\rightarrow$ ↯
$\Rightarrow$ ∃ nur Ecken geraden Grades

Menge der Felder

Formaler Beweis

$h : \Lambda(G) \rightarrow \{1,2\}$ 2-Färbung v. G

Sei $a \in E(G)$: $d(a,G) = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$, keine Brücken!
$k_1, \dots, k_{2j+1}$ mit a inz. Kanten

OBdA angeordnet: F_i Land zwischen k_i und k_{i-1} ($1 \leq i \leq 2j+1$, $k_0 = k_{2j+1}$)

$\forall\ 1 \leq i < 2j+1$: $F_i \neq F_{i+1}$

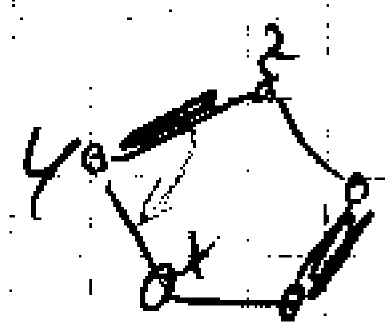
$\Rightarrow h(F_i) \neq h(F_{i+1})$

OBdA $h(F_1) = 1 \Rightarrow h(F_{2i}) = 2, h(F_{2i-1}) = 1 \Rightarrow h(F_{2j+1}) = 1 = h(F_1)$ ↯
$\Rightarrow d(a,G) = 2j$ $(j \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ G Eulersch

4. Ü   DiSto-Diskussion   31.05.00

-1-

1) G Graph, $x \in E(G)$, $d(x,G) \geq 1$



z.z.: $\exists$ max. Matching M : $x \in E(M)$

Sei M' max. Matching : $x \in E(M')$ ✓

größer M. als ein max. M.

$x \notin M'$: $\exists y \in N(x) : y \in E(M')$, denn sonst $M' \cup \{xy\}$

$\exists z : yz \in M'$ $M = M' \cup \{xy\} \setminus \{yz\}$ max. Matching mit x

$z \neq x$

6) T Turnier $n(T) \geq 4$

K_4

a) z.z.: $\exists$ max 3 Ecken x : $d^+(x,T) = 1$

Muloe: 4-Beweis: $\exists$ 4 Ecken mit Grad 1

-> von den Ecken induziertes Teilturnier betrachten

-> Σ der Grade ist da 4, müsste aber 6 sein => ↯

Ang.: $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 : d^+(x_i, T) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i, T') \leq \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i, T) = 4 < \binom{4}{2} = 6 \text{ ↯}$$

b) T wie in a), stark zusammenhängend

z.z. $\exists$ max. 2 Ecken x mit $d^+(x,T) = 1$

Ang.: $\exists x_1, x_2, x_3 : d^+(x_i, T) = 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} d^+(x_i, T) = 3 < \binom{3}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

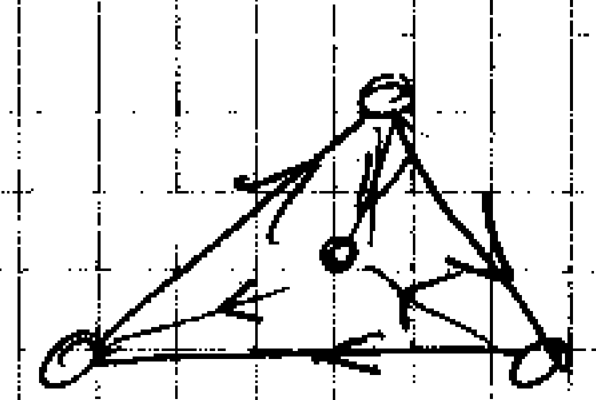
es muss eine nach außen gehende ~~Kante~~ Bogen geben (→ st. Zus.hang)

8) T_n $(n \geq 3)$ st. zusammenhängendes Turnier

z.z. T_n enthält mind. $n-2$ versch. 3-Kreise

Ind. nach n

$n = 3$: T_3 enth. 3-Kreis



I.A.: T_n enth. $n-2$ 3-Kreise

I.S.: nach Satz 3.29 $\exists$ n-Kreis C_n in T_{n+1} Moon

Sei T_n von $E(C_n)$ ind. st. zus.h.

$\overset{IA}{\Rightarrow}$ T_n enth. $n-2$ 3-Kreise

$x \in E(T_{n+1}) \setminus E(C_n)$ liegt auf 3-Kreis

$\Rightarrow \exists\, n-1$ 3-Kreise in T_{n+1}