Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
20.12.2007

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Blatt 8

Aufgabe 8.1: **(5+5 Punkte)**

Betrachte die nachfolgenden Varianten des Euklidischen Algorithmus (entnommen aus Wikipedia) zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen a und b.

Variante 1:

Eingabe: $a, b \in \mathbb{N}$
```
While a ≠ b
   If a > b
      then a := a − b
      else b := b − a
End While
```
Ausgabe : a

Variante 2:

Eingabe: $a, b \in \mathbb{N}$
```
While b > 0
   r := a mod b
   a := b
   b := r
End While
```
Ausgabe : a

(a) Bestimme die Laufzeit von Variante 1 im logarithmischen Kostenmaß.

(b) Bestimme die Laufzeit von Variante 2 im logarithmischen Kostenmaß.

Aufgabe 8.2: **(2+3 Punkte)**

(a) Gib eine binäre Kodierung einer Funktion $f : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, k\}$ der Länge $O(N \log k)$ an.

(b) Gib eine binäre Kodierung einer Permutation der Menge $\{1, \ldots, N\}$ an, und zusätzlich einen Polynomialzeitalgorithmus (bzgl. logarithmischen Kostenmaß), der überprüft, ob es sich bei einem eingegebenen Wort aus $\{0, 1\}^*$ um eine gültige Kodierung einer Permutation handelt.

— bitte wenden —

Aufgabe 8.3: **(10 Punkte)**

Seit der Himmel diesen Bill zur Betreuung des himmlischen Großrechnersystems angeheuert hat, gibt es andauernd Abstürze. Heute ist es mal wieder so weit, dabei wartet der Weihnachtsmann gerade jetzt ganz dringend auf den Ausdruck seiner Rundtour für die Weihnachtsnacht. Würde der Himmelsrechner funktionieren, wäre das alles gar kein Problem, schließlich wurde der Rechner vor gar nicht allzu langer Zeit von Alan entworfen und verfügt über diesen tollen Nichtdeterminismus. Nun aber muss der Weihnachtsmann ein Verfahren entwerfen, mit dem er auch nach irdischen Maßstäben effizient seine Weihnachtstour berechnen kann. Die Distanzen zwischen den einzelnen Orten, zu denen er muss, kennt er natürlich. Aber wie jedes Jahr stellt sich das Problem, dass er an keinem Ort zweimal auftauchen darf (wegen neugieriger Kinder). Außerdem würden seine Rentiere dauerhaft in Streik treten, wenn sie herausbekommen würden, dass sie nicht die kürzeste Route genommen haben. Glücklicherweise ist sein treues Leitrentier Rudolph in der Lage, zu jeder vorgelegten Eingabe von Orten und ihren Distanzen, effizient zu entscheiden, ob es eine Tour mit den geforderten Eigenschaften der Länge höchstens b Kilometer gibt oder nicht. Allerdings wissen Rudolph und der Weihnachtsmann noch nicht, wie sie daraus eine Lösung für das ursprüngliche Problem entwickeln können.

Formale Aufgabenstellung: Zeige, falls die Entscheidungsvariante des TSP in P ist, so ist auch das TSP in P.

Hinweis: Im Skript zur Vorlesung wird ein solches Resultat bezüglich des Rucksackproblems KP gezeigt. Desweiteren findet man dort auch die formalen Definitionen der Probleme TSP und BPP.

Aufgabe 8.4: **(10 Punkte)**

Ein weiteres Problem stellt sich dem Weihnachtsmann bei der Verteilung der Geschenke in seine Weihnachtssäcke. Sparsam, wie man im Himmel ist, soll er mit der minimalen Anzahl von Säcken auskommen, die für die ganzen Geschenke benötigt werden. Allerdings ist noch unklar, wie die Geschenke auf die Säcke verteilt werden müssen. (Früher war das alles kein Problem, aber seit Bill ...) Jedenfalls hat jedes Geschenk sein eigenes Gewicht und jeder Sack kann maximal b Kilogramm tragen ohne zu reißen. Zum Glück für den Weihnachtsmann, hat eine der Feen im himmlischen Einkauf ein Verfahren entwickelt, mit dem sie effizient entscheiden kann, ob eine bestimmte Menge von Geschenken auf eine bestimmte Anzahl von Säcken mit einer ebenfalls bestimmten zulässigen maximalen Traglast verteilt werden kann oder nicht.

Formale Aufgabenstellung: Zeige, falls die Entscheidungsvariante des BPP in P ist, so ist auch das BPP in P.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 10.01. um 12.00 Uhr im Sammelkasten am Lehrstuhl.

Wir wünschen allen ein schönes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch!