RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Differentialgleichungen und Numerik für Informatiker, SS 2006

Prof. Dr. Henning Esser - Kolja Brix - Normann Pankratz

3. Übung

Matrikelnummer: 123456

Abgabezeitpunkt: Fr 02 Jun 2006 12:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Fr 25 Aug 2006 17:52:26 CEST

1	Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
	Seien D das Intervall $D=(0,1)\subset\mathbb{R}$, $f:D\to D$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L<1$ und $f(D)\subseteq D$. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt in D.	◯ ja / ◯ nein
	Seien $D\subset\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $F:D\to\mathbb{R}^n$. Gilt $F(D)\not\subseteq D$, so besitzt F keinen Fixpunkt in D.	◯ ja / ◯ nein
	Sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und die Jacobimatrix $F'(x)$ für jedes $x\in\mathbb{R}^n$ invertierbar. Dann konvergiert die Newton-Iteration für jeden Startwert $x_0\in\mathbb{R}^n$ gegen eine Nullstelle von F.	◯ ja / ◯ nein
	Sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann lautet die Newton-Iteration $$x^{k+1}=x^k+s^k, \qquad F'(x^k)s^k=-F(x^k) \quad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{N}_0.$$	◯ ja / ◯ nein
	Die Aufgabe bei der Polynominterpolation lautet: Bestimme zu $n\in\mathbb{N}$ gegebenen reellen Stützstellen $x_1<x_2<\cdots<x_n$ und Stützwerten $f_1,f_2,\ldots,f_n\in\mathbb{R}$ ein Polynom p vom Grade n mit $p(x_i)=f_i$ für $1\le i\le n$.	◯ ja / ◯ nein
	Seien $D\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $F:D\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0\in D$. Existiert ein $r>0$ mit $\lvert F'(x)\rvert>1$ für alle $x\in B_r(x_0)\subset D$, so ist x_0 kein Fixpunkt von F.	◯ ja / ◯ nein
	Für die k-te dividierte Differenz der Funktion f bezüglich der Knoten $x_1,\ldots,x_{k+1}\in\mathbb{R}$ gilt die Rekursionsformel $$f[x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}]=\frac{1}{x_{k+1}-x_1}\left(f[x_2,\ldots,x_k,x_{k+1}]-f[x_1,x_2,\ldots,x_k]\right).$$	◯ ja / ◯ nein

2 Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\longmapsto\frac{1}{2}\sqrt{\exp(x)}.$$

a) Zeigen Sie, daß f im Intervall $[0,1]$ genau einen Fixpunkt besitzt.

b) Führen Sie drei Fixpunktiterationen durch und veranschaulichen Sie das Ergebnis graphisch.

c) Wie viele Iterationen sind laut der a-priori-Fehlerabschätzung maximal nötig, um den Fixpunkt ausgehend von $x^0=\frac{1}{2}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-2} zu bestimmen?

d) Wie viele Iterationen sind in diesem Fall tatsächlich ausreichend? Berechnen Sie dies mit der a-posteriori-Fehlerabschätzung.

2+2+2+1=7 Punkte

3	Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem $$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 27xy^2 + 25, \\ 0 &= 4x^2 - 3y^3 - 1, \end{aligned}$$ indem Sie ausgehend von der Näherung $(x^0, y^0)^T = (1,1)^T$ die ersten zwei Iterierten a) mit dem Newton-Verfahren und b) mit dem vereinfachten Newton-Verfahren in Taschenrechnergenauigkeit bestimmen. Berechnen Sie dabei im ersten Schritt des Newton-Verfahrens eine *LR*-Zerlegung der Jacobimatrix und nutzen Sie diese in den weiteren Schritten des vereinfachten Newton-Verfahrens. **3+2=5 Punkte**
4	Die Funktion $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2\sin(3\pi x)$$ soll durch Polynome an den Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{12}$, $x_3 = \frac{1}{6}$ und $x_4 = \frac{1}{3}$ interpoliert werden. a) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f\|x_1, x_2, x_4)(x)$ an der Stelle $y_0 = \frac{1}{10}$ mit dem Aitken-Neville-Schema aus. b) Bestimmen Sie die Lagrange- und die Newton-Darstellung des Polynoms $P(f\|x_1, x_2, x_3)(x)$. c) Werten Sie die Newton-Darstellung des Polynoms $P(f\|x_1, x_2, x_3)(x)$ aus Teilaufgabe b) mit dem Horner-Schema an den Stellen $y_1 = \frac{1}{10}$ und $y_2 = \frac{1}{8}$ aus. d) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\|P(f\|x_1, x_2, x_3)(x) - f(x)\|$ im Intervall $[0, \frac{1}{6}]$ ab. **Hinweis:** Berechnen Sie zunächst die Extrema von $g(x) := (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. e) Ermitteln Sie das Interpolationspolynom $P(f\|x_1, x_2, x_3, x_4)(x)$. Welche Darstellung wählen Sie? **2+3+1+3+1=10 Punkte**

Informationen

Informationen und Aufgabenblätter finden Sie unter unter

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/lehre/DiffNum/2006ss`.

Bei Fragen:

Kolja Brix, Hauptgebäude Raum 144.1, Sprechzeit: Di, 9-10 Uhr
Normann Pankratz, Hauptgebäude Raum 105, Sprechzeit: Mi, 9-10 Uhr

Beide Assistenten erreichen Sie per Email unter `diffnum@igpm.rwth-aachen.de`.