Berechenbarkeit und Komplexität: Übersicht über die Komplexitätslandschaft

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität

24. Januar 2008

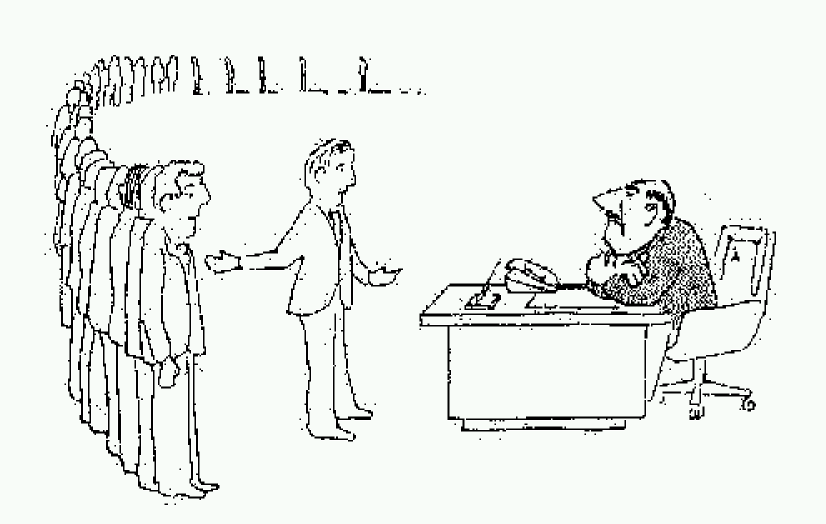
Zusammenfassung

- P enthält die Probleme, die wir effizient, also in polynomieller Zeit auf der TM oder RAM (im logarithmischen Kostenmaß) lösen können.
- NP enthält diejenigen Probleme, die wir in polynomieller Zeit mit einer NTM lösen können.
- NPC ist die Klasse der NP-vollständigen Probleme, also der schwierigsten Problem in NP.

Die Klasse NPC ist von besonderem Interesse, weil sie viele praxisrelevante Probleme enthält wie CLIQUE, KP-E, BPP-E, TSP-E und zahllose andere.

Unter der Hypothese $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt $\mathrm{P} \cap \mathrm{NPC} = \emptyset$, d.h. keines der NP-vollständigen Probleme hat einen Polynomialzeitalgorithmus.

Aus dem Buch von Garey und Johnson (1979)



“I can’t find an efficient algorithm, but neither can all these famous people.”

Die Klasse PSPACE

- Sei PSPACE die Klasse derjenigen Probleme, die wir mit einem polynomiell beschränkten Band auf einer TM lösen können.
- Im Gegensatz zur Zeitkomplexität kann man nachweisen (*Satz von Savitch*), dass diese Klasse sich nicht ändern würde, wenn wir sie bezüglich der Platzkomplexität auf NTM definieren würden.
- Alternativ kann PSPACE auch über Registermaschinen definiert werden, ohne dass dies eine Änderung bedeuten würde.
- Wie verhält sich PSPACE zu NP? – Da sich der Kopf einer Turingmaschine pro Zeitschritt nur eine Position bewegen kann gilt

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \quad .$$

Die Klasse EXPTIME

- Die Klasse der Probleme mit einer Laufzeitschranke $2^{p(n)}$ auf einer TM für ein Polynom p bezeichnen wir als EXPTIME.
- Wie verhält sich EXPTIME zu NP? und wie zu PSPACE?
- Bei einer Speicherplatzbeschränkung der Größe $s(n)$ gibt es nur $2^{O(s(n))}$ viele verschiedenen Konfigurationen für eine Turingmaschine, so dass auch die Rechenzeit durch $2^{O(s(n))}$ beschränkt ist.
- Die Probleme in PSPACE können deshalb in Zeit $2^{p(n)}$ gelöst werden, so dass gilt

$$\text{PSPACE} \subseteq \text{EXPTIME} \ .$$

Zusammenfassung

- Wir haben gezeigt

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$$

- Es ist bekannt, dass Probleme existieren, die in EXPTIME aber nicht in P enthalten sind (*Hierarchiesätze*). Somit gilt $P \subsetneq EXPTIME$.
- In allen anderen Fällen ist unklar, ob die angegebenen Inklusionen echt oder unecht sind.

Zusammenfassung