Gibt es nicht-rekursive Probleme?

Ja, es gibt nicht rekursive Probleme,

denn die Mächtigkeit der Menge aller Sprachen ist größer

als die Mächtigkeit der Menge aller TM.

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Def: abzählbare Menge

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Funktion $c : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Jede endliche Menge M ist offensichtlich abzählbar.

Im Fall einer abzählbar unendlichen Menge M gibt es immer auch eine bijektive Abbildung $c : \mathbb{N} \to M$, denn Wiederholungen können bei der Abzählung offensichtlich ausgelassen werden. Die Elemente einer abzählbaren Menge können also *nummeriert* werden.

Abzählbar unendliche Mengen haben also dieselbe Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Beispiele für abzählbar unendliche Mengen:

- die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:

$$c(i) = \begin{cases} i/2 & \text{falls } i \text{ gerade} \\ -(i+1)/2 & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

- die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (vgl. Übung)
- die Menge der Wörter über $\{0,1\}^*$:

$$\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, \ldots$$

- die Menge der TMn, weil jede TM durch eine eindeutige Gödelnummer beschrieben wird, und die Menge der Gödelnummern eine Teilmenge der Wörter über $\{0,1\}^*$ ist

Das *i-te Wort* gemäß der kanonischen Reihenfolge bezeichnen wir im Folgenden mit w_i und die *i-te TM* mit M_i.

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ist hingegen überabzählbar.

Satz:

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Beweis: (Diagonalisierung)

- Zum Zweck des Widerspruchs nehmen wir an, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ist.
- Mit S_i bezeichnen wir die i-te Menge aus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Wir definieren eine zwei-dimensionale unendliche Matrix $(A_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in S_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Illustration: die Matrix A könnte etwa folgendermaßen aussehen

	0	1	2	3	4	5	6	
S_0	**0**	1	1	0	1	0	1	$\cdots$
S_1	1	**1**	1	0	1	0	1	$\cdots$
S_2	0	0	**1**	0	1	0	1	$\cdots$
S_3	0	1	1	**0**	0	0	1	$\cdots$
S_4	0	1	0	0	**1**	0	1	$\cdots$
S_5	0	1	1	0	1	**0**	0	$\cdots$
S_6	1	1	1	0	1	0	**1**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Fortsetzung Beweis:

- Wir definieren die Menge $S_{diag} = \{i \in \mathbb{N} \mid A_{i,i} = 1\}$.
- Das Komplement dieser Menge ist

$$\bar{S}_{diag} = \mathbb{N} \setminus S_{diag} = \{i \in \mathbb{N} \mid A_{i,i} = 0\} .$$

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Fortsetzung Beweis:

- Auch $\bar{S}_{diag}$ ist ein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. In der Nummerierung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nehme $\bar{S}_{diag}$ den k-ten Platz ein, d.h. $\bar{S}_{diag} = S_k$.
- Jetzt gibt es zwei Fälle, die jeweils zum Widerspruch führen.
  - **Fall 1:**

$$A_{k,k} = 1 \overset{Def.\bar{S}_{diag}}{\Rightarrow} k \notin \bar{S}_{diag} = S_k \overset{Def.A}{\Rightarrow} A_{k,k} = 0$$

Widerspruch!

  - **Fall 2:**

$$A_{k,k} = 0 \overset{Def.\bar{S}_{diag}}{\Rightarrow} k \in \bar{S}_{diag} = S_k \overset{Def.A}{\Rightarrow} A_{k,k} = 1$$

Widerspruch!

□

Exkursion: abzählbare und überabzählbare Mengen

Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Sprachen über $\{0,1\}^*$, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$.

Die Menge $\{0,1\}^*$ hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge $\mathbb{N}$.

$\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$ hat somit dieselbe Mächtigkeit wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und ist deshalb überabzählbar.

Fazit:

- Die Menge aller TMn ist abzählbar.
- Die Menge aller Sprachen ist überabzählbar.
- Also gibt es Sprachen, die nicht rekursiv sind.

Das Halteproblem

Die reine Existenz unentscheidbarer Probleme ist noch nicht dramatisch, denn es könnte sich ja um uninteressante, nicht praxis-relevante Probleme handeln. Leider werden wir sehen, dass diese Hoffnung sich nicht bestätigt.

Beim *Halteproblem* geht es darum, zu entscheiden, ob ein Programm auf einer bestimmten Eingabe terminiert. In der Notation der TM ergibt sich die folgende formale Problemdefinition.

$$H \;=\; \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}\ .$$

Es wäre äußerst hilfreich, wenn Compiler das Halteproblem entscheiden könnten. Wir werden jedoch sehen, dass dieses elementare Problem nicht entscheidbar ist.

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Zum Beweis der Unentscheidbarkeit des Halteproblems machen wir einen Umweg über die sogenannte *Diagonalsprache*.

$$D = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} \} .$$

Anders gesagt, das i-te Wort bzgl. der kanonischen Reihenfolge, also w_i, ist genau dann in D, wenn die i-te TM, also M_i, dieses Wort nicht akzeptiert.

Satz:

Die Diagonalsprache D ist nicht rekursiv.

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache – Intutition

Warum trägt die Sprache den Namen *Diagonalsprache*? – Betrachte eine unendliche binäre Matrix A mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \text{ akzeptiert } w_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	
M_0	**0**	1	1	0	1	$\cdots$
M_1	1	**0**	1	0	1	$\cdots$
M_2	0	0	**1**	0	1	$\cdots$
M_3	0	1	1	**1**	0	$\cdots$
M_4	0	1	0	0	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Die Diagonalsprache läßt sich auf der Diagonale der Matrix ablesen. Es ist

$$D = \{w_i \mid A_{i,i} = 0\} .$$

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache – Beweis

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, D ist rekursiv. Dann gibt es eine TM M_j, die D entscheidet.

Wir wenden M_j auf w_j an. Es ergeben sich zwei Fälle, die jeweils direkt zum Widerspruch führen.

- **Fall 1:**

$$w_j \in D \overset{M_j \text{ entsch. } D}{\Longrightarrow} M_j \text{ akzeptiert } w_j \overset{\text{Def. von } D}{\Longrightarrow} w_j \notin D$$

Widerspruch!

- **Fall 2:**

$$w_j \notin D \overset{M_j \text{ entsch. } D}{\Longrightarrow} M_j \text{ akzeptiert } w_j \text{ nicht} \overset{\text{Def. von } D}{\Longrightarrow} w_j \in D$$

Widerspruch!

$\square$