Differentialgleichungen und Numerik HOW-TO

© Klaus Ridder

AWP – System (VDK WS 01, A4) (sei $x = t$)

gegeben: $y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A} \cdot y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix}2\cdot e^t\\ 1/t\cdot e^t\end{pmatrix}}_{F(t)}$ $\qquad y(1) = \begin{pmatrix}0\\ -e\end{pmatrix}$

1.) Eigenwerte berechnen: $\det(A-\lambda E) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \ldots$

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1,2} = 1}}$$

2.) Eigenvektoren berechnen: $(A-\lambda_i E)\cdot v_1 = 0$, also für λ Eigenwert einsetzen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \text{Eigenvektor } v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$ ← alles außer 0, da $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nicht sein darf (ist triviale Lösung)

Da wir nur einen Eigenwert haben, berechnen wir einen Hauptvektor 2. Stufe nach der Vorschrift $(A-\lambda_i\cdot E)\cdot v_2 = v_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \text{Hauptvektor 2. Stufe: } v_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$ ← egal, was hier steht.

3.) Fundamentalsystem: Menge aus + Wronski-Matrix:

"$e^{x\cdot \text{Eigenwert}}\cdot(\text{Eigenvektor})$", bei Hauptvektoren 2. Stufe:

zusätzlich: "$e^{x\cdot \text{Eigenwert}}\cdot\left[(\text{Hauptvektor 2. Stufe}) + \frac{t^1}{1!}\cdot(\text{Eigenvektor})\right]$", bei HV 3. Stufe:

zusätzlich: "$e^{x\cdot \text{Eigenwert}}\cdot\left[(\text{HV 3. Stufe}) + \frac{t^1}{1!}\cdot(\text{HV 2. Stufe}) + \frac{t^2}{2!}(\text{Eigenvektor})\right]$" ... usw.

$$FS: \left\{ e^{1\cdot t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ e^{1\cdot t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\right\} = W = \begin{pmatrix}e^t & t\cdot e^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$$

4.) Partikuläre Lösung: $y_p(t) = W(t)\cdot C(t) = W(t)\cdot \int_{t_0}^{t} W'(\tau)^{-1}\cdot F(\tau)\, d\tau$

C(x) berechnen:

$\Rightarrow W(\tau)\cdot c'(\tau) = F(\tau)$ $\Rightarrow$ c' berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}e^t & te^t & 2\cdot e^t\\ 0 & e^t & 1/t\cdot e^t\end{array}\right) \Rightarrow c' = \Big(\quad\Big)$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}1 & t & 2\\ 0 & 1 & 1/t\end{array}\right)}_{\det = 1} \Rightarrow c' = \begin{pmatrix}1\\ 1/t\end{pmatrix} \Rightarrow C(x) = \int_{t_0 \to 1}^{t} c'(x) = \left[\begin{pmatrix}t\\ \ln t\end{pmatrix}\right]_1^t = \begin{pmatrix}t-1\\ \ln t\end{pmatrix}$$

5.) Homogene Lösung: c berechnen: $W(t_0) \cdot c = y(t_0)$

$W(1) \cdot c = y(1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array}\right) \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{\det = 1} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_H = W(t) \cdot c$$

6.) Gesamtlösung: $y(t) = y_p + y_H = W(t) \cdot \left(c(t) + c\right)$

$$= \begin{pmatrix} e^t & t \cdot e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cancel{-1} \cancel{+1} \\ \ln t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot e^t (\ln t) \\ e^t (\ln t - 1) \end{pmatrix}$$

<u>Zusammenfassung Lösung AWP:</u>

1.) Eigenwerte

2.) " in A einsetzen 10 $\Rightarrow$ Eigenvektoren

3.) F.S. = Wronski-Matrix aus Eigenvektoren

4.) $C(x)$: $W_{(x)} c'_{(x)} = F_{(x)}$ $\Rightarrow c' \Rightarrow C$

5.) c : $W_{(x_0)} \cdot c = y(x_0)$ $\Rightarrow c$

6.) $y = W(t) \left(c(t) + c\right)$

Fehlerabschätzung

gegeben: - Funktion,
- Stützstellen (n)

gesucht: - maximaler Fehler an der Stelle x, wenn wir mit einem Polynom n-1-ten Grades interpolieren.

