Analysis für Informatiker 1. Klausur WS2018/2019 Protokoll

titan

05.02.19

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{1}{(n+1)!}$$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die Folgen a_n und b_n auf Konvergenz.

a) $a_n = \frac{2n(n+1)(n-2)}{3n^3-4n^2+n+1}$

b) $b_n = \frac{\sin(\sqrt{n})\cos(n^2)}{2n+1}$

Aufgabe 3

Überprüfen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz beziehungsweise absolute Konvergenz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot e^{\frac{1}{n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie die Konvergenz der gegebenen Reihen und geben Sie den Reihenwert an.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\pi^{2n}$

Aufgabe 5

a)

$$g : [-1, 2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \left| x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right|$$

Zeigen Sie die Stetigkeit auf $[-1, 2]$ und die Differenzierbarkeit auf $[-1, 2] \setminus \{0\}$ von g. Beweisen Sie, dass g ein Minimum und ein Maximum auf $[-1, 2]$ besitzt.

b)

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x - 1 - \arctan(x)$$

i) Berechnen Sie $h(1)$ und zeigen Sie dass h in $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt.

ii) Zeigen Sie, dass h in $[0, 1]$ *genau* eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 6

a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right)$$

Begründen Sie, zunächst ohne Berechnung, dass eine Stammfunktion für f existiert und berechnen Sie diese anschließend.

b) Zeigen Sie, dass folgendes Integral existiert.

$$\int_0^\infty e^{-x} \left(1 + \sin\left(x^2\right)\right)$$

c) Berechnen Sie das Anfangswertproblem zu:

$$y' = x^3 \cdot y \qquad y'(1) = 2$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass folgende Abbildung stetig und total differenzierbar ist. Bestimmen Sie außerdem die Funktionalmatrix.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \cdot \sin\left(e^y \cdot \cos(z)\right)$$

Aufgabe 8

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass φ stetig und differenzierbar ist und berechnen Sie t für $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass für alle $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Spur}(\varphi)$ $a_1 + a_2 = 1$ gilt.

c) Skizzieren Sie $\operatorname{Spur}(\varphi)$.

Aufgabe 9

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot (e^y + e^{-y}) \\ x \cdot (e^y - e^{-y}) \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass F total differenzierbar ist. Berechnen Sie außerdem die Funktionalmatrix und ihre Determinante.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, sodass $F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ umkehrbar ist.

c) Berechnen Sie die Funktionalmatrix der Umkehrfunktion in $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 10

Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 11

a) Zeigen Sie, dass $\left|\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|$

b) Es sei $\quad a_0 \quad$ und $\quad a_{n+1} = \cos\left(\frac{a_n}{2}\right)$.

   i) Zeigen Sie: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$, dann ist $a^* = \cos\left(\frac{a^*}{2}\right)$

   ii) Zeigen Sie: Angenommen es gelte $a^* = \cos\left(\frac{a^*}{2}\right)$.
   Dann ist $|a_{n+1} - a^*| \leq 2^{-n}\,|a_1 - a^*|$.

   iii) Zeigen Sie: Falls $a^* = \cos\left(\frac{a^*}{2}\right)$ gilt, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.

Aufgabe 1 - Vollständige Induktion (4 Punkte)

(IA) Sei $n=1$. Dann gilt $\prod_{k=1}^{n} (1 - k/_{k+1}) = 1 - 1/_{1+1} = 1/2 = 1/_{2!} = 1/_{(n+1)!}$

(IV) Es gelte die zu zeigende Gleichheit für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

(IS) $\prod_{k=1}^{n+1} (1 - k/_{k+1}) = (1 - {n+1}/_{n+2}) \prod_{k=1}^{n} (1 - k/_{k+1}) \overset{(IV)}{=} (1 - {n+1}/_{n+2}) \cdot 1/_{(n+1)!}$

$= 1/_{n+2} \cdot (1/_{(n+1)!}) = 1/_{((n+1)+1)!}$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Gleichheit also $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 - Folgenkonvergenz (4+4 Punkte)

a) Zunächst gilt $a_n = \frac{2n^3 - 2n^2 - 4n}{3n^3 - 4n^2 + n + 1} = \frac{2 - 2/n - 4/n^2}{3 - 4/n + 1/n^2 + 1/n^3}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} 2/n = \lim_{n\to\infty} 4/n^2$ $= \lim_{n\to\infty} 4/n = \lim_{n\to\infty} 1/n^2 = \lim_{n\to\infty} 1/n^3$ folgt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} (2 - 2/n - 4/n^2) = 2$ und $\lim_{n\to\infty} (3 - 4/n + 1/n^2 + 1/n^3) = 3 \neq 0$. Nach erneuter Anwendung der Grenzwertsätze folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2/3$. Insbesondere ist also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

b) Definiere die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $c_n := \frac{-1}{2n+1}$, $d_n := \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Beide Folgen sind Nullfolgen als Teilfolgen der Nullfolgen $(\frac{-1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $\sin(x) \in [-1,1]$, $\cos(x) \in [-1,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ folgt $c_n \leq b_n \leq d_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$ und dem Sandwichlemma folgt also $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, insbesondere ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also konvergent.

