Name: Beispiellösung **Matrikelnr.:** ____________

Probeklausur 14.07.2014

Hinweise

- Dies ist eine Probeklausur. Sie hat den **halben Umfang** einer tatsächlichen Klausur und soll einen ersten Eindruck vermitteln, wie eine Klausur aussehen könnte.
- Der Inhalt der Probeklausur lässt jedoch **keine Rückschlüsse** auf den Inhalt der tatsächlichen Klausur zu. Ein hier abgefragtes Thema muss nicht unbedingt in der Klausur vorkommen. Umgekehrt kann in der Klausur ein Thema abgefragt werden, welches in dieser Probeklausur gefehlt hat.
- Diese Probeklausur wird **weder abgegeben noch korrigiert**. Sie dient allein der Selbstkontrolle. Die Lösung der Probeklausur wird in der Übung vorgestellt.
- In Ihrem eigenen Interesse sollten Sie die Probeklausur wie eine „echte" Klausur behandeln, d. h. während der Bearbeitung **keinen Kontakt** zu anderen Personen aufnehmen.
- Beachten Sie dabei auch, dass in der Klausur **keine Hilfsmittel** (wie Taschenrechner oder Vorlesungsunterlagen) außer Schreibwerkzeug und Lineal erlaubt sein werden. Legen Sie sämtliche Notizen weg, und schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus und räumen Sie sie in die Tasche.
- Beantworten Sie die Aufgaben in den dafür vorgesehenen Leerräumen. Verwenden Sie die Rückseite, wenn der Platz nicht ausreicht.
- Dokumentieren Sie **Rechenweg** und **Ergebnisse**. Alle Antworten sind kurz zu **begründen**!
- Die Bearbeitungszeit dieser Probeklausur beträgt **45 Minuten**.

Viel Erfolg!

Studiengang: ____________

Unterschrift: ____________

Aufgabe:	1	2	3	4	Gesamt
Punkte:	9	13	9	14	45
Erreicht:					

Die Klausur gilt ab **22.5** Punkten sicher als bestanden.

Klausurbonus aus Hausaufgaben erhalten: ☐

Gesamtnote: ☐

Name: ______________________ **Matrikelnr.:** ______________

Probeklausur 14.07.2014

Beginn der Aufgaben

Aufgabe 1

9 Punkte

Betrachten Sie das folgende Lineare Programm:

$$\begin{array}{llcll} \max & 5x_1 + 2x_2 & & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lösen Sie das lineare Programm mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Geben Sie dabei alle Tableaus an sowie eine optimale Basislösung und den optimalen Zielfunktionswert.

Standardform:

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Tableau:

I	5	2	0	0	0		I − 5 · III
II	1	1	1	0	4	4/1	II − III
III	1	−1	0	1	1	1/1	III

0	7	0	−5	−5	I − 7/2 · II
0	2	1	−1	3	1/2 · II
1	−1	0	1	1	III + 1/2 · II

0	0	−7/2	−3/2	−31/2
0	1	1/2	−1/2	3/2
1	0	1/2	1/2	5/2

reduzierte Kosten ≤ 0

$\Rightarrow$ Tableau ist optimal

Optimallösg.: $x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right)^T$

$c^T x^* = \frac{31}{2}$

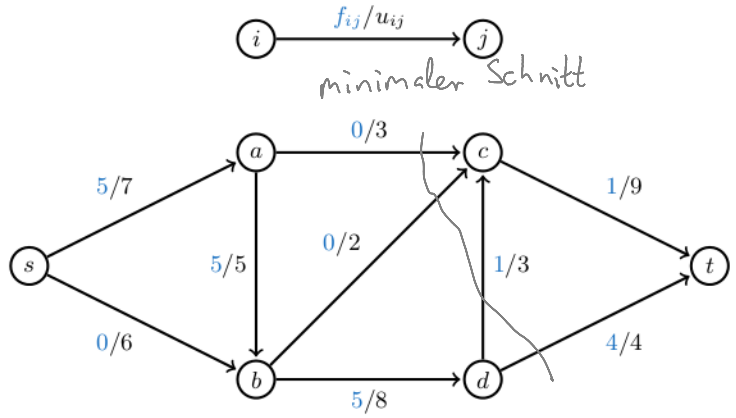
Operations Research | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Name: ______________________ **Matrikelnr.:** ________________

