Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Das *spezielle Halteproblem* ist definiert durch

$$H_\epsilon \;=\; \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}\ .$$

Satz:

Das spezielle Halteproblem H_ϵ ist nicht rekursiv.

Beweis: Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM M_ϵ, die H_ϵ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_H, die das nicht rekursive Halteproblem entscheiden würde.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM M_H mit Unterprogramm M_ϵ arbeitet wie folgt

1) Falls die Eingabe nicht mit einer korrekten Gödelnummer beginnt, verwirft M_H die Eingabe.
2) Sonst, also auf Eingaben der Form $\langle M \rangle w$, berechnet M_H die Gödelnummer einer TM M_w^* mit den folgenden Eigenschaften.

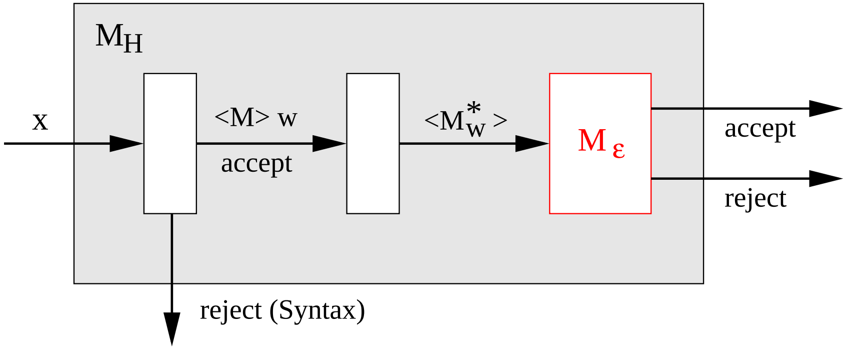
Eigenschaften von M_w^*

- Falls M_w^* die Eingabe ϵ erhält, so schreibt sie das Wort w aufs Band und simuliert die TM M auf der Eingabe w.
- Auf anderen Eingaben kann sich M_w^* beliebig verhalten.

3) Nachdem M_H die Gödelnummer $\langle M_w^* \rangle$ auf das Band geschrieben hat, startet sie M_ϵ auf dieser Eingabe, und akzeptiert genau dann, wenn M_ϵ akzeptiert.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Illustration: Aus M_ϵ konstruieren wir M_H.



Aber die Existenz von M_H steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von H. Damit kann es M_ϵ nicht geben, und das spezielle Halteproblem H_ϵ ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems – Beweis

Korrektheit: Sei $x = \langle M \rangle w$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } w \\ &\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert die Eingabe } \langle M_w^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } x \;. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } w \\ &\Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft die Eingabe } \langle M_w^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ verwirft } x \;. \end{aligned}$$

$\square$

Von TM berechnete Funktionen sind partielle Funktionen

Da TM nicht auf jeder Eingabe halten, berechnen sie „partielle Funktionen“. Das können wir wie folgt formalisieren:

- Die von einer TM M berechnete Funktion ist von der Form

$$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \cup \{\perp\} \ .$$

  Das Zeichen $\perp$ steht dabei für *undefiniert* und bedeutet, dass die Maschine nicht hält.

- Im Fall von Entscheidungsproblemen vereinfacht sich die Funktion zu

$$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1,\perp\} \ .$$

  Dabei steht 0 für *Verwerfen*, 1 für *Akzeptieren* und $\perp$ für *Nicht-Halten*.

Satz:

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der von TM berechenbaren partiellen Funktionen und S eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(S) = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht rekursiv.

In anderen Worten: Aussagen über die von einer TM berechneten Funktion sind nicht entscheidbar.

Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 1:

- Sei $S = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) \neq \perp\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(S) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\} \end{aligned}$$

- Diese Sprache ist auch als das *allgemeine Halteproblem* H_{all} bekannt.
- Gemäß Satz von Rice ist H_{all} nicht entscheidbar.

Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 2:

- Sei $L_{17}^{42} =$
  $\{\langle M\rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17}^{42} = L(S)$ für $S = \{f_M \mid f_M(bin(17)) = bin(42)\}$.
- Somit ist diese Sprache gemäß dem Satz von Rice nicht entscheidbar.