Aufgabe 3 - Reihenkonvergenz (2+4+5 Punkte)

a) Es gilt $|(-1)^{n+1} e^{1/n}| = |e^{1/n}| \geq |e^0| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ wegen der Monotonie der Exponentialfunktion. Insbesondere ist $((-1)^{n+1} e^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ also keine Nullfolge, da dies jedoch notwendige Bedingung für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{1/n}$ ist, folgt die Divergenz der Reihe.

b) Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{e^{1/n}}{n^2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert, somit konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$. Wegen $1/n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow e^{1/n} \leq e$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stellt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{1/n}}{n^2}$ dar. Mit dem Majorantenkriterium für Reihen ist die zu untersuchende Reihe also absolut konvergent, was auch Konvergenz impliziert.

c) Fehlt im Gedächtnisprotokoll - Irgendeine Aufgabe zur Reihenrest-Abschätzung mit Leibniz.

Aufgabe 4 - Reihenwerte. Fehler im GP: Beide Reihen beginnen bei $n=0$. (4+3 Punkte)

a) Es gilt für $z \in \mathbb{C}$: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Für $z = 1+i$ ergibt sich also $\overline{z} = 1-i$, $|z|^2 = 2$, also $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Wegen $\left|\frac{1}{1+i}\right| = \left|\frac{1-i}{2}\right| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2 < 1$. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ absolut konvergent, also auch konvergent als geometrische Reihe.

Für den Reihenwert ergibt sich: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{1}{\frac{i}{i+1}} = \frac{i+1}{i}$
$= (i+1)\cdot(-i)\cdot\frac{1}{\sqrt{1}^2} = 1-i$.

b) Es gilt $\forall z \in \mathbb{C}$: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$
$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2k}}{(2k)!} = -\cos(z)$. Im gegebenen Fall gilt $z = \pi$, also ist der Reihenwert $-\cos(\pi) = -(-1) = 1$. Als Cosinusreihe ist die gegebene Reihe absolut konvergent und damit auch konvergent.

Aufgabe 5 - Stetigkeit (3+6+3+3 Punkte)

a)(i) Die Betragsfunktion, die Exponentialfunktion und Polynome sind stetig auf $[-1,2]$. Als Komposition und Produkt dieser Funktionen ist auch f wieder stetig auf $[-1,2]$. Sei nun $x \in [-1,0)$. Wegen $xe^{-\frac{x^2}{2}} < 0$ gilt dann $f(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Dabei sind Exponentialfunktion und Polynome differenzierbar auf $[-1,0)$ und somit f als Produkt und Komposition dieser Funktionen ebenfalls. Ist nun $x \in (0,2]$, so gilt $xe^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, also $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Analog zum obigen Fall ist f auch hier differenzierbar.

(ii) Es ist f stetig nach (i), somit folgt wegen $[-1,2]$ abgeschlossen die Existenz von Minimum und Maximum aus dem Satz von Minimum und Maximum. Betrachte nun die Ableitung von f. Für $x \in [-1,0)$ gilt $f'(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Also gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$. Wegen $-1, 1 \notin (-1,0)$ hat f keine lokalen Extrema in $(-1,0)$. Für $x \in (0,2)$ gilt $f'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Also gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$. Also ist 1 kritischer Punkt von f. Weitere kritische Punkte von f sind die Randwerte -1 und 2, sowie die Definitionslücke der Ableitung 0. Weitere kritische Punkte kann f nicht haben. Ein Vergleich der Funktionswerte liefert:

$$f(0) = 0 < f(2) = 2e^{-2} < f(1) = f(-1) = e^{-1/2}$$

Somit ist das Maximum von f $e^{-1/2}$ und das Minimum 0 im Bereich $[-1,2]$.

b) (i) Es gilt $h(1) = 1 - \arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ wegen $\frac{\pi}{4} < 1$.