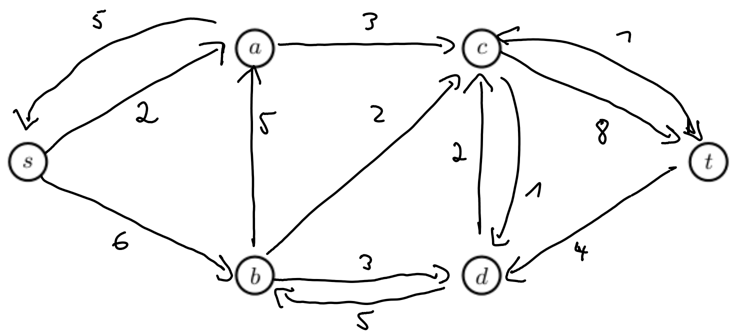
Probeklausur 14.07.2014

Aufgabe 2 13 Punkte

Gegeben sei das folgende Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t; die Kanten haben Kapazität u_{ij}, und es fließe bereits ein Fluss von f_{ij} über Kante (i, j):

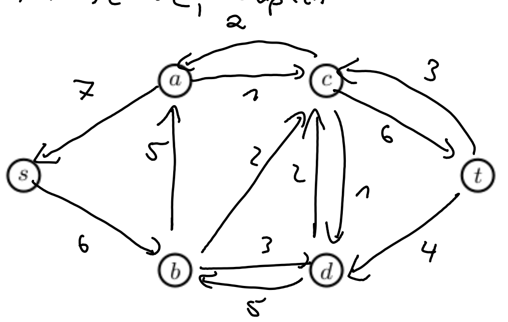


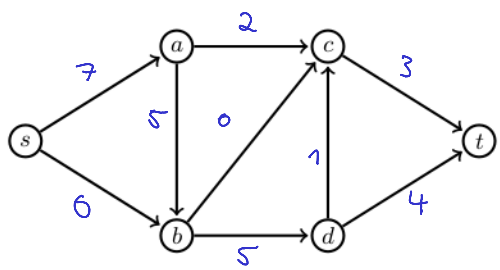
(a) Geben Sie den zu dem gegebenen Fluss gehörenden Residualgraphen an. (2)



(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ford-Fulkerson-Algorithmus einen maximalen Fluss von s nach t. Ergänzen Sie für jede Iteration den Residualgraphen links und geben Sie den aktuellen Fluss nach jeder Iteration im rechten Graphen an. Welchen Wert hat ein maximaler Fluss? (9)