Formel:

$$\underbrace{(f-P)}_{\text{Fehler}} \leq \underbrace{(x-x_0)}_{\text{Stützstelle 1}}(x-x_1)\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x-x_{n-1})}_{\text{Stützstelle n}}\cdot \max\left(\frac{f^{(n)}}{n!}\right)$$

n-te Ableitung bei n Stützstellen

n Stützstellen

max: zwischen der kleinsten und größten Stützstelle

Beispiel 1: $\boxed{f(x)=x^3}$ mit Polynom 2. Grades interpolieren; maximaler Fehler bei Interpolation eines Wertes zwischen $x=-1$ und $x=1$?

(VDK 1.8.2000, A6)

gegebene Stützstellen: $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$f=x^3$
$f'=3x^2$
$f''=6x$
$f'''=$

$$(f-P) \leq \left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \max_{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}\left(\frac{f'''(x)}{3!}\right)$$

$$(f-P) \leq \underbrace{x}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left(x^2-\frac{3}{4}\right)}_{\leq\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{\frac{6}{3!}}_{1} \qquad \Big|\ |x|\leq 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(f-P)\leq\frac{1}{4}}}$$

Beispiel 2: $\boxed{f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)}$, Stützstellen $\{-3,-1,1\}$, Stelle $x=0$

$f'(x)=\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$f''(x)=-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$f'''(x)=-\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}_{\leq 1}$

$$|f-P|\leq (x+3)(x+1)(x-1)\cdot\max\frac{-\left(+\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} \qquad \Big|\ x=0 \text{ (gegeben)}$$

$$|f-P|\leq -3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\cdot(-1)$$

$$\underline{|f-P|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}$$

Bernoulli-DGL (VDK WS 01/02 - A3)

$$y' - y^3 + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

1.) $u = y^{1-\alpha}$: $u = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$ | nach y auflösen und y ableiten.

$y = u(x)^{-\frac{1}{2}}$ ACHTUNG: u ist Funktion, daher kommt ein u' dazu !!! (innere Ableitung)

$y' = -\frac{1}{2} \cdot u(x)^{-\frac{3}{2}} \cdot u'$

2.) y' und y ersetzen: $-\frac{1}{2} u(x)^{-\frac{3}{2}} \cdot u' - u(x)^{-\frac{3}{2}} + 5 \cdot u(x)^{-\frac{1}{2}} = 0$ | nach u' auflösen

3.) nach u' auflösen: $u' = \frac{+u(x)^{-\frac{3}{2}} - 5 \cdot u(x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2} u(x)^{-\frac{3}{2}}} = -2 + 10\,u(x)$

$u' = 10\,u(x) - 2 \Rightarrow \boxed{u(0) = u' - 10u = -2}$ inhom. Teil

4.) Diese lineare DGL wie gewohnt lösen: $u' - 10u = 0$ (homogener Teil)

a) charpoly $\to \lambda$: $\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 10$

b) Wronski: $W = (e^{10x})$, da $F.S. = \{e^{10x}\}$ (immer $e^{\text{Eigenwert}\cdot x}$)

c) $u_p = W(x) \cdot C(x) \Rightarrow W(x) \cdot c'(x) = F(x) \leftarrow$ Nullvektor mit rechter Seite als letzten Eintrag

$e^{10x} \cdot c'(x) = -2$ | nach c'(x) auflösen

$c'(x) = e^{-10x} \cdot (-2)$ | integrieren von x_0 bis x:

$C(x) = \int c'(x) = \left[\frac{1}{-10} e^{-10x}\right]_{x_0=0}^{x} \cdot (-2) =$

$= \frac{1}{5}\left[e^{-10x}\right]_{x_0=0}^{x} = \underline{\frac{1}{5} e^{-10x} - \frac{1}{5}} = C(x)$

d) $u_H = W(x) \cdot c_1 = c \cdot e^{10x}$ | $x_0 = 0,\ y_0 = 1 \Rightarrow u_0 = 1^{-2} = 1$

e) $u_p = W(x) \cdot C(x) = e^{10x} \cdot \left(\frac{1}{5} e^{-10x} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{10x}}$

f) $u_p + u_H = u = \underline{y^{-2} = c \cdot e^{10x} - \frac{1}{5} e^{10x} + \frac{1}{5}}$ | setze ein: (AW): $x_0 = 0,\ y_0 = 1$:

g) berechne c: $1 = c$

h) c einsetzen $\to$ Gesamtlösung:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5} e^{10t} + \frac{1}{5}}}$$

$I = \mathbb{R}$, weil Nenner immer $\neq 0$.