Weiterhin gilt $h(0) = -1 - \arctan(0) = -1 < 0$. Da h als Summe stetiger Funktionen selbst stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von h im Intervall $[0,1]$

(ii) $x \mapsto \arctan(x)$ ist differenzierbar als Umkehrfunktion des Tangens mit Ableitung $\frac{1}{x^2+1}$. Also ist h auf $(0,1)$ differenzierbar mit $h'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2} > 0 \ \forall x \in (0,1)$. Mit h stetig auf $[0,1]$ folgt h streng monoton wachsend. Folglich ist h injektiv und mit der Existenz der Nullstelle nach (i) folgt die Aussage

Aufgabe 6 – Integrale (4+3+3 Punkte)

a) Als Produkt und Komposition stetiger Funktionen ist f selbst stetig. Dies impliziert die Existenz einer Stammfunktion. Setze $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ stetig, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$ stetig differenzierbar mit $h'(x) = -e^{-x}$ und $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so folgt mit der Substitutionsregel und $u = e^{-x}$:

$\int e^{-x} \sin(e^{-x})\,dx = -\int -e^{-x} \sin(e^{-x})\,dx = -\int \sin(u)\,du$

$= \cos(u) = \cos(e^{-x})$. Somit ist $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(e^{-x})$ eine Stammfunktio

b) Wegen $\sin(x) \in [-1,1] \ \forall x \in \mathbb{R}$ folgt $0 \le (1 + \sin(x^2)) \le 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Betrachte $\int_0^\infty 2e^{-x}\,dx$. Es gilt $\int_0^b 2e^{-x}\,dx = -2\int_0^b -e^{-x}\,dx = -2\left[e^{-x}\right]_{x=0}^{x=b}$

$= 2 - 2e^{-b} \xrightarrow[b \to \infty]{} 2 \in \mathbb{R}$. Folglich existiert $\int_0^\infty 2e^{-x}\,dx$. Somit ist das Vergleichskriterium anwendbar, da $0 \le e^{-x}(1 + \sin(x^2)) \le 2e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und es folgt die Existenz des Integrals $\int_0^\infty e^{-x}(1 + \sin(x^2))\,dx$

c) Wegen $x \mapsto x^3$ stetig als Polynom liegt hier eine lineare homogene Differentialgleichung vor. Eine eindeutige Lösung ist daher gegeben durch:

$\varphi(x) = 2\exp\left(\int_1^x t^3\,dt\right) = 2\exp\left(\left[\frac{t^4}{4}\right]_{t=1}^{t=x}\right) = 2e^{\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right)}$

Aufgabe 7 – Funktionalmatrix (6 Punkte)

Die gegebene Funktion ist stetig als Produkt und Komposition stetiger Funktionen. Weiterhin ist f partiell differenzierbar als Produkt und Komposition partiell differenzierbarer Funktionen. Es ergibt sich als Funktionalmatrix:

$Df(x) = \big(\sin(e^y\cos(z)),\ x\cdot e^y\cdot\cos(z)\cdot\cos(\cos(z)e^y),$
$-xe^y\sin(z)\cos(e^y\cos(z))\big)$

Da alle partiellen Ableitungen stetig als Komposition und Produkt stetiger Funktionen sind, ist f auch stetig partiell differenzierbar. Dies impliziert totale Differenzierbarkeit

Aufgabe 8 – Spur (3+1+2 Punkte)

a) Es ist φ stetig und differenzierbar als Produkt und Komposition stetiger und differenzierbarer Funktionen in jeder Komponente. Es gilt:

$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ 2\cos(t)\sin(t)\end{pmatrix}$. Also gilt $\varphi'(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

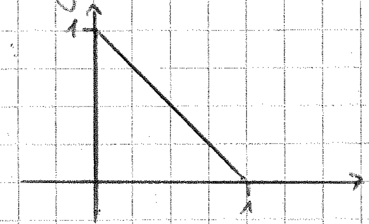
$\Leftrightarrow -2\cos(t)\sin(t) = 0 \wedge 2\cos(t)\sin(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \vee \sin(t) = 0$

$\Leftrightarrow t \in \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) Sei $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \in Spur(\varphi)$, d.h. $\exists t \in \mathbb{R}: a_1 = \cos^2(t) \wedge a_2 = \sin^2(t)$.

Nach Pythagoras gilt also $a_1 + a_2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

c) Mit der Gleichung aus b) und $\cos^2(t), \sin^2(t) \geq 0$ ergibt sich für $Spur(\varphi)$:



Aufgabe 9 – lokale Invertierbarkeit (5+ 2+3 Punkte)

a) F ist stetig und partiell differenzierbar als Produkt und Summe stetiger und partiell differenzierbarer Funktionen. Für die Funktionalmatrix gilt:

$$DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y + e^{-y} & x(e^y - e^{-y}) \\ e^y - e^{-y} & x(e^y + e^{-y})\end{pmatrix}$$

