Berechenbarkeit und Komplexität: NP-Vollständigkeit von 3SAT

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität

24. Januar 2008

Definition von 3SAT

Problem (3SAT)

Eingabe: Aussagenlogische Formel ϕ in 3KNF
Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung für ϕ?

- 3SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir also nur noch die NP-Härte von 3SAT nachweisen.
- Dazu zeigen wir SAT $\leq_p$ 3SAT.

SAT $\leq_p$ 3SAT

Lemma

SAT $\leq_p$ 3SAT.

Beweis:

- Gegeben sei eine Formel ϕ in KNF.
- Wir transformieren ϕ in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel ϕ' in 3KNF, d.h.

$$\phi \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow \phi' \text{ ist erfüllbar } .$$

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Eine k-Klausel sei eine Klausel mit k Literalen.
- Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.
- Was machen wir mit k-Klauseln für $k > 3$?

- Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 \ .$$

- In einer *Klauseltransformation* ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C' = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee \ell_3 \vee \ell_4) \ ,$$

wobei h eine zusätzlich eingeführte Hilfvariable bezeichnet.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz:

ϕ' sei aus ϕ entstanden durch Ersetzen von C durch C'.

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ' erfüllbar

- Sei B eine erfüllende Belegung für ϕ.
- B weist mindestens einem Literal aus C hat den Wert 1 zu.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  1) Falls ℓ_1 oder ℓ_2 den Wert 1 haben, so ist ϕ' für $h = 0$ erfüllt.
  2) Falls ℓ_3 oder ℓ_4 den Wert 1 haben, so ist ϕ' für $h = 1$ erfüllt.

Also ist ϕ' in beiden Fällen erfüllbar.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz

zz: ϕ' erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ erfüllbar

- Sei B nun eine erfüllende Belegung für ϕ'.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - Falls B der Variable h den Wert 0 zuweist, so muss B einem der beiden Literale ℓ_1 oder ℓ_2 den Wert 1 zugewiesen haben.
  - Falls B der Variable h den Wert 1 zuweist, so muss B einem der beiden Literale ℓ_3 oder ℓ_4 den Wert 1 zugewiesen haben.

In beiden Fällen erfüllt B somit auch ϕ.

SAT $\leq_p$ 3SAT

Wir verallgemeinern die Klauseltransformation für $k \geq 4$:

- Jede Klausel der Form

  $$\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k$$

  wird durch eine Formel der Form

  $$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{k-2} \vee h) \wedge (\bar{h} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k)$$

  ersetzt.
- Die Erfüllbarkeitsäquivialenz folgt analog zum Fall $k = 4$.

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Eine Klausel der Länge $k > 3$ erzeugt somit eine Klausel der Länge $k - 1$ und eine Klausel der Länge 3.
- Dieses Prinzip wenden wir solange auf alle Klauseln der Länge größer 3 an (wobei jedesmal eine zusätzliche Hilfvariable erzeugt wird) bis nur noch Klauseln der Länge 3 übrig sind.

Beispiel für die Klauseltransformation:
Aus der 5 Klausel

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5$$

wird in einem ersten Transformationsschritt die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee h_1) \;\wedge\; (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \;,$$

also eine 4- und eine 3-Klausel. Auf die 4-Klausel wird die Transformation erneut angewandt. Wir erhalten die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee h_2) \;\wedge\; (\bar{h}_2 \vee x_3 \vee h_1) \;\wedge\; (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \;,$$

die nur noch 3 Klauseln erhält.

- Eine Klausel der Länge $k > 3$ erzeugt somit eine Klausel der Länge $k - 1$ und eine Klausel der Länge 3.
- Dieses Prinzip wenden wir solange auf alle Klauseln der Länge größer 3 an (wobei jedesmal eine zusätzliche Hilfvariable erzeugt wird) bis nur noch Klauseln der Länge 3 übrig sind.
- Die Gesamtlaufzeit dieser Transformation ist polynomiell beschränkt, da die maximale Klausellänge pro Iteration um eins sinkt.

$\square$

Aus 3SAT $\in$ NP und SAT $\leq$ 3SAT folgt

Korollar

3SAT ist NP*-vollständig.*

Übrigens 2SAT $\in$ P.