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Formel: $k_1 = f(x \quad , y \quad)$

$k_2 = f(x + \frac{1}{2}h , y + \frac{1}{2}h \cdot k_1)$

$k_3 = f(x + \frac{1}{2}h , y + \frac{1}{2}h \cdot k_2)$

$k_4 = f(x + h , y + h \cdot k_3)$

$\Rightarrow y_{k+1} = \frac{1}{6}h(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) + y_k$

Beispiel (Sk 18.7.2000, A4): $y'' + y = x^2$ $\quad y(0) = -2$ $\quad y'(0) = 0$ $\quad h = 2$

$\Rightarrow y'' = x^2 - y$

1.) Reduktion auf ein System 1. Ordnung:

$$\boxed{\begin{aligned} z(x) &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \\ z'(x) &= \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} := f(x,z) \end{aligned}}$$

$z(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x,y) = f\left(x, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} z_2 \\ x^2 - z_1 \end{pmatrix}}$

$k_1 = f\left(0, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 - -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$k_2 = f\left(0+1, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 + 1 \cdot 2 \\ (0+1)^2 - (-2 + 1 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$k_3 = f\left(0+1, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 + 1 \cdot 3 \\ (0+1)^2 - (-2 + 1 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_4 = f\left(0+2, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 1 \\ (0+2)^2 - (-2 + 2 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = \frac{1}{6}2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 10/3 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix}$

Lagrange-Interpolation

gegeben: Stützstellen, z.B.

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	-3	1	2	7

gesucht: Polynom, das durch diese Stützstellen geht.

Lösung:

die anderen Stützstellen

$$L(x) = \underbrace{(-3)}_{\text{Wert der aktuellen Stützstelle}} \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

aktuelle Stützstelle

$$+ (1) \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$+ (2) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}$$

$$+ (7) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

Erklärung:

Für jede Stützstelle erstellen wir einen Summanden in Bruch-Form:

- Zähler = Produkt aus ("x" − andere Stützstellen)
- Nenner = Produkt aus (aktuelle Stützstelle − andere Stützstellen)
- Vorfaktor = Funktionswert der aktuellen Stützstelle

Dies soll in der Klausur so stehen bleiben, und nicht weiter aufgelöst werden.

Newton-Interpolation

gegeben: Stützstellen, z.B.

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	-3	1	2	7

gesucht: Polynom, das durch diese Punkte geht.

Lösung:

0	-3
1	1
2	2
4	7

$$\frac{1 - -3}{1 - 0} = 4 \qquad \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1 \qquad \frac{7 - 2}{4 - 2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1 - 4}{2 \quad 0} = -\frac{3}{2} \qquad \frac{5/2 - 1}{4 \quad 1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - -\frac{3}{2}}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

~~$\Rightarrow P(x) = -3 + 4\cdot(x- \quad) + -\frac{3}{2}\cdot(x- \quad) + \frac{1}{2}\cdot(x- \quad)$~~

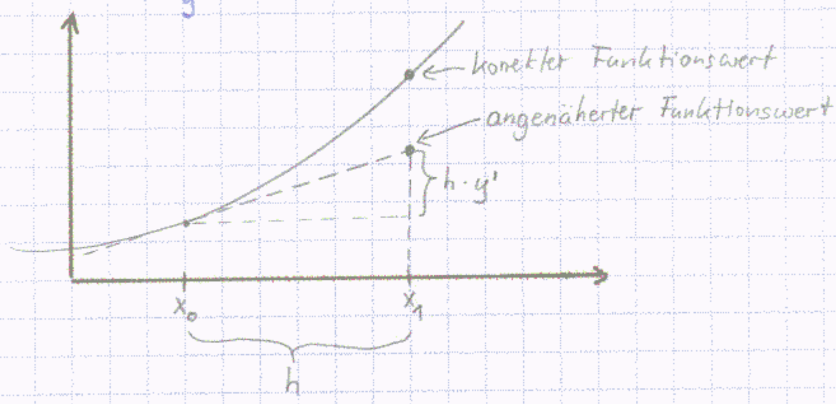
$$\begin{aligned}\Rightarrow P(x) = & -3 \\ & + 4\cdot(x-0) \\ & + -\frac{3}{2}\cdot(x-0)\cdot(x-1) \\ & + \frac{1}{2}\cdot(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\end{aligned}$$

Explizites Euler-Verfahren

gegeben: Anfangswertaufgabe, z.B. $y'(t) = y^2(t) - 5t$, $y(1) = 2$.
mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ soll eine Näherung für $y(2)$ berechnet werden.

