Zusammenfassung bekannter Probleme aus der Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie (Berthold Vöcking WS07/08)

von Philipp Fischer

Die Probleme stammen aus Vorlesung und Übung

1 Bekannte Probleme

Berechenbarkeitstheorie

D - Die Diagonalsprache

Definition: $D = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$
Eigenschaften: $\overline{D}$ rekursiv aufzählbar

H - Das Halteproblem

Definition: $H = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$
Eigenschaften: H rekursiv aufzählbar

H_ϵ - Das spezielle Halteproblem

Definition: $H_\epsilon = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf dem leeren Wort}\}$
Eigenschaften: H_ϵ rekursiv aufzählbar

H_{all} - Halten auf allen Eingaben

Definition: $H_{all} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben}\}$
Eigenschaften: H_{all} nicht rekursiv aufzählbar, $\overline{H}_{all}$ auch nicht rekursiv aufzählbar

A_{all} - Akzeptieren aller Eingaben

Definition: $A_{all} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert alle Eingaben}\}$
Eigenschaften: A_{all} nicht rekursiv aufzählbar, $\overline{A}_{all}$ auch nicht rekursiv aufzählbar

A_{EQ} - Gleiche Sprache

Definition: $A_{EQ} = \{\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$
Eigenschaften: A_{EQ} nicht rekursiv aufzählbar, $\overline{A}_{EQ}$ auch nicht rekursiv aufzählbar

$L(S)$ - Berechnung bestimmter Funktionen (Satz von Rice)

Definition: $L(S) = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S)\}$ wobei S eine Teilmenge der berechenbaren Funktionen $\mathcal{R}$ ist und $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$

Eigenschaften: $L(S)$ nicht rekursiv *(TODO: Aufzählbarkeit?)*

N - Hilberts zehntes Problem

Definition: $N = \{p \mid p \text{ ist ein Polynom mit ganzahliger Nullstelle}\}$

Eigenschaften: N rekursiv aufzählbar

PKP - Postsches Korrespondenzproblem

Definition: $K = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \frac{x_k}{y_k} \end{bmatrix} \right\}$ mit x_i, y_i nichtleere Wörter. $K \in PKP$ wenn es eine Folge von „Dominos“ gibt, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \cdots = y_{i_1} y_{i_2}$. Es dürfen Elemente beliebig oft wiederholt werden.

Eigenschaften: PKP rekursiv aufzählbar

A - Akzeptanz eines Wortes

Definition: $A = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

Eigenschaften: A rekursiv aufzählbar

OR_w - Mindestens eine von zwei eingegebenen TM akzeptiert

Definition: $OR_w = \{\langle M_i \rangle \langle M_j \rangle \mid M_i \text{ oder } M_j \text{ akz. } w, \text{ mit } i, j \in \mathbb{N}\}$

Eigenschaften: OR_w rekursiv aufzählbar

OR_w^M - Eingegebene oder vorgegebene TM akzeptiert

Definition: $OR_w^M = \{\langle M_i \rangle \mid M_i \text{ oder } M \text{ akzeptiert } w, \text{ mit } i \in \mathbb{N}\}$

Eigenschaften: OR_w^M im Allg. nur rekursiv aufzählbar, OR_w^M rekursiv falls M immer akzeptiert

XOR_w^M - Entweder eingegebene oder vorgegebene TM akzeptiert

Definition: $XOR_w^M = \{\langle M_i \rangle \mid Entweder M_i \text{ oder } M \text{ akzeptiert } w, \text{ mit } i \in \mathbb{N}\}$

Eigenschaften: XOR_w^M nicht rekursiv *(TODO: Aufzählbarkeit?)*

$H_{\leq n}$ - Halten nach höchstens n Schritten

Definition: $H_{\leq n} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält nach höchstens } n \text{ Schritten auf jeder Eingabe}\}$

Eigenschaften: $H_{\leq n}$ rekursiv

LIN-TAPE - Durch Eingabelänge beschränktes Band

Definition: LIN-TAPE $= \{\langle M \rangle w \mid M$ benutzt bei Eingabe w nur Bandzellen mit Index $-|w| \leq i \leq |w|\}$

Eigenschaften: LIN-TAPE rekursiv

POS-TAPE - Nutzung ausschließlich positiver Bandzellen

Definition: POS-TAPE $= \{\langle M \rangle w \mid M$ benutzt bei Eingabe w nur Bandzellen mit Index $i \geq 0\}$

Eigenschaften: $\overline{\text{POS-TAPE}}$ rekursiv aufzählbar

H_{EQ} - Halten auf denselben Wörtern

Definition: $H_{EQ} = \{\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid M_1$ und M_2 halten auf denselben Wörtern$\}$

Eigenschaften: H_{EQ} nicht rekursiv *(TODO: Aufzählbarkeit?)*

$H_\emptyset$ - Immer halten und nicht alles verwerfen

Definition: $H_\emptyset = \{\langle M \rangle \mid M$ hält immer und akz. mindestens ein Wort$\}$

Eigenschaften: $H_\emptyset$ nicht rekursiv aufzählbar, $\overline{H}_\emptyset$ auch nicht rekursiv aufzählbar

H_{Σ^*} - Immer halten und nicht alles akzeptieren

Definition: $H_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid M$ hält immer und verw. mindestens ein Wort$\}$

Eigenschaften: H_{Σ^*} nicht rekursiv aufzählbar, $\overline{H}_{\Sigma^*}$ auch nicht rekursiv aufzählbar

Komplexitätstheorie

Graphzusammenhang

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$

Frage: Ist G ein zusammenhängender Graph?

