Quantitative Methoden (OR)

Einführung in Operations Reasearch (ET, Inf, Math)

Michael Bastubbe
bastubbe@or.rwth-aachen.de

SS2012 · 13. Übung
11.07.2012

Fragefolie

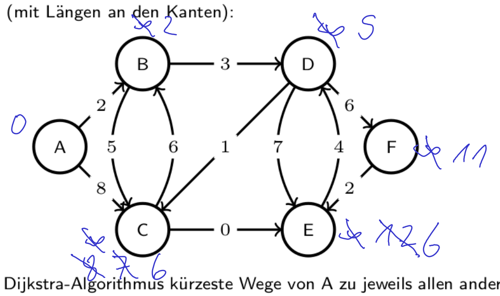
Stand der Dinge

Heute:

- Probeklausur

Aufgabe 1

Gegeben sei folgender Graph (mit Längen an den Kanten):



Liste für permanente Markierung:
A – B – D – C – E – F

Bestimmen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus kürzeste Wege von A zu jeweils allen anderen Knoten. Geben Sie ihren Rechenweg an, sowie die Lnge eines kürzesten Weges von A zu jedem anderen Knoten!

(Aktualisieren der Distanzmarken im Graphen möglich, dann aber Liste der permanent markierten Knoten führen oder eine Tabelle (siehe nächste Seite).

Die Länge eines kürzesten Weges vom Knoten A zu
B, C, D, E, F ist
2, 7, 5, 7 bzw. 11 Einheiten lang.

Aufgabe 1

Alternative zur Aktualisierung im Graphen:

Iteration	zu permanent markiert. Knoten	veränderte Distanzen
1	A	B → 2, C → 8
2	B	C → 7, D → 5
3	D	F → 11, C → 6, E → 12
4	C	E → 7
5	E	–
6	F	–

Aufgabe 2a

Betrachten Sie das folgende Lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{llcrcl} \max & 5x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösen Sie das LP mithilfe des Simplex Algorithmus! Geben Sie dabei alle Schritte (Tableaus) des Algorithmus an! Wie lauten die Werte der Variablen in einer optimalen Basislösung und der optimale Zielfunktionswert?

$B = (3,4)$

5	2	0	0	0
1	1	1	0	4
1	−1	0	1	1

$-1 \cdot$, $-5 \cdot$

$B = (3,1)$

0	7	0	−5	−5
0	2	1	−1	3
1	−1	0	1	1

Aufgabe 2a

0	7	0	−5	−5
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	−1	0	1	1

-7, $+1$

0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{31}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

$B = (2,1)$ ist optimal, da $\bar{c} \leq 0$. Also ist $x = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)^T$ eine optimale Basislösung mit Zielfunktionswert $\frac{31}{2} = 15{,}5$.

Aufgabe 2b

Es soll die nichtnegative Variable x_5 mit Koeffizienten 3 in der ersten und Koeffizienten 1 in der zweiten Restriktion hinzugefügt werden. Welche Werte kann der Zielfunktionskoeffizient von x_5 erhalten, sodass die in (a) gefundene Basis optimal bleibt.

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B^T A_B^{-1} A_5 = c_5 - (2 \quad 5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= c_5 - (2 \quad 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_5 - (2 + 10) = c_5 - 12 \leq 0 \Leftrightarrow c_5 \leq 12.$$

Ist der Zielfunktionskoeffizient nicht größer als 12, so bleibt die gefundene Basis optimal.

Aufgabe 2c

Die Variable x_5 wird mit dem Zielfunktionskoeffizienten 16 wie in (b) beschrieben hinzugefügt. Wie lauten nun die Werte aller Variablen in einer optimalen Basislösung und der optimale Zielfunktionswert?