Formel: $y_{k+1} = y_k + h \cdot \underbrace{f(t_k, y_k)}_{y'}$ bzw. $\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot y_k'}$

Anschauung:



Wir haben ja die Formel gegeben, um die Steigung in x_0 zu berechnen ($y'(t) = \dots$). Mit dieser nähern wir nun den Funktionswert in x_1 an. ($f(x_1) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$)

Beispiel: mit den gegebenen Werten:

$x_0 = 1$	$x_1 = \frac{3}{2}$	$x_2 = 2$
$y_0 = 2$	$y_1 = ?$	$y_2 = ?$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (y_0^2 - 5 \cdot x_0)$$
$$y_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 5 \cdot 1) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (y_1^2 - 5 \cdot x_1)$$
$$y_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad y_2 = -\frac{9}{8}$$

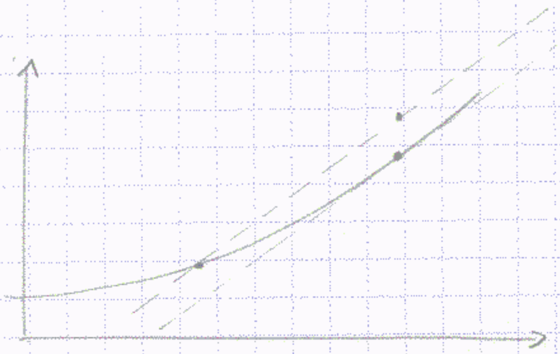
Implizites Euler - Verfahren

gegeben: Anfangswertaufgabe, z.B. $y'(t) = y^2(t) - 5t$ $\quad y(1) = 2$

ein Schritt mit $h = \frac{1}{8}$

Formel: $y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1}$

Anschauung:



Wir benutzen die Steigung in k+1, um von k aus den Funktionswert anzunähern.

Beispiel: $y' = y' - 5t$ $\qquad x_0 = 1, \quad y_0 = 2 \quad , x_1 = \frac{9}{8}$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{8} \cdot y_1' \qquad | \; y_1' = (y_1^2 - 5 \cdot x_1) \qquad$ | nach y_1 auflösen

$y_1 = y_0 + \frac{1}{8}(y_1^2 - 5 \cdot x_1)$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{8} y_1^2 - \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{8} \qquad | \; y_0 = 2$

$-\frac{1}{8} y_1^2 + y_1 = 2 - \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{8} \qquad | \cdot (-8)$

$y_1^2 - 8y_1 = -16 + \frac{45}{8}$

$y_1^2 - 8y_1 + \frac{83}{8} = 0 \qquad \Rightarrow y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{\frac{45}{8}}$ $\quad \Rightarrow$ minus näher an y_0

Anfangswertproblem - Berechnung mit Wronski

(Beispiel: Scheinklausur 18.07.2000, Aufgabe 2)

gegeben: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \underbrace{e^x \cdot \cos x}_{\text{„rechte Seite"}}$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

1.) Charakteristisches Polynom aufstellen: $y'' \to \lambda^2$, $y' \to \lambda^1$, $y \to \lambda^0$, rechte Seite $= 0$.

(Herleitung: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ $\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + \lambda) = 0 \quad | : e^{\lambda x}$)

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

2.) Fundamentalsystem: $\{e^{\underset{\lambda_1}{1}x}, \; t \cdot e^{\underset{\lambda_2}{1}x}\}$

immer nach der Form $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, \ldots\}$

Falls λ_1 2-fache Nullstelle ist: $\{e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \frac{x^2}{2!} \cdot e^{\lambda_1 x}, \frac{x^3}{3!} \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots\}$
3-
4-

3.) ~~Wronski-Matrix~~ Matrix:
- 1. Zeile: Fundamentalsystem
- 2. Zeile: Ableitung der 1. Zeile
- 3. Zeile: " " 2. Zeile

$\Big\}$ $n \times n$ - Matrix!

$$W = \begin{pmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix}$$

4.) Partikuläre Lösung: $y_p(x) = W(x) \cdot C(x) = W(x) \int_{x_0}^{x} \underbrace{W^{-1}(t) \cdot f(t)}_{c'(t)} \, dt$ $\Big\}$ hinschreiben!