Eigenschaften: *Graphzusammenhang* $\in \mathsf{P}$

CycleCover - Kreisüberdeckung

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es eine Menge von Kreisen in G, sodass jeder Knoten in genau einem Kreis liegt?

Eigenschaften: CycleCover ist in P

2-SAT - Spezielle Variante von SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel Φ in konjunktiver Normalform wobei alle Klauseln aus genau 2 Literalen bestehen müssen.

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, sodass Φ erfüllt ist?

Eigenschaften: 2-SAT ist in P

DNF-SAT - Spezielle Variante von SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel Φ in disjunktiver Normalform.

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, sodass Φ erfüllt ist?

Eigenschaften: DNF-SAT ist in P

Clique

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \{1, \ldots, |V|\}$

Frage: Gibt es ein k-Clique in G? (Eine Teilmenge von Knoten der Größe mindestens k, sodass innerhalb der Teilmenge jeder Knoten mit jedem direkt verbunden ist)

Eigenschaften: Clique ist NP-vollständig

IndependentSet - Nichtzusammenhängender Teilgraph

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $b \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Knotenmenge $K \subseteq V$, die mindestens b Knoten enthält sodass zwischen den Knoten aus K keine Kanten in E sind?

Eigenschaften: IndependentSet ist NP-vollständig

VertexCover - Knotenüberdeckung

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $b \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Knotenmenge $K \subseteq V$, die höchstens b Knoten enthält sodass jede Kante aus E zu mindetens einem Knoten aus K benachbart ist?

Eigenschaften: VertexCover ist NP-vollständig

KP - Rucksackproblem, Knapsack Problem (Entscheidungsvariante)

Eingabe: Rucksackgewichtsschranke $b \in \mathbb{N}$, Gewichte $w_1, \ldots, w_N \in \{1, \ldots, b\}$, Profite $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{N}$, Mindestprofit $p \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Teilmenge $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$, sodass $\sum_{i \in K} w_i \leq b$ und $\sum_{i \in K} p_i \geq p$

Eigenschaften: KP ist NP-vollständig

BPP - Bin Packing Problem (Entscheidungsvariante)

Eingabe: Kistengewichtsschranke $b \in \mathbb{N}$, Gewichte $w_1, \ldots, w_N \in \{1, \ldots, b\}$, Maximale Kistenanzahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine zulässige Aufteilung aller Gewichte in k Kisten

Eigenschaften: BPP ist NP-vollständig

TSP - Traveling Salesperson Problem (Entscheidungsvariante)

Eingabe: Vollständiger Graph mit N Knoten und Kantengewichten $c(i, j) \in \mathbb{N}$ für $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, wobei $c(i, j) = c(j, i)$ und eine Maximallänge der Rundreise $C \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Rundreise (Eine Permutation der Knoten) mit einer Länge höchstens C?

Eigenschaften: TSP ist NP-vollständig

{1,2}-TSP - Spezielle Variante des TSP

Eingabe: Wie bei TSP, bis auf $c(i, j) \in \{1, 2\}$ für $i, j \in \{1, \ldots, N\}$

Frage: Wie bei TSP

Eigenschaften: {1,2}-TSP ist NP-vollständig

SAT - Satisfiability Problem, Erfüllbarkeitsproblem

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel Φ in konjunktiver Normalform

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, sodass Φ erfüllt ist?

Eigenschaften: SAT ist NP-vollständig

3-SAT - Spezielle Variante von SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel Φ in konjunktiver Normalform wobei alle Klauseln aus genau 3 Literalen bestehen müssen.

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, sodass Φ erfüllt ist?

Eigenschaften: 3-SAT ist NP-vollständig

VertexColor/COLORING - Knotenfärbung

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und die Anzahl der Farben $k \in \{1, \ldots, |V|\}$

Frage: Gibt es eine Färbung der Knoten von G mit k Farben, sodass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben?

Eigenschaften: VertexColor ist NP-vollständig

SubsetSum - Teilmengensumme

Eingabe: Zahlen $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N}$ und gesuchte Summe $b \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Teilmenge $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$ mit $b = \sum_{i \in K} a_i$

Eigenschaften: SubsetSum ist NP-vollständig

Partition - Teilung in zwei gleichgroße Teile

Eingabe: Zahlen $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Teilmenge $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$ mit $\sum_{i \in K} a_i = \sum_{i \notin K} a_i$

Eigenschaften: Partition ist NP-vollständig

HC - Hamiltonian Circuit, Hamiltonkreis

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G? (Einen Kreis der jeden Knoten genau einmal besucht)

Eigenschaften: HC ist NP-vollständig

DHC - Directed Hamiltonian Circuit, Gerichteter Hamiltonkreis

Eingabe: Gerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen gerichteten Hamiltonkreis in G?

Eigenschaften: DHC ist NP-vollständig

HP - Hamiltonian Path, Hamiltonpfad

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonpfad in G? (Einen Pfad der jeden Knoten genau einmal besucht)

Eigenschaften: HP ist NP-vollständig

LongestPath - Längster Pfad

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $c \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt Pfad (kreisfreien Weg) in G mit Länge mindestens c?

Eigenschaften: LongestPath ist NP-vollständig

BoundedDegreeMST - Spannbaum mit maximalem Grad und Kosten

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ zwei Zahlen $c, d \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt Spannbaum mit Grad höchstens d und Kosten höchstens c?

Eigenschaften: BoundedDegreeMST ist NP-vollständig

Anmerkungen

Diese Liste ist nicht vollständig. Ich bitte um Hinweise zu Ergänzungen und Verbesserungen.