s → a → c → t, Kapazität 2

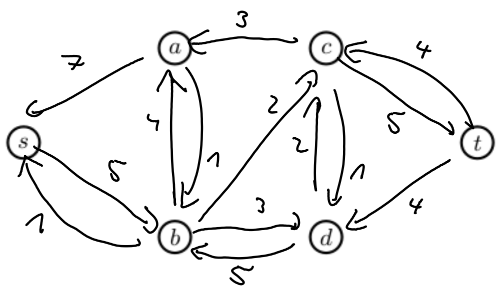


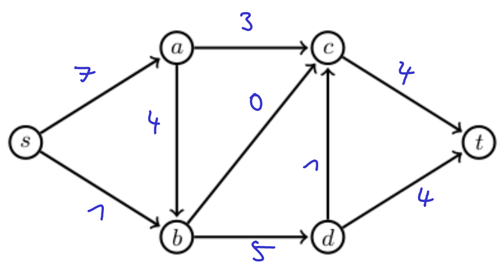


Name: ______________________ **Matrikelnr.:** ______________

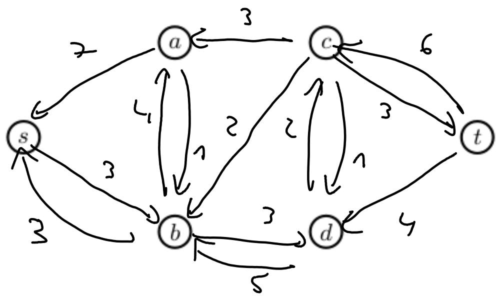
Probeklausur 14.07.2014

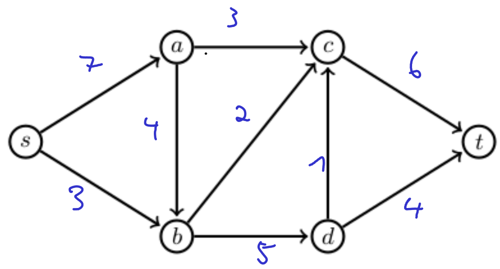
s → b → a → c → t, Kap. 1



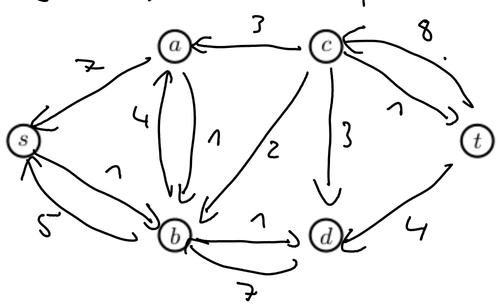


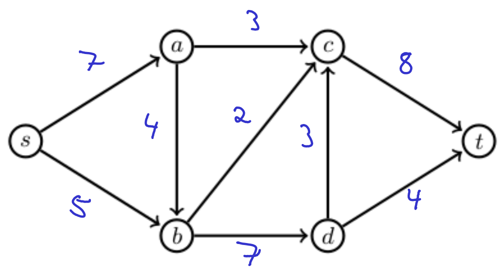
s → b → c → t, Kap. 2



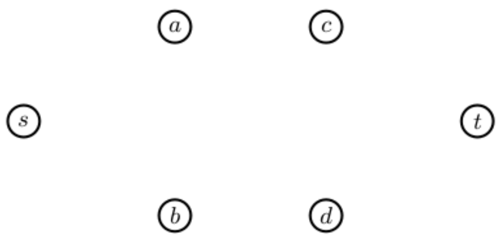


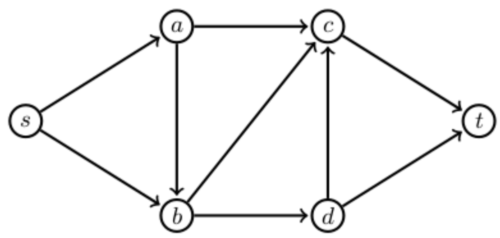
s → b → d → c → t, Kap. 2





Keine augmentierenden Pfade mehr ⇒ Fluss ist maximal, Wert 12





Name: ______________________ **Matrikelnr.:** ______________

Probeklausur 14.07.2014

(c) Bestimmen Sie – ausgehend von Ihrem Ergebnis aus (b) – einen minimalen s-t-Schnitt! (2)

