Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
21.1.2008

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 10

Aufgabe 10.1: **(5+5 Punkte)**

Nachfolgend werden nur die Reduktionen selbst dargestellt. Formal müsste jeweils noch die Korrektheit der Reduktion nachgewiesen werden.

(a) Für eine Eingabe $G = (V, E)$ für CycleCover konstruieren wir eine KNF-Formel φ wie folgt. Wir verwenden für jede Kante $e \in E$ eine Variable x_e. Falls in einer erfüllenden Belegung $x_e = 1$ ist, soll e zur Kreisüberdeckung gehören, ansonsten nicht. Damit es sich wirklich um eine Kreisüberdeckung handelt, muss jeder Knoten in G zu genau zwei Kanten der Kreisüberdeckung inzident sein. Damit benötigen wir eine Formel (ähnlich wie oben), die angibt, dass genau *zwei* Variablen erfüllt sind.

$$\bigwedge_{v \in V} \Big(\bigvee_{\substack{e,f \text{ inzident zu } v \\ e \neq f}} (x_e \wedge x_f) \wedge \bigwedge_{e,f,g \text{ inzident zu } v} \neg(x_e \wedge x_f \wedge x_g) \Big)$$

Der erste Teil dieser Formel garantiert, dass es zu jedem Knoten mindestens zwei inzidente Kanten gibt, die für die Kreisüberdeckung ausgewählt werden. Der zweite Teil garantiert dagegen, dass es kein Tripel von inzidenten Kanten gibt, die ausgewählt werden. Dieser zweite Teil lässt sich durch Anwendung der DeMorganschen Regel einfach in KNF transformieren.

Zur Darstellung des Sachverhalts des ersten Formelteils in KNF, bilden wir eine Disjunktion über alle zum Knoten inzidenten Kanten und negieren immer genau eine der entsprechenden Variablen. Für einen Knoten v mit m inzidenten Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ergibt sich

$$\begin{array}{ll}
 & \overline{x}_{e_1} \vee x_{e_2} \vee x_{e_3} \vee x_{e_4} \vee \cdots \vee x_{e_m} \\
\wedge & x_{e_1} \vee \overline{x}_{e_2} \vee x_{e_3} \vee x_{e_4} \vee \cdots \vee x_{e_m} \\
\wedge & x_{e_1} \vee x_{e_2} \vee \overline{x}_{e_3} \vee x_{e_4} \vee \cdots \vee x_{e_m} \\
\wedge & x_{e_1} \vee x_{e_2} \vee x_{e_3} \vee \overline{x}_{e_4} \vee \cdots \vee x_{e_m} \\
\vdots & \\
\wedge & x_{e_1} \vee x_{e_2} \vee x_{e_3} \vee x_{e_4} \vee \cdots \vee \overline{x}_{e_m} \\
\wedge & x_{e_1} \vee x_{e_2} \vee x_{e_3} \vee x_{e_4} \vee \cdots \vee x_{e_m}
\end{array}$$

Insgesamt ergibt sich eine Formel der Größe $O(|V| \cdot (|V|^2 + |V|^3)) = O(|V|^4)$.

(b) Um das Hamiltonkreisproblem für eine Eingabe $G = (V, E)$ durch eine KNF-Formel darzustellen, verwenden wir Variablen $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq |V|$ mit der Bedeutung, dass der Knoten $v_i \in V$ an Position j im Hamiltonkreis vorkommt. Wie bei VertexColor oder dem Satz von Cook und Levin muss auch hier garantiert werden, dass jedem Knoten genau eine Position zugeordnet wird und jeder Position auch genau ein Knoten. Dies ist wie bereits gesehen durch eine Formel polynomieller Länge möglich.

