Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
26.11.2007

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 6

Aufgabe 6.1: **(10)**

(a) Da $L_1 \leq L_2$ ist, gibt es ein berechenbares g, so dass $x \in L_1 \Leftrightarrow g(x) \in L_2$, und da $L_2 \leq L_3$, ein berechenbares f, so dass $y \in L_2 \Leftrightarrow f(y) \in L_3$ gilt. Also gilt $x \in L_1 \Leftrightarrow g(x) \in L_2 \Leftrightarrow f(g(x)) \in L_3$, und damit $L_1 \leq L_3$, da $f \circ g$ berechenbar.

(b) Da $L_1 \leq L_2$ ist, gibt es eine berechenbare Funktion f, so dass $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$ gilt.

Dann gilt auch $x \in \overline{L_1} \Leftrightarrow \neg(x \in L_1) \Leftrightarrow \neg(f(x) \in L_2) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{L_2}$.

(c) $\overline{D}$ ist rekursiv aufzählbar, da es eine TM gibt, die erkennen kann, ob M_i Eingabe w_i akzeptiert. D ist aber nicht rekursiv aufzählbar, da sonst D rekursiv wäre.

Es gilt nicht $D \leq \overline{D}$, da nach Lemma der Vorlesung sonst auch D rekursiv aufzählbar wäre, im Widerspruch zu obiger Überlegung.

Es gilt auch nicht $\overline{D} \leq D$, da sonst nach Teil b) ebenfalls $D \leq \overline{D}$ gelten würde, was aber nicht sein kann.

Aufgabe 6.2: **(10)**

(a) Seien L_1 und L_2 rekursive Sprachen, weiterhin sei L_2 nicht-trivial. Seien $y_{\text{JA}} \in L_2$ und $y_{\text{NEIN}} \notin L_2$. Die Funktion $f : L_1 \to L_2$ berechnet für eine Eingabe x zunächst, ob $x \in L_1$ ist. Dies ist möglich, da L_1 rekursiv ist. Falls $x \in L_1$, wird dann $f(x) = y_{\text{JA}}$ gesetzt, ansonsten $f(x) = y_{\text{NEIN}}$.

Offensichtlich gilt $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$, und damit $L_1 \leq L_2$.

(b) Die Aussage gilt nicht für rekursiv aufzählbare Sprachen. Zum Beweis setze $L_1 = \overline{D}$ und $L_2 = \{1\}$, also eine Sprache, die nur ein Wort und damit nur eine Ja-Instanz enthält. Beide Sprachen sind nicht-trivial und rekursiv aufzählbar, erfüllen also die Voraussetzung. Aber es gilt nicht $L_1 \leq L_2$.

Wir beweisen dies durch Widerspruch. Sei $L_1 \leq L_2$. Dann existiert ein berechenbares f, so dass $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$ gilt. Damit gilt $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) = 1$. Der Wert $f(x)$ kann aber nach Voraussetzung berechnet werden. Damit wäre $L_1 = \overline{D}$ entscheidbar.

Aufgabe 6.3: **(10)**

Es ist $D = \{w \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$, und $\overline{H} = \{v \mid v \text{ hat nicht die Form } \langle M \rangle w \text{ oder } v = \langle M \rangle w \text{ und } M \text{ hält nicht auf } w\}$. Wir konstruieren eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass $x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \overline{H}$ gilt.

Für $w = w_i$, sei M_i' die TM, die sich genau wie M_i verhält, aber in eine Endlosschleife geht, falls M_i verwirft. Sei dann $f(w) = \langle M_i' \rangle w_i$.

Es gelten die folgenden Implikationen:

$w \in D \Rightarrow M_i$ akzeptiert $w_i = w$ nicht $\Rightarrow M_i'$ hält nicht auf $w_i \Rightarrow f(w) = \langle M_i' \rangle w_i \in \overline{H}$.

$w \notin D \Rightarrow M_i$ akzeptiert $w_i = w \Rightarrow M_i'$ akzeptiert $w_i \Rightarrow M_i'$ hält auf $w_i \Rightarrow f(w) = \langle M_i' \rangle w_i \notin \overline{H}$.

Damit ist $D \leq \overline{H}$ gezeigt.