$\Rightarrow$ berechne $W(x) \underbrace{c'(x)}_{\text{auszurechnen}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Nullvektor mit „rechter Seite" als letzten Eintrag}}$

$$\begin{pmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (1+x) \cdot e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \cdot \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow c' = \begin{pmatrix} -x \cdot \cos x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

5.) Integrieren: $C(x) = \int c'(x)$ mit Grenzen x_0 und x:

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} -x \cdot \cos x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos x + 1 \\ \sin x \end{pmatrix} = C(x)$$

6.) Spezielle Lösung: $y_s = W(x) \cdot C(X)$ (erste Zeile)

$$\begin{pmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cancel{x}\sin x - \cos x + 1 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^x \cos x \\ \text{irrelevant} \end{pmatrix}$$

7.) Homogene Lösung: $y_H = W(x) \cdot c_0$ $\qquad c_0 = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_0}$$ ← relevant: homogene Lösung

8.) Gesamtlösung = $\quad y = y_H + y_P$

$y = 0 + e^x - e^x \cos x \qquad \Rightarrow \qquad y = e^x - e^x \cos x$

TRAPEZREGEL (VDK 20.7.99 - A4)

Formel: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(y_k' + y_{k+1}'\right)$

Beispiel: $y''' = x^2 y'' - xy' + y - 1$ $\quad y(1) = 2,\; y'(1) = 1,\; y''(1) = 0 \quad h = 1$, 1 Schritt

Lösung:

① Reduktion auf System:

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow z'_{(x)} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x^2 y'' - xy' + y - 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad z(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; z'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z(2) = z(1) + \frac{h}{2} z'(1) + \frac{h}{2} z'(2) \quad \Big|$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ 4y'' - \cancel{x}2y' + y - 1 \end{pmatrix}$$

!!!

$$\begin{pmatrix} y - \frac{1}{2}y' \\ y' - \frac{1}{2}y'' \\ -\frac{1}{2}y + 1y' - y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \cdot\frac{1}{2} \;\oplus$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \quad \left(-\frac{4}{3}\right) \oplus$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ \Rightarrow x_2 = 1 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y(2) = 3 \\ y'(2) = 1 \\ y''(2) = 0 \end{array}$$

5.) - Gesamtschrittverfahren - LR-Zerlegung
- Einzelschrittverfahren - LR-Gleichungssystem

a) Gesamtschrittverfahren:

gegeben:

$$A = \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{matrix}\right) \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0_A \\ 0_B \\ 0_C \end{pmatrix}$$

erster Schritt

Eintrag 1

$$x_1^1 = \frac{1}{8}\left(-1 - 2 \cdot 0_B - 0 \cdot 0_C\right) = -\frac{1}{8}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot 0_A - 4 \cdot 0_C\right) = \frac{2}{8}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{-8}\left(1 - 1 \cdot 0_A - 4 \cdot 0_B\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ +2/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{8}\left(-1 - 2 \cdot +\frac{2}{8} - 0 \cdot -\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{16}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot -\frac{1}{8} - 4 \cdot -\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{32}$$

$$x_3^2 = \frac{1}{-8}\left(1 - 1 \cdot -\frac{1}{8} - 4 \cdot +\frac{2}{8}\right) = -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} -3/16 \\ 11/32 \\ -1/64 \end{pmatrix}$$

b) Einzelschrittverfahren:

- für x_2^1 aktualisieren wir im Vektor x^0 den ersten Wert mit dem gerade berechneten, usw.

$$x_1^1 = \frac{1}{8}\left(-1 - 2 \cdot 0_B - 0 \cdot 0_C\right) = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot -\frac{1}{8} - 4 \cdot 0_C\right) = \frac{9}{32} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 9/32 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{8}\left(1 - 1 \cdot -\frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{9}{32}\right) = 0 \quad \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 9/32 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{8}\left(-1 - 2 \cdot \frac{9}{32} - 0 \cdot 0\right) = -\frac{25}{128} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -25/128 \\ 9/32 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot -\frac{25}{128} - 4 \cdot \frac{9}{32}\right) = \frac{81}{512} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -25/128 \\ 81/512 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3^2 = \frac{1}{8}\left(1 - 1 \cdot \frac{25}{128} - 4 \cdot \frac{81}{512}\right) = \frac{9}{128} \quad \Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} -25/128 \\ 81/512 \\ 9/128 \end{pmatrix}$$

Beides konvergent, da Zeilensummenkriterium erfüllt (siehe e))

c) LR-Zerlegung ohne Pivotisierung

„schematischer Gauss" mit exakt den folgenden Schritten:

$$A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 4\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix} \quad \cdot\left(-\frac{2}{8}\right) \oplus \quad \cdot\left(-\frac{1}{8}\right) \oplus \qquad b=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Berechne: Wert in Aktueller Zeile minus Pivot-Wert · Wert in 1. Zeile:

$8 - 2\cdot\frac{2}{8} = 8-\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ ...

$$\begin{pmatrix}8 & 2 & 0\\ \frac{2}{8} & \frac{15}{2} & 4\\ \frac{2}{8} & \frac{15}{4} & -8\end{pmatrix} \quad \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \oplus$$

$$\begin{pmatrix}8 & 2 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{15}{2} & 4\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -10\end{pmatrix} R \quad \Rightarrow R=\begin{pmatrix}8 & 2 & 0\\ & \frac{15}{2} & 4\\ & & -10\end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix}1 & & \\ \frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

immer Einsen

d) Lösung des LGS $Ax=b$ mit der LR-Zerlegung:

$Ax=b \quad \Leftrightarrow \quad L\underbrace{Rx}_{y}=b \quad \Rightarrow \quad$ 1.) $Ly=b$ 2.) $Rx=y$

1. Schritt: $Ly=b$:

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ \frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_1=-1$

$\Rightarrow y_2 = 2-\frac{1}{4}\cdot(-1) = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow y_3 = 1-\frac{1}{8}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4} = 0$

$$y=\begin{pmatrix}-1\\ 9/4\\ 0\end{pmatrix}$$

2. Schritt: $Rx=y$:

$$\begin{pmatrix}8 & 2 & 0\\ & \frac{15}{2} & 4\\ & & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{9}{4}\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{8}\left(-1-2\cdot\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{5} = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{15} = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow x_3 = 0$

$$x=\begin{pmatrix}-1/5\\ 3/10\\ 0\end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung mit Pivotisierung:

$Ax=b$

$PAx=Pb \quad | PA=LR$

$LR\underbrace{x}_{y}=Pb$

e) Konvergenz des Gesamt-/Einzelschrittverfahrens

Das Gesamt- und das Einzelschrittverfahren ist konvergent, wenn das Zeilensummen- oder Spaltensummenkriterium erfüllt ist.

Überprüfung des Zeilensummenkriteriums:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \left|\frac{2}{8}\right| + \left|\frac{0}{8}\right| < 1 \quad \checkmark \\ \rightarrow \left|\frac{2}{8}\right| + \left|\frac{4}{8}\right| < 1 \quad \checkmark \\ \rightarrow \left|\frac{1}{-8}\right| + \left|\frac{4}{-8}\right| < 1 \quad \checkmark \end{array}$$

alle kleiner 1
→ Zeilensummenkriterium erfüllt.

$$\left|\frac{2}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| < 1 \quad \checkmark$$

$$\left|\frac{2}{8}\right| + \left|\frac{4}{8}\right| < 1 \quad \checkmark$$

$$\left|\frac{0}{-8}\right| + \left|\frac{4}{-8}\right| < 1 \quad \checkmark$$

alle kleiner 1
→ Spaltensummenkriterium erfüllt.

- Newton-Verfahren (VOK 1.8.2001)

geg.:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 - 3y^2 + 1 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 - 1 = 0 \end{pmatrix} \quad , \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.) schreibe „suche nach Nullstellen der Funktion".

2.) stelle Jacobi-Matrix immer nach folgendem Muster auf:

$$F' = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 & -6y \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Ableitung der 2. Funktion nach x

3.) Setze x_0 für x und y_0 für y sowohl in F als auch in F' ein.
Berechne dann mit Gauss $\underline{\underline{F' \cdot \delta = F}}$ (δ ist zu berechnen):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 6 & -12 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} +1/3 \\ +1/3 \end{pmatrix}$$

4.) Näherung ohne Dämpfung: $\underline{\underline{z_1 = z_0 - \delta}}$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Dämpfung: 5.) Teste, ob der neue Vektor $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, eingesetzt in die Ausgangsgleichung, kürzer als der alte Vektor $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: „euklidische Norm"

$$\left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\| < \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \Rightarrow \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9}} < \sqrt{1+1} \Rightarrow \sqrt{\tfrac{8}{18}} < \sqrt{2} \quad ✓$$

Wenn dies nicht erfüllt gewesen wäre, hätte man den δ-Vektor so lange halbieren müssen, bis es passt.