Beispiel 3:

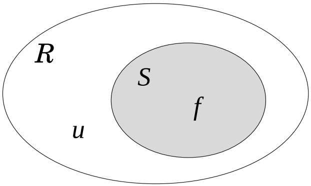
- Sei $H_{\leq 17} =$
  $\{\langle M\rangle \mid$ Auf jeder Eingabe stoppt M nach ≤ 17 Schritten$\}$.
- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!!!
- Ist $H_{\leq 17}$ entscheidbar?

Beweis:

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(S)}$, die $L(S)$ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_ϵ, die das spezielle Halteproblem H_ϵ entscheidet, und damit im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von H_ϵ steht.

Sei u die überall undefinierte Funktion, d.h. $u(x) = \perp$ für alle $x \in \{0,1\}^*$.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall nehmen wir an, dass gilt $u \notin S$.



Sei f eine Funktion aus S. Sei N eine TM, die f berechnet.

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM M_ϵ mit Unterprogramm $M_{L(S)}$ arbeitet wie folgt

1) Falls die Eingabe nicht aus einer korrekten Gödelnummer besteht, verwirft M_ϵ die Eingabe.
2) Sonst berechnet M_ϵ aus der Eingabe $\langle M \rangle$ die Gödelnummer einer TM M^* mit den folgendem Verhalten.

Verhalten von M^* auf Eingabe x

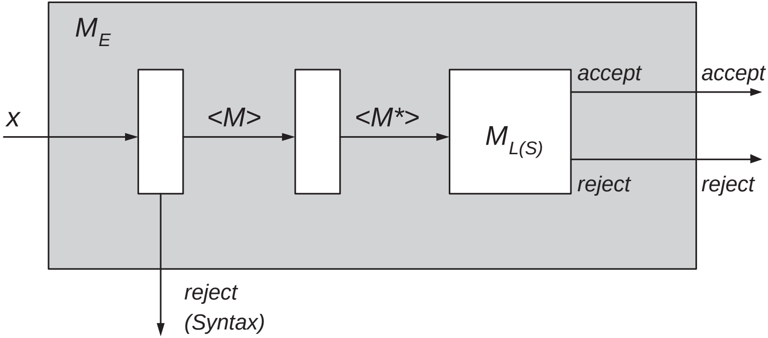
Schritt A: Simuliere das Verhalten von M bei Eingabe ϵ auf einer für diesen Zweck reservierten Spur.

Schritt B: Simuliere das Verhalten von N auf x, stoppe sobald N stoppt und übernehme die Ausgabe.

3) Starte $M_{L(S)}$ mit der Eingabe $\langle M^* \rangle$ und übernehme das Akzeptanzverhalten.

Satz von Rice – Illustration

Illustration: Aus $M_{L(S)}$ konstruieren wir M_ϵ.



Aber die Existenz von M_ϵ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von H_ϵ. Daraus folgt, dass $M_{L(S)}$ ebenfalls nicht existiert, und $L(S)$ somit nicht entscheidbar ist.

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

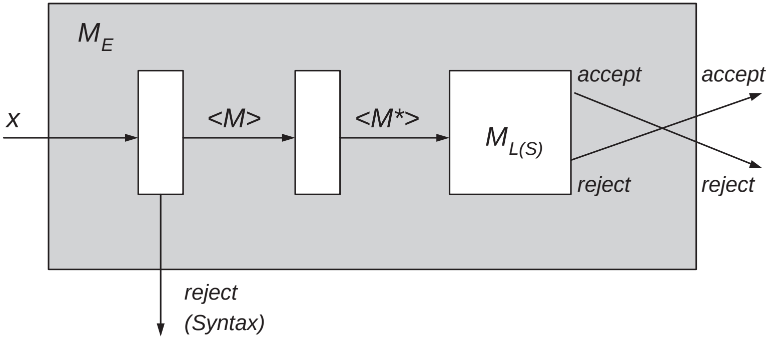
$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } f \\ &\Rightarrow \langle M^* \rangle \in L(S) \\ &\Rightarrow M_{L(S)} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_\epsilon \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \notin H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } u \\ &\Rightarrow \langle M^* \rangle \notin L(S) \\ &\Rightarrow M_{L(S)} \text{ verwirft } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_\epsilon \text{ verwirft } w \end{aligned}$$

$\square$

Im zweiten Fall gilt $u \in S$. Wie können wir jetzt vorgehen?

- Wähle f aus $\mathcal{R} \setminus S \neq \emptyset$.
- Konstruiere M_ϵ analog zu Fall 1 bis auf eine Änderung in Schritt 3: Das Akzeptanzverhalten der TM M_ϵ wird invertiert.



□