RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Differentialgleichungen und Numerik für Informatiker, SS 2006

Prof. Dr. Henning Esser - Kolja Brix - Normann Pankratz

2. Übung

Matrikelnummer: 123456

Abgabezeitpunkt: Fr 19 Mai 2006 12:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Fr 25 Aug 2006 17:52:09 CEST

1	Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, so konvergiert das Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren) für das lineare Gleichungssystem $Mx = b$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$.	◯ ja / ◯ nein
	Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$ und die Norm $\\|\cdot\\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Ist die rechte Seite b durch Δb gestört, so gilt für den Fehler der Lösung die Abschätzung $\frac{\\|\Delta x\\|}{\\|x\\|} \leq \kappa(A) \frac{\\|\Delta b\\|}{\\|b\\|}$ mit $\kappa(A) = \\|A\\|\\|A^{-1}\\|$.	◯ ja / ◯ nein
	Die Spaltensummennorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als $\\|A\\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$.	◯ ja / ◯ nein
	Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre und symmetrische Matrix. Dann gilt $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_\infty(A)$.	◯ ja / ◯ nein
	Ist die Spektralnorm von $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kleiner als 1, so konvergiert das Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren) für das lineare Gleichungssystem $Mx = b$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$.	◯ ja / ◯ nein

2 Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{25}{36} \end{pmatrix}$$

sowie die Approximation $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, die durch Rundung der Einträge auf drei signifikante Stellen entsteht.

a) Schätzen Sie den relativen Fehler $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ ab, ohne die Gleichungssysteme zu lösen. Was fällt Ihnen auf?

b) Bestimmen Sie die exakten Lösungen von $Ax = b$ und von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

c) Berechnen Sie nun die wirklichen relativen Fehler und vergleichen Sie mit der Abschätzung aus Teilaufgabe a).

2+2+2=6 Punkte

3	Sei $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 25 \end{pmatrix}.$$ a) Bestimmen Sie in dreistelliger Gleitpunktarithmetik die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$. Geben Sie die Matrizen L und R explizit an. b) Lösen Sie in dreistelliger Gleitpunktarithmetik das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der LR-Zerlegung aus Teil a). c) Für den relativen Fehler der Matrix A gelte nun $r_A = \frac{\\|\Delta A\\|}{\\|A\\|} \leq 5 \cdot 10^{-4}$. Wie groß darf der relative Fehler $r_b = \frac{\\|\Delta b\\|}{\\|b\\|}$ der rechten Seite b höchstens werden, damit für den relativen Fehler der Lösung $r_x \leq 10^{-2}$ gilt? Wie groß darf r_A höchstens sein, damit die Fehlerabschätzung verwendet werden kann? Hinweis: Betrachten Sie das Problem in der Norm $\\|\cdot\\|_\infty$. Es gilt $\\|A^{-1}\\|_\infty = 1.133$. **4+1+3=8 Punkte**
4	Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$ soll mit Hilfe eines iterativen Verfahrens gelöst werden. a) Führen sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) zum Startwert $x_0 = (3,2,1)^T$ durch. b) Führen sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens (Gesamtschrittverfahren) zum Startwert $x_0 = (3,2,1)^T$ durch. c) Zeigen Sie, daß die Iterierte des Jacobi-Verfahrens für die angegeben Matrix A die Abschätzung $$\\|x^* - x^{(m)}\\|_\infty \leq \left(\frac{3}{4}\right)^m \\|x^* - x^{(0)}\\|_\infty$$ erfüllt, wobei $x^* = A^{-1}b$ ist. Hinweis: Berechnen Sie die Iterationsmatrix explizit. d) Wie viele Iterationen sind laut Abschätzung nötig, damit der absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{5}$ ausfällt? Wie viele Schritte sind tatsächlich nötig? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis! Hinweis: Die exakte Lösung von $Ax = b$ lautet $x = \left(\frac{128}{113}, \frac{346}{113}, -\frac{239}{226}\right)^T$. **2+3+3+3=11 Punkte**

Informationen

Informationen und Aufgabenblätter finden Sie unter unter

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/lehre/DiffNum/2006ss.`

Bei Fragen:

Kolja Brix, Hauptgebäude Raum 144.1, Sprechzeit: Di, 9-10 Uhr
Normann Pankratz, Hauptgebäude Raum 105, Sprechzeit: Mi, 9-10 Uhr

Beide Assistenten erreichen Sie per Email unter `diffnum@igpm.rwth-aachen.de`.

Termine:

Vorlesung: Mo, 14:00-15:30 Uhr, Fo 1, und Do, 13:00-14:30 Uhr, Fo 1, Beginn: 20.4.2006
Vorkurs: Erste drei Vorlesungstermine (am 06.04.2006, 10.04.2006 und 13.04.2006) und erste Großübung am 07.04.2006)
Großübung: Fr, 10:00-11:30 Uhr, Ro, Beginn: 21.4.2006
Kleingruppenübung: Je nach Übungsgruppe Mo, 17:30-19:00 Uhr, Di, 11:45-13:15 Uhr, 17:30-19:00 Uhr oder 18:00-19:30 Uhr, Beginn: 24.4.2006
Diskussion: Mo, 15:45-16:30 Uhr, Fo 7, Beginn: 20.4.2006
Repetitorium: Mo, 07.08.2006, 13:15-14:45 Uhr, Fo 2; Di, 08.08.2006, 10:15-11:45 Uhr, Fo 1; Mi, 09.08.2006, 11:15-12:45 Uhr, Fo 2; Do, 10.08.2006, 13:15-14:45 Uhr, Fo 1