Spalte im Tableau: $A_B^{-1} A_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\bar{c}_5 = c_5 - 12 = 16 - 12 = 4.$

Neues Tableau:

				↓		
0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4	$-\frac{31}{2}$	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	← (:2)

Aufgabe 2c

0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4	$-\frac{31}{2}$	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-4.$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$-1.$

-2	0	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{41}{2}$
$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$

$B = (2,5)$ mit $\bar{c} \le 0$, also ist B optimal, d.h. $x = (0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ ist optimal mit Zielfunktionswert $\frac{41}{2} = 20.5.$

Aufgabe 3

Geben Sie das duale Problem zu folgendem LP an:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 3x_2 & & & \le & 7 & (y_1) \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 & (y_2) \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \ge & -5 & (y_3) \\
 & x_1, & & x_2 & & & \ge & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
\min & 7y_1 + 6y_2 - 5y_3 & \\
\text{s.t.} & y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 1 & (x_1) \\
 & -3y_1 + y_2 - 2y_3 \ge 2 & (x_2) \\
 & 2y_2 - y_3 = -3 & (x_3)
\end{array}$$

$y_1 \ge 0$, y_2 frei, $y_3 \le 0$

Aufgabe 4a

Gegeben sind eine Menge von Knoten $V = \{1, \dots, n\}$ (die zu einem Digraphen gehören werden) und ein Wert b_i für jeden Knoten $i \in V$, sodass $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. Weiterhin gibt es Baukosten d_{ij} für das Errichten einer gerichteten Kante mit Kapazität u_{ij} zwischen den Knoten i und j. Wird eine Kante von i nach j errichtet, so hat sie Transportkosten c_{ij}.
Gesucht ist eine Auswahl der Kanten, die errichtet werden und ein zulässiger b-Fluss im entstandenen Digraphen, sodass die Gesamtkosten minimal sind.
Formulieren Sie dieses Problem als IP und erklären Sie die Bedeutung ihrer Variablen und Nebenbedingungen.

Variablen:
- $x_{ij} \ge 0$: Fluss über Kante von Knoten i nach Knoten j, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \ne j$
- $y_{ij} \in \{0,1\}$, $y_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ Kante von i nach j wird errichtet

Aufgabe 4a

IP: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_{ij} y_{ij}$

(1) s.t. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V$

(2) $x_{ij} \leq u_{ij} \cdot y_{ij} \quad i,j \in V,\ i \neq j$

$x_{ij} \geq 0 \quad i,j \in V,\ i \neq j$

$y_{ij} \in \{0,1\} \quad i,j \in V,\ i \neq j$

Aufgabe 4a

Bedeutung der Restriktion: (1) Differenz zwischen Ein- und Ausfluss entspricht Bedarf

(2) Fluss darf nur auf errichteten Kanten und (falls Kante errichtet) in Höhe der zugehörigen Kapazität fließen

Aufgabe 4b

Betrachten Sie folgende Modifikation des Problems: Für eine potentielle Kante von Knoten i nach j gibt es nun $a(i,j)$ mögliche Kanten mit jeweiligen Baukosten d_{ijk}, Kapazität u_{ijk} und Transportkosten c_{ijk}, $k = 1, \ldots, a(i,j)$, von denen höchstens eine ausgewählt werden kann.
Verändern Sie ihr IP so, dass es diese Modifikation berücksichtigt.

Veränderung der Variablen:

$y_{ijk} \in \{0,1\}$, $y_{ijk} = 1 \Leftrightarrow$ von den potentiellen Kanten von i nach j wird die k-te errichtet

$x_{ijk} \geq 0$, Fluss von Knoten i nach Knoten j über die k-te potentielle Kante

Nach einer Erklärung wurde nicht explizit gefragt, aber es kann beim Aufstellen des IPs helfen, die Bedeutung der Variablen explizit formuliert zu haben.

Aufgabe 4b

$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{k=1}^{a(i,j)} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{k=1}^{a(i,j)} d_{ijk} y_{ijk}$

s.t. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{k=1}^{a(i,j)} x_{ijk} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{k=1}^{a(i,j)} x_{jik} = b_i \quad \forall i \in V$

$\sum_{k=1}^{a(i,j)} y_{ijk} \leq 1 \quad \forall i,j \in V,\ i \neq j$

$x_{ijk} \leq u_{ijk} \cdot y_{ijk} \quad \forall i,j \in V,\ i \neq j,\ k \in \{1, \ldots, a(i,j)\}$

$y_{ijk} \in \{0,1\} \quad i,j \in V,\ i \neq j,\ k \in \{1, \ldots, a(i,j)\}$

$x_{ijk} \geq 0$