Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik

WS 2007/08
12.11.2007

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 4

Aufgabe 4.1: **(10 Punkte)**

Sei M_i die Turing-Maschine, die D' entscheidet. Sei $M_j = M_i'$ die Turing-Maschine, die sich genauso verhält wie M_i, aber in eine Endlosschleife fällt, falls M_i nicht akzeptiert.

Fall 1: Sei $w_j \in D'$. Es folgt aus der Definition von D', dass M_j nicht auf w_j hält. Aus der Definition von M_j folgt dann, dass w_j von M_i nicht akzeptiert wird, dass also $w_j \notin D'$ ist.

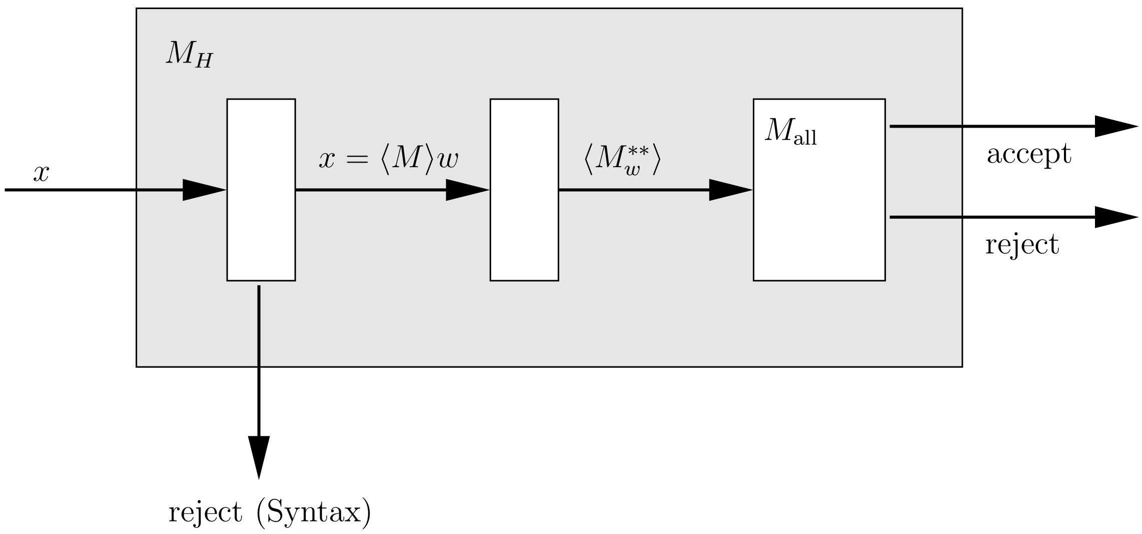
Fall 2: Sei $w_j \notin D'$. Es folgt aus der Definition von D', dass M_j auf w_j hält. Aus der Definition von M_j folgt, dass M_i auf w_j akzeptiert. Aus der Definition von M_i folgt dann, dass $w_j \in D'$ ist.

Somit ist durch Widerspruch gezeigt, dass es kein solches M_i geben kann, und damit D' nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 4.2: **(10 Punkte)**

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM M_{all}, die die Sprache A_{all} entscheidet.
- Gemäß der Definition *rekursiver Sprachen* hält M_{all} auf jeder Eingabe x und akzeptiert genau dann, wenn $x = \langle M \rangle \in A_{\text{all}}$.
- Wir konstruieren nun eine TM M_H für das Halteproblem H, die M_{all} als Unterprogramm verwendet und H entscheidet: Zu einer Eingabe $x = \langle M \rangle w$ berechnet M_H zunächst die Gödelnummer einer TM M_w^{**} mit den folgenden Eigenschaften:
  1. M_w^{**} löscht zunächst ihre Eingabe.
  2. Anschließend simuliert sie die Maschine M auf der Eingabe w und akzeptiert, sobald M auf w hält.

  M_H simuliert nun die Maschine M_{all} auf der Eingabe $\langle M_w^{**} \rangle$ und übernimmt deren Akzeptanzverhalten.



Terminierung: Offensichtlich terminieren die ersten beiden Schritte immer. Außerdem terminiert der dritte Schritt auf Grund unserer Annahme immer.