Von s aus sind im letzten Residualgraphen
a, b und d noch erreichbar

$\Rightarrow S = \delta(\{s,a,b,d\}) = \{(a,c), (b,c), (d,c), (d,t)\}$

$(u(S) = 12)$

Name: ____________________ **Matrikelnr.:** ____________________

Probeklausur 14.07.2014

Aufgabe 3 9 Punkte

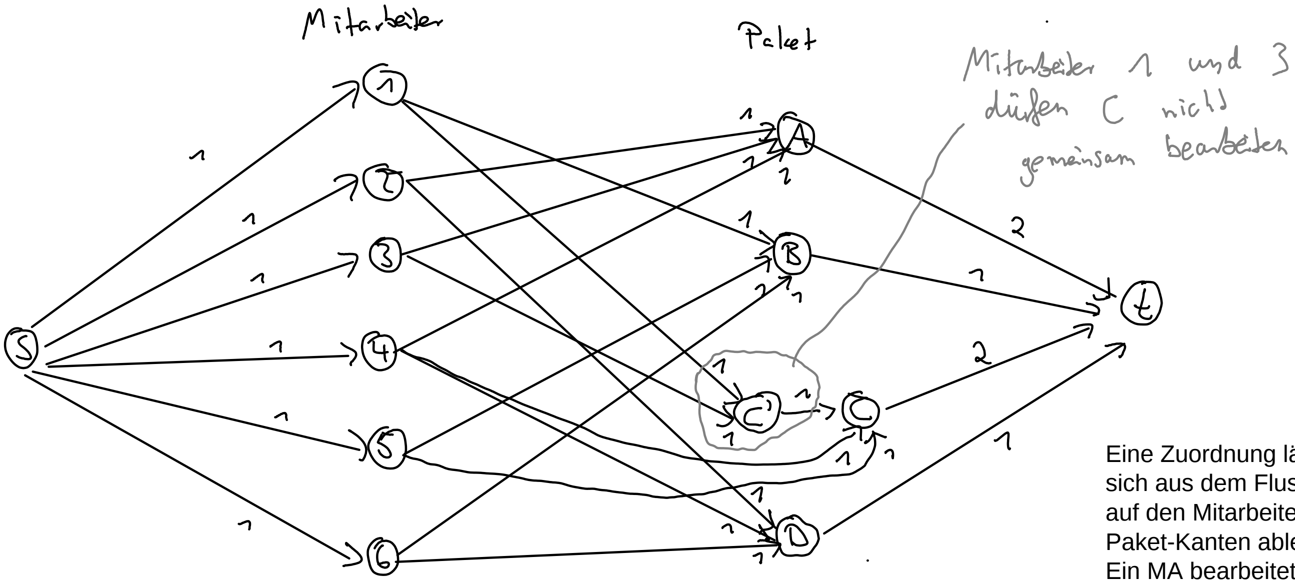
Eine Abteilung aus sechs Mitarbeitern soll ein Projekt, das aus den vier Arbeitspaketen A,B und C besteht, bearbeiten. Für die Arbeitspakete A und C sind zwei Mitarbeiter und für B und D jeweils ein Mitarbeiter notwendig. Jeder Mitarbeiter kann nur an einem Arbeitspaket mitwirken. Ob ein Mitarbeiter für ein bestimmtes Arbeitspaket geeignet ist, wird in der folgenden Tabelle dargestellt:

Mitarbeiter	A	B	C	D
1	nein	ja	ja	nein
2	ja	nein	nein	ja
3	ja	nein	ja	nein
4	ja	nein	ja	ja
5	nein	ja	ja	nein
6	nein	ja	nein	ja

Die Firmenleitung hat erfahren, dass die Mitarbeiter 1 und 3 sehr unproduktiv arbeiten, wenn sie gemeinsam ein Arbeitspaket bearbeiten, deswegen sollen die beiden nicht dem gleichen Arbeitspaket zugeordnet werden.

Die Leitung sucht nach einer Zuordnung der Mitarbeiter auf die Arbeitspakete, sodass die obigen Bedingungen eingehalten werden.

Modellieren Sie dieses Problem als Maximalflussproblem. Beschreiben Sie knapp, wie aus einer Lösung des Maximalflussproblems eine zulässige Zuordnung abgelesen werden kann.



Eine Zuordnung lässt sich aus dem Fluss auf den Mitarbeiter-zu-Paket-Kanten ablesen: Ein MA bearbeitet genau dann ein Paket, wenn entlang der entsprechenden Kante eine Einheit fließt.

Jeder Mitarbeiter bearbeitet höchstens ein Paket

Jeder MA kann bis zu einmal einem Paket zugeordnet werden

Anzahl MA, von denen die Pakete bearbeitet werden sollen

Name: ______________ **Matrikelnr.:** ______________

Probeklausur 14.07.2014

Aufgabe 4 14 Punkte

In einer mittelgroßen Stadt sollen neue Polizeistationen errichtet werden. Dazu stehen der Stadt m bebaubare Grundstücke $i = 1, \dots, m$ zur Verfügung. Die Stadt besteht außerdem aus n Stadtbezirken $j = 1, \dots, n$.