SVD-Zerlegung

$A = u \cdot \Sigma \cdot v^T$

orthogonalmatrix

↳ Orthogonalmatrix

↳ Diagonalmatrix

Systeme von Differentialgleichungen

Beispiel: $\underline{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underline{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{t} e^t \end{pmatrix}}_{F(t)}$, $\quad \underline{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}$

Berechnung von Eigen-/Hauptvektoren für A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Bestimmung des Eigenvektors v_1:

$$(A - 1 \cdot I) v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ - Anzahl der gleichen Nullstellen ~~= geomet~~ = algebraische Vielfachheit = 2

- Dimension des Eigenraums = geometrische Vielfachheit = 1

Berechnung eines Hauptvektors v_2 der Stufe 2:

$$(A - 1 \cdot I) \cdot v_2 = v_1 \quad \left(\Leftrightarrow (A - I)^2 v_2 = 0 \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptvektor 2. Stufe

⇒ Fundamentallösungen:

$$y_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_2(t) = e^{1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Wronski-Matrix:

$$W(t) = \left(y_1(t), y_2(t) \right) = \begin{pmatrix} e^t & t \cdot e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

⇒ homogene Lösungsgesamtheit:

$$y_H(t) = W(t) \cdot \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Bestimmung der partikulären Lösung y_p mit „Variation der Konstanten":

$$y_p(t) = W(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{(W(\tau))^{-1} \cdot F(\tau)}_{c'(\tau)} \, d\tau$$

die Herleitung dieser Formel ist wichtig für die Klausur!

$\Rightarrow$ Berechne $c'(\tau)$ durch Lösung von $W(\tau) \cdot c'(\tau) = F(\tau)$

$$\begin{pmatrix} e^\tau & \tau \cdot e^\tau \\ 0 & e^\tau \end{pmatrix} \cdot c'(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^\tau \\ e^\tau/\tau \end{pmatrix} \Rightarrow c'(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\tau \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{dann } \mathbf{c}(\tau) = \int_{t_0 (=1)}^{t} c'(\tau) \, d\tau = \int_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \tau \\ \log \tau \end{pmatrix}_1^t$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ \log t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_p(t) = W(t) \cdot c(t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $\quad y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

$$= W(t) \cdot c + W(t) \cdot c(t) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= W(t) \cdot (c + c(t))$$

$\Rightarrow$ Bestimme c als Lösung des Systems $W(t_0) \cdot c = y_0$

$$\begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array} \quad \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = W(t) \cdot (c + c(t)) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix} \right) = \ldots = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \cdot \log t \\ e^t \cdot (\log(t) - 1) \end{pmatrix}$$

2002 - Rep 3 - Seite 3

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (y \in \mathbb{R})$

Bestimmung eines FS (Fundamentalsystems)

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$
$= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

FS: $\{e^{3t}, e^{2t}\}$

Fundamentalsystem zum äquivalenten System: $\underline{y_1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \underline{y_2}$

Ableitung

Beispiel: $y'' + y = 0$

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad$ (da $i^2 = -1$)
$= (\lambda + i)$

(bei höherer Vielfachheit nochmals $\frac{t^k}{k!}$ vor den Eigenwert schreiben,
also z.B. $\{e^{3t}, t \cdot e^{3t}, \frac{t^2}{2!} \cdot e^{3t}, \frac{t^3}{3!} \cdot e^{3t}, \dots\}$)

komplexes FS: $\{e^{-it}, e^{it}\}$, reelles FS: $\{\cancel{e^{-it}}, \boxed{e^{it}}\}$

dazu: $e^{it} = \underbrace{\cos t}_{Re} + i \cdot \underbrace{\sin t}_{Im}$

$\Rightarrow$ reelles FS zu $\{e^{it}\} = \{\cos(t), \sin(t)\}$

<u>Beispiel:</u> $y'' - y = -2t \qquad y(0) = y'(0) = 0$

1.) Ansatz zur Berechnung eines FS:

char. Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$

$$\Rightarrow FS: \{e^{1\cdot t}, e^{-1\cdot t}\} \Rightarrow \omega(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} \leftarrow \text{Ableitung}$$

2.) Ansatz zur Berechnung eines FS:

$$\underset{\sim}{z} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y - 2t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underset{\sim}{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Berechnung von Eigen- / Hauptvektoren von A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Berechnung von Eigenvektoren: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow z_1(t) &= e^{-1\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ z_2(t) &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

Berechnung einer partikulären Lösung y_p über „Ansatz der rechten Seite"

2002- Rep 3- Seite 5

Berechnung einer partikulären Lösung durch „Ansatz der rechten Seite"

Nachdenken: $\Rightarrow y_p(t) = a\cdot t + b$

Setze y_p in DGL ein und bestimme somit a, b

$$y_p'(t) = a$$
$$y_p''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - y = -2t$$
$$0 - a\cdot t - b = -2t$$
$$-a\cdot t - b = -2t \quad \Rightarrow a = 2,\ b = 0$$

$$\Rightarrow y_p(t) = 2\cdot t + 0 = 2t$$

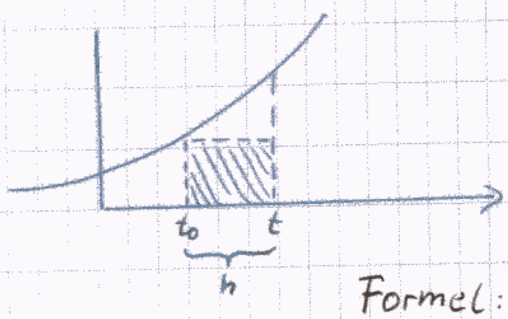
Runge-Kutta-Verfahren

- Euler-Verfahren (explizit, implizit)
- Trapezregel
- verbessertes Euler-Verfahren
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren

- explizites Euler-Verfahren:

Idee zur Herleitung: $y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t_0) = y_0$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau}_{\text{Idee: approximiere Integral durch Quadratur}}$$

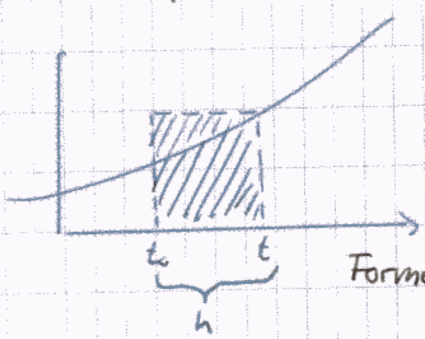


$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \approx h\cdot f(t_0, y(t_0))$$

Formel: $y^{k+1} = y^k + h\cdot f(t_k, y^k)$

- implizites Euler-Verfahren:

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \approx h\cdot f(t_1, y(t_1))$$



Formel: $y^{k+1} = y^k + h\cdot f(t_1, y^k)$

2002-Rep 3- Seite 6

<u>Beispiel:</u> $y'' - 2ty' + 2y = 0 \qquad y(1) = y'(1) = 1$

Bestimme Näherungswerte zu $y(2)$, $y'(2)$,
mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$

$\Rightarrow$ Transformation der DGL auf ein System 1. Ordnung

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 2ty'(t) - 2y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2t \end{pmatrix} \cdot \underline{z}(t)}_{f(t, z(t))}$$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$$\underline{z}^{k+1} = z^k + h \cdot f(t_k, z^k)$$

hier: $\underline{z}^1 = z^0 + 1 \cdot f(1, z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ +2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} \Rightarrow y(2) \approx 2$

Potenzreihen

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$	für	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots$	für	$\lvert x\rvert < 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots$	für	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots)$	für	$-1 \leq x < 1$
$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots$	für	$\lvert x\rvert \leq 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots$	für	$\lvert x\rvert < 1$

geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$= \frac{1}{1-x}$,	für $\lvert x\rvert < 1$
endliche geom. Reihe	$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$	$= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$,	für $x \neq 1$
harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$	konvergent $\iff$	$x > 1$
binomische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots = (1+x)^r$,		$\lvert x\rvert \leq 1,\ r > 0$ $\lvert x\rvert < 1,\ r < 0$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$	**wichtige Grenzwerte** $(n \to \infty)$	$\binom{a}{n} \to 0,\ a > -1$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$		
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$	$\sqrt[n]{a} \to 1$ | $(\frac{n+1}{n})^n \to e$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$
$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots = \frac{1}{e}$	$\sqrt[n]{n} \to 1$ | $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	$\frac{n^n}{n!} \to \infty$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$		
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$	$\sqrt[n]{n!} \to \infty$ | $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$	$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$		
$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$	$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$ | $(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$	$a^n n^k \to 0 \begin{cases} \lvert a\rvert < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$		

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

partielle Integration: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Vektorfunktionen

$(\lambda\vec{u})' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}'$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

$(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'$

$(\vec{u}(\lambda(t)))' = \vec{u}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$

Kettenregel: $(y(x(t)))' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$

Substitutionsregel: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$, dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert > 1$
$\int g\,dx$	g

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1)$ | $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$

$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert$

$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$

$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$

$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

$\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$\int x\ln x\,dx = x^2(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4})$

$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

$\int \sin ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$

$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln\lvert\tan ax\rvert$

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \left.\begin{array}{l} \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \end{array}\right\} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x + \sqrt{x^2-a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$