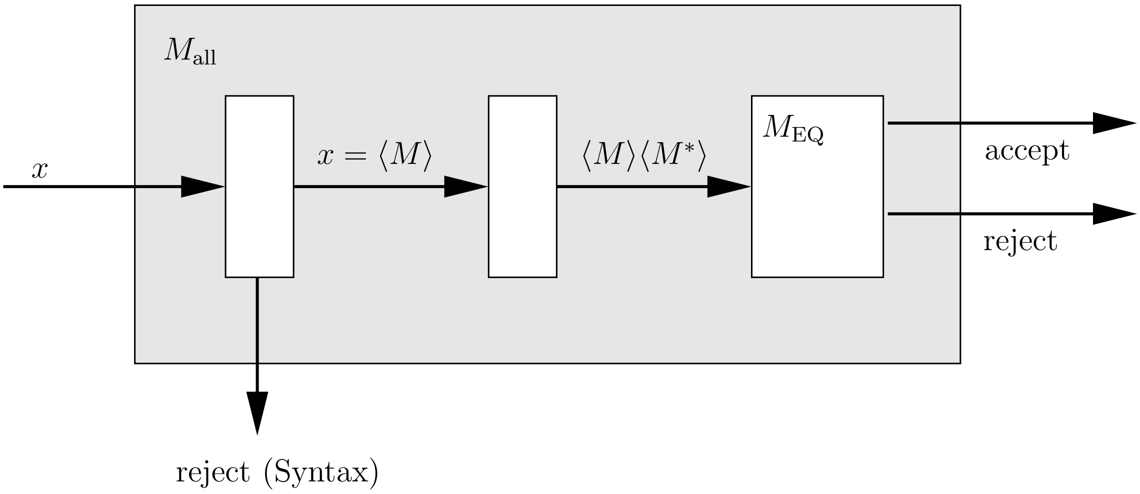
Partielle Korrektheit: Sei $x = \langle M \rangle w$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle M \rangle w \in H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } w \\ &\Rightarrow \quad M_w^{**} \text{ akzeptiert jede Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{all}} \text{ akzeptiert } M_w^{**} \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } \langle M \rangle w \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle w \notin H \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } w \text{ nicht} \\ &\Rightarrow \quad M_w^{**} \text{ akzeptiert keine einzige Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{all}} \text{ verwirft } M_w^{**} \\ &\Rightarrow \quad M_H \text{ verwirft } \langle M \rangle w \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3: **(10 Punkte)**

- Zum Widerspruch nehmen wir an, es gibt eine TM M_{EQ}, die die Sprache A_{EQ} entscheidet.
- Gemäß der Definition *rekursiver Sprachen* hält M_{EQ} auf jeder Eingabe x und akzeptiert genau dann, wenn $x = \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle$ und $L(M_1) = L(M_2)$.
- Wir konstruieren nun eine TM M_{all} für die Sprache A_{all}, die die Maschine M_{EQ} als Unterprogramm verwendet und A_{all} entscheidet: Zu einer Eingabe $x = \langle M \rangle w$ berechnet M_{all} zunächst die Gödelnummer einer TM M^*, die jede Eingabe akzeptiert. Anschließend simuliert M_{all} die Maschine M_{EQ} auf der Eingabe $\langle M \rangle \langle M^* \rangle$ und übernimmt deren Akzeptanzverhalten.



Terminierung: Offensichtlich terminieren die ersten beiden Schritte immer. Außerdem terminiert der dritte Schritt auf Grund unserer Annahme immer.

Partielle Korrektheit: Sei $x = \langle M \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle M \rangle \in A_{\text{all}} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert jede Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad L(M) = L(M^*) \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{EQ}} \text{ akzeptiert } \langle M \rangle \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{all}} \text{ akzeptiert } \langle M \rangle \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle \notin A_{\text{all}} \quad &\Rightarrow \quad M \text{ akzeptiert nicht jede Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad L(M) \neq L(M^*) \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{EQ}} \text{ verwirft } \langle M \rangle \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_{\text{all}} \text{ verwirft } \langle M \rangle \ . \end{aligned}$$