Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik

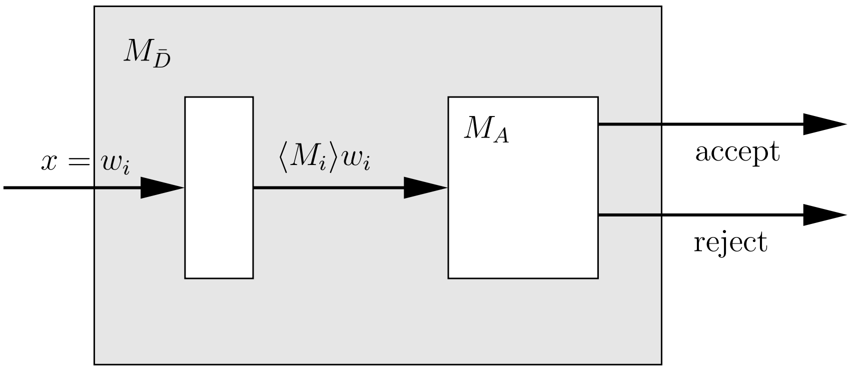
WS 2007/08
12.11.2007

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 5

Aufgabe 5.1: **(5 Punkte)**

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM M_A, die die Sprache A entscheidet.
- Gemäß der Definition *rekursiver Sprachen* hält M_A auf jeder Eingabe x und akzeptiert genau dann, wenn $x = \langle M \rangle w \in A$.
- Wir konstruieren nun eine TM $M_{\bar{D}}$ für das Komplement der Diagonalsprache, die M_A als Unterprogramm verwendet und $\bar{D}$ entscheidet: Zu einer Eingabe x berechnet $M_{\bar{D}}$ zunächst denjenigen Index i, so dass $x = w_i$. Dann berechnet $M_{\bar{D}}$ die Gödelnummer $\langle M_i \rangle$ der Maschine M_i und ruft die Maschine M_A mit der Eingabe $\langle M_i \rangle w_i$ auf. Anschließend übernimmt sie deren Entscheidung.
- Die TM $M_{\bar{D}}$ entscheidet nun offensichtlich $\bar{D}$. Ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $\bar{D}$.



Terminierung: $M_{\bar{D}}$ hält auf jeder Eingabe x, da auf Grund unsere Annahme, dass A rekursiv ist, M_A auf jeder Eingabe hält.

Partielle Korrektheit: Sei $x = w_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} w_i \in \bar{D} &\Rightarrow M_i \text{ akzeptiert } w_i \\ &\Rightarrow M_A \text{ akzeptiert } \langle M_i \rangle w_i \\ &\Rightarrow M_{\bar{D}} \text{ akzeptiert } w\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \notin \bar{D} &\Rightarrow M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \\ &\Rightarrow M_A \text{ verwirft } \langle M_i \rangle w_i \\ &\Rightarrow M_{\bar{D}} \text{ verwirft } w\ . \end{aligned}$$

Aber die Existenz von $M_{\bar{D}}$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $\bar{D}$. Damit kann es M_A nicht geben, und die Sprache A ist nicht entscheidbar.

Aufgabe 5.2: **(10)**

(a) Wir zeigen, dass aus der Entscheidbarkeit von OR_w für ein beliebiges w auch die Entscheidbarkeit des Akzeptierproblems A folgen würde. Sei M_{OR_w} eine solche TM, die OR_w entscheidet. Wir konstruieren eine TM M_A wie folgt. Sei $\langle M\rangle w'$ die Eingabe für M_A. Daraus konstruiert M_A zunächst die Gödelnummer einer TM M^*, die sich folgendermaßen verhält:

- M^* prüft, ob auf dem Eingabeband das Wort w steht. Falls das der Fall ist, löscht M^* die Eingabe, und schreibt w' auf das Eingabeband. (Ansonsten verhält sich M^* undefiniert .)
- Anschließend verhält sich M^* genau wie M.