Weiterhin müssen wir garantieren, dass zwischen zwei in der Ordnung benachbarten Knoten auch die zugehörigen Kanten im Graphen existieren, bzw. dass dort wo keine Kanten im Graphen sind, die entsprechenden Knoten nicht aufeinander folgen können. Der folgende Formelteil garantiert dies:

$$\bigwedge_{\{v_k,v_l\}\notin E} \left(\bigwedge_{1\leq i\leq |V|-1} \big(\neg(x_{k,i} \wedge x_{l,i+1})\big) \wedge \neg(x_{k,|V|} \wedge x_{l,1}) \right).$$

Durch Anwendung der DeMorganschen Regel erhalten wir auch hieraus wieder eine KNF-Formel der Größe $O(|V|^3)$. Insgesamt ergibt sich also eine KNF-Formel polynomieller Größe.

Aufgabe 10.2: **(5+5 Punkte)**

Ein Hamilton Pfad ist ein Pfad, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht. Wir zeigen zunächst Hamilton Kreis $\leq_p$ Hamilton Pfad.

Dazu reduzieren wir in einem ersten Schritt Hamilton Kreis auf ein Zwischenproblem. Sei (u,v)-Hamilton Pfad das Problem, ob es in einem Graphen G mit $u,v \in V(G)$ einen Hamilton Pfad gibt, der in u startet und in v endet. Sei $G=(V,E)$ die Eingabe, und $v \in V$. Sei $N(v)=\{w_1,\ldots,w_d\}$ die Nachbarschaft von v. Wir ersetzen v durch zwei Knoten v_1 und v_2, und fügen für jedes v_i und w_j mit $i=1,2$ und $j=1,\ldots,d$ eine Kante (v_i,w_j) hinzu. Formal: $G^\star=(V^\star,E^\star)$, mit $V^\star=V-v\cup\{v_1,v_2\}$ und $E^\star=E-e\cup\bigcup_{i,j}(v_i,w_j)$. In G gibt es genau dann einen Hamilton Kreis, wenn es in $G^\star$ einen (u,v)-Hamilton Pfad gibt.

Im zweiten Schritt reduzieren wir das Zwischenproblem auf Hamilton Pfad. Setze $G'=(V',E')$ mit $V'=V^\star\cup\{u',v'\}$ und $E'=E^\star\cup\{(u,u'),(v,v')\}$. Wir haben also den Graphen an den Endpunkten u und v des Pfades um je einen Knoten verlängert. Offensichtlich hat $G^\star$ genau dann einen (v_1,v_2)-Hamilton Pfad, wenn G' einen Hamilton Pfad hat.

Ein Zertifikat y für Hamilton Pfad ist eine Permutation $\pi:\{1,\ldots,|V|\}\to\{1,\ldots,|V|\}$, so dass $P=(v_{\pi(1)},\ldots,v_{\pi(n)})$ ein Hamilton Pfad in G ist. Dieses Zertifikat ist effizient verifizierbar, indem jeweils geprüft wird, ob die Kante $(v_{\pi(i)},v_{\pi(i+1)})$ existiert. Also gilt Hamilton Pfad $\in$ NP. Ähnliche Überlegungen zeigen, dass auch die beiden folgenden Probleme in NP liegen.

(a) Longest Path ist eine Verallgemeinerung von Hamilton Pfad, wenn man $c=n-1$ setzt.

(b) Bounded Degree MST ist eine Verallgemeinerung von Hamilton Pfad, wenn man $d=2$ und $c=n-1$ setzt, und jeder Kante das Gewicht 1 zuordnet.

Damit sind alle drei Probleme NP-vollständig.

Aufgabe 10.3: **(3+2 Punkte)**

(a) Eine Formel φ in disjunktiver Normalform ist erfüllbar gdw. mindestens eine ihrer Klauseln (Konjunktionsterme) erfüllbar ist. Eine Klausel ist erfüllbar gdw. keine Variable in ihr sowohl negiert als auch unnegiert vorkommt. Das ist offensichtlich in Polynomzeit lösbar.

(b) φ ist eine Tautologie gdw. $\neg\varphi$ nicht erfüllbar ist. Durch Anwenden der De Morganschen Gesetze erhält man aus $\neg\varphi$ eine Formel ψ in DNF.