RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE

INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Differentialgleichungen und Numerik für Informatiker, SS 2006

Prof. Dr. Henning Esser - Kolja Brix - Normann Pankratz

5. Übung

Matrikelnummer: 123456

Abgabezeitpunkt: Fr 07 Jul 2006 12:00:00 CEST

Dieses Blatt wurde erstellt: Fr 25 Aug 2006 17:52:59 CEST

1	Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf D. Dann besitzt das Anfangswertproblem für jeden Startwert $(x_0, y_0) \in D$ eine lokal eindeutige Lösung.	◯ ja / ◯ nein
	Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dann genügt f auf D einer Lipschitz-Bedingung, falls ein $L > 0$ existiert, so daß für beliebige $(x,y),(x,\tilde{y}) \in D$ gilt $\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\|_\infty \leq L\|y - \tilde{y}\|_\infty$.	◯ ja / ◯ nein
	Das verbesserte Euler-Verfahren hat die doppelte Konvergenzordnung des einfachen Euler-Verfahrens.	◯ ja / ◯ nein
	Das klassische Runge-Kutta-Verfahren hat die Konvergenzordnung 2.	◯ ja / ◯ nein
	Das implizite Euler-Verfahren hat die gleiche Konvergenzordnung wie das einfache Euler-Verfahren.	◯ ja / ◯ nein
	Gegeben seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine auf D stetige Funktion. Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ für $(x_0, y_0) \in D$ eine lokal eindeutige Lösung.	◯ ja / ◯ nein
	Beim impliziten Euler-Verfahren muß in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst werden.	◯ ja / ◯ nein
2	Formen Sie das Anfangswertproblem $$y^{(4)}(x) + \cos(y^{(3)}(x)) - \sinh(y''(x) - 3y'(x)) + \exp(\frac{1}{y(x)}) - 3 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 2, y''(0) = -5, y^{(3)}(0) = 8$$ in ein äquivalentes Anfangswertproblem erster Ordnung um! **3 Punkte**	
3	Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t) + F(t)$ mit $$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 13 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} (7-16t)e^{-2t} \\ (-2+8t)e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ **12 Punkte**	

4	Gegeben sei das Anfangswertproblem $$y' = \frac{1}{(x+1)\cos(y)} \quad \text{mit} \quad x \in \left(0, \frac{3}{4}\right) \quad \text{und} \quad y(0) = 0.$$ a) Approximieren Sie $y(\frac{1}{2})$ mit dem (i) (expliziten) Euler-Verfahren, Schrittweite $h = \frac{1}{8}$, (ii) verbesserten Euler-Verfahren, Schrittweite $h = \frac{1}{8}$, (iii) klassischen Runge-Kutta-Verfahren, Schrittweite $h = \frac{1}{4}$. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert $$y(\frac{1}{2}) = \arcsin\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx 0.4174875827.$$ b) Bestimmen Sie eine Näherung für $y(\frac{1}{2})$, indem Sie das impliziten Euler-Verfahren der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ anwenden. Welche Art von Problem müssen Sie lösen? Wie gehen sie vor? Beweisen Sie, daß ihr Verfahren gegen eine eindeutige Lösung konvergiert. **6+4=10 Punkte**

Informationen

Informationen und Aufgabenblätter finden Sie unter unter

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/lehre/DiffNum/2006ss`.

Bei Fragen:

Kolja Brix, Hauptgebäude Raum 144.1, Sprechzeit: Di, 9-10 Uhr
Normann Pankratz, Hauptgebäude Raum 105, Sprechzeit: Mi, 9-10 Uhr

Beide Assistenten erreichen Sie per Email unter `diffnum@igpm.rwth-aachen.de`.