Weiterhin sei $M^\dagger$ eine TM, die w nicht akzeptiert. M_A übergibt nun $\langle M^\dagger\rangle\langle M^*\rangle$ an M_{OR_w}.

Offensichtlich gilt $\langle M^\dagger\rangle\langle M^*\rangle \in OR_w$ genau dann, wenn M^* das Wort w akzeptiert (Terminierung beachten!). Das ist aber genau dann der Fall, wenn M da s Wort w' akzeptiert. Also löst das wie oben konstruierte M_A das Akzeptierproblem, was aber nicht sein kann.

(b) Falls M das Wort w akzeptiert, ist $OR_w^M = \{0,1\}^*$ offensichtlich entscheidbar. Falls M w nicht akzeptiert, ist OR_w^M nicht entscheidbar, da es dann genau das spezielle Akzeptierproblem $\bar{A}_w$ umfasst.

(c) XOR_w^M ist nicht entscheidbar. Falls M das Wort w akzeptiert, gilt $XOR_w^M = A_w$, ansonsten $XOR_w^M = \bar{A}_w$.

Aufgabe 5.3: **(10)**

(a) $H_{\leq 17}$ ist entscheidbar. Nach 17 Schritten kann M höchstens 17 Speicherzellen gelesen haben. Also können wir eine TM $M_{H_{\leq 17}}$ bauen, die $H_{\leq 17}$ entscheidet. $M_{H_{\leq 17}}$ simuliert M auf allen möglichen unterschiedlichen Eingaben der Länge höchstens 17 — davon gibt es nur konstant viele — und prüft, ob M jedes Mal hält.

(b) LIN-TAPE ist entscheidbar. Eine TM $M_{\text{LIN-TAPE}}$ kann M auf w simulieren, und dabei prüfen, ob die gewählte Grenze der Bandzellen eingehalten wird. Bei linear beschränktem Platzb edarf kann M nur endlich viele verschiedene Konfigurationen annehmen. $M_{\text{LIN-TAPE}}$ speichert, wenn eine bestimmte Konfiguration erreicht worden ist. Falls M auf w die Grenze überschreitet, ist $\langle M\rangle w \notin$ LIN-TAPE. Ansonsten hält M irgendwann, oder läuft unendlich zwischen den beiden Grenzen hin und zurück. Der erste Fall kann einfach bei der Simulation festgestellt werden. Im zweiten Fall, der Endlosschleife, wird eine Konfiguration mehrfach erreicht. Dies aber bemerkt $M_{\text{LIN-TAPE}}$, da alle bisher erreichten Konfigurat ionen gespeichert worden sind.

(c) POS-TAPE ist nicht entscheidbar. Jede TM M kann durch eine TM M' ersetzt werden, die ein einseitig beschränktes Arbeitsband benutzt (siehe Aufgabe 2.3). M' wiederum kann zu M'' erwe itert werden, das genau dann, wenn M' verwirft, nach links bis zur Bandposition -1 läuft. Also gilt $\langle M''\rangle w \in$ POS-TAPE genau dann, wenn $\langle M\rangle w \in \bar{A}$. Ein Algorithmus für POS-TAPE würde daher auch das Akzeptierproblem entscheiden.

Aufgabe 5.4: **(5)**

Angenommen, es existiert ein Aufzähler, der L in kanonischer Reihenfolge aufzählt. Mit Hilfe eines solchen Aufzählers, können wir entscheiden, ob ein gegebenes Wort w zur Sprache L gehört oder nicht. Dafür starten wir den Aufzähler und warten, bis entweder w ausgegeben wird oder ein Wort w', das in der kanonischen Reihenfolge nach w kommt. Wird w ausgegeben, akzeptieren wir w. Wird ein Wort w' ausgegeben, das nach w in der kanonischen Reihenfolge kommt, verwerfen wir w.