Das Halteproblem

Beim *Halteproblem* geht es darum, zu entscheiden, ob ein Programm auf einer bestimmten Eingabe terminiert. In der Notation der TM ergibt sich die folgende formale Problemdefinition.

$$H = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w\} \ .$$

Es wäre äußerst hilfreich, wenn Compiler das Halteproblem entscheiden könnten. Wir werden jedoch sehen, dass dieses elementare Problem nicht entscheidbar ist.

Wir betrachten dazu zunächst das Komplement der Diagonalsprache.

Unentscheidbarkeit des Komplements der Diagonalsprache

Das Komplement zur Diagonalsprache ist

$$\bar{D} \;=\; \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \}$$

Satz:

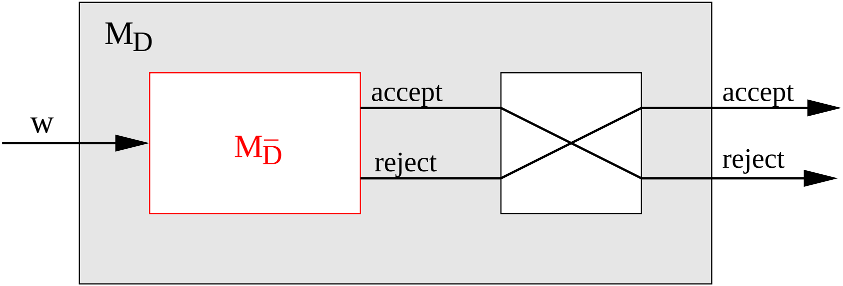
Das Komplement $\bar{D}$ der Diagonalsprache ist nicht rekursiv.

Beweis:

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM $M_{\bar{D}}$, die die Sprache $\bar{D}$ entscheidet.
- Gemäß der Def *rekursiver Sprachen* hält $M_{\bar{D}}$ auf jeder Eingabe w und akzeptiert genau dann, wenn $w \in \bar{D}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M, die $M_{\bar{D}}$ als Unterprogramm verwendet: M startet $M_{\bar{D}}$ auf der vorliegenden Eingabe und negiert anschließend die Ausgabe von $M_{\bar{D}}$.
- Die TM M entscheidet nun offensichtlich D. Ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von D. $\square$

Unentscheidbarkeit des Komplement der Diagonalsprache

Illustration: Aus $M_{\bar{D}}$ konstruieren wir M_D.



Aber die Existenz von M_D steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von D. Damit kann es $M_{\bar{D}}$ nicht geben, und $\bar{D}$ ist nicht entscheidbar.

Die Beweistechnik aus diesem Satz lässt sich allgemein wie folgt zusammenfassen:

Unterprogrammtechnik zum Nachweis von Unentscheidbarkeit

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L nicht rekursiv ist, genügt es zu zeigen, dass man durch Unterprogrammaufruf einer TM M_L, die L entscheidet, ein anderers Problem L' entscheiden kann, das bereits als nicht rekursiv bekannt ist.

Im Folgenden üben wir die Unterprogrammtechnik an einigen Beispielsprachen, die auch das Halteproblem umfassen.

Satz:

Das Halteproblem H ist nicht rekursiv.

Beweis:

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik:

- Sei M_H eine TM die H entscheidet, also eine TM, die auf jede Eingabe hält, und nur Eingaben der Form $\langle M \rangle w$ akzeptiert, bei denen M auf w hält.
- Wir konstruieren eine TM $M_{\bar{D}}$ mit M_H als Unterprogramm, die $\bar{D}$ entscheidet, was im Widerspruch zur Nicht-Berechenbarkeit von $\bar{D}$ steht.

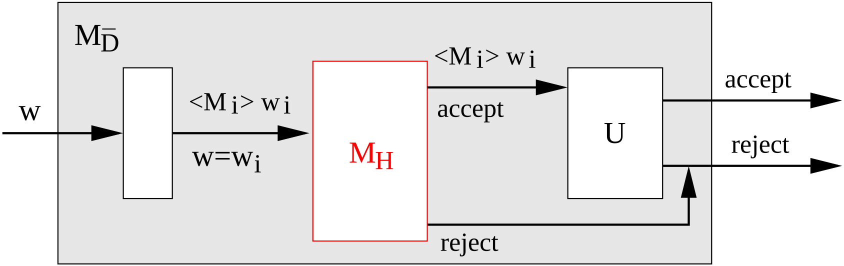
Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Unmöglichkeit der TM M_H.

Algorithmus der TM $M_{\bar{D}}$ mit Unterprogramm M_H:

1) Auf Eingabe w, berechne i, so dass gilt $w = w_i$.
2) Berechne nun die Gödelnummer der i-ten TM, also $\langle M_i \rangle$.
3) Jetzt starte M_H als Unterprogramm mit Eingabe $\langle M_i \rangle w$.
    3.1) Falls M_H akzeptiert, so simuliere das Verhalten von M_i auf w (genau wie die universelle TM U dies tun würde).
    3.2) Falls M_H verwirft, so verwirf die Eingabe.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Illustration: Aus M_H konstruieren wir $M_{\bar{D}}$.



Aber die Existenz von $M_{\bar{D}}$ steht im Widerspruch zur Unntscheidbarkeit von $\bar{D}$. Damit kann es M_H nicht geben, und das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems – Forts. Beweis

Korrektheit: Sei $w = w_i$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \in \bar{D} \quad &\Rightarrow \quad M_i \text{ akzeptiert } w_i \\
&\Rightarrow \quad M_H \text{ und } U \text{ akzeptieren } \langle M_i \rangle w_i \\
&\Rightarrow \quad M_{\bar{D}} \text{ akzeptiert } w \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{D} \quad &\Rightarrow \quad M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \\
&\Rightarrow \quad (\, M_i \text{ hält nicht auf } w_i \,) \text{ oder } (\, M_i \text{ verwirft } w_i \,) \\
&\Rightarrow \quad (\, M_H \text{ verwirft } \langle M_i \rangle w_i \,) \text{ oder } \\
&\qquad\quad (\, M_H \text{ akzeptiert und } U \text{ verwirft } \langle M_i \rangle w_i \,) \\
&\Rightarrow \quad M_{\bar{D}} \text{ verwirft } w \quad .
\end{aligned}
$$

$\square$