Da die Stadt knapp bei Kasse ist, kann es sinnvoll sein, nicht auf jedem Grundstück eine Polizeistation zu bauen. Die Stadtverwaltung steht daher vor der Entscheidung, auf welchen der Grundstücke sie eine Polizeistation errichtet und welche Polizeistation dann für welchen Stadtbezirk zuständig sein soll. Dabei fallen *Errichtungskosten* von f_i Euro an, falls auf Grundstück i eine Polizeistation gebaut wird; ist Station i dann für den Bezirk j zuständig, entstehen *Servicekosten* von c_{ij} Euro.

Für jeden Stadtbezirk soll genau eine Polizeistation zuständig sein. Die Gesamtkosten (zusammengesetzt aus Errichtungs- und Servicekosten) sollen nun minimiert werden.

(a) Modellieren Sie dieses Problem als linear ganzzahliges Programm! Erklären Sie dabei kurz (jeweils ein Satz) die Bedeutung Ihrer Variablen und Nebenbedingungen. (9)

y_i, $i = 1, \dots, m$ Station i wird gebaut

x_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ Station i ist für Bezirk j zuständig

$$\min \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

genau eine Polizeistation pro Bezirk

$$x_{ij} \le y_i \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n$$

nur gebaute Polizeistationen können zuständig sein

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad '' \qquad ''$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad ''$$

Name: ______________________ **Matrikelnr.:** ______________

Probeklausur 14.07.2014

(b) Es soll nun auch die geschätzte Fahrzeit von einer Polizeistation zu einem ihr zugeordneten Stadtbezirk berücksichtigt werden. Diese darf nicht mehr als T Minuten betragen. Die geschätzte Fahrzeit zwischen jedem Grundstück i und jedem Stadtbezirk j sei mit t_{ij} gegeben. (2)

Berücksichtigen Sie dies in Ihrem Modell aus Teil (a). Sie brauchen das Modell nicht vollständig zu wiederholen, sondern müssen nur die Änderungen angeben. Erklären Sie dabei kurz (jeweils ein Satz) Ihre Änderungen.

neue Nebenbedingung:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} t_{ij} \cdot x_{ij}}_{\text{Fahrzeit von der zugeordneten Polizeistation zum Bezirk}} \leq T \qquad j=1,\dots,n$$

(c) Um die Fahrzeit zwischen den Polizeistationen und Stadtbezirken zu verkürzen, besteht die Option, eine gebaute Polizeistation um einen Hubschrauberlandeplatz zu erweitern. Eine solche Erweiterung kostet g_i Euro für Station i, dabei verändert sich die geschätzte Fahrzeit zwischen Station i und Bezirk j von t_{ij} zu t'_{ij}. (3)

Modifizieren Sie Ihr linear ganzzahliges Programm ausgehend von Ihren Änderungen aus Teil (b) entsprechend. Es reicht wiederum, nur die Änderungen anzugeben. Erklären Sie dabei kurz (jeweils ein Satz) Ihre Änderungen.

Variable: z_i, $i=1,\dots,m$ Hubschrauberlandeplatz auf Station i

w_{ij}, $i=1,\dots,m$ $j=1,\dots,n$ Station i an Bezirk j per Hubschrauber anbinden

u_{ij}, $i=1,\dots,m$ $j=1,\dots,n$ Station i an Bez. j ohne Hubschrauber anbinden

Zielfunktion erhält zusätzlichen Term $\sum_{i=1}^{m} g_i z_i$

Fahrzeit ändert sich zu $\sum_{i=1}^{m} t_{ij} \cdot u_{ij} + \sum_{i=1}^{m} t'_{ij} \cdot w_{ij} \leq T \qquad j=1,\dots,n$

$u_{ij} + w_{ij} = x_{ij} \qquad i=1,\dots,m, \; j=1,\dots,n$ — im Falle einer Anbindung genau eine Variante (Hubschrauber oder herkömmlich) wählen, sonst keine

$w_{ij} \leq z_i \qquad$ " " — für die Anbindung per Hubschrauber ist ein Landeplatz notwendig

$z_i \leq y_i \qquad$ " — Hubschrauberlandeplätze nur auf gebauten Stationen errichten

Ende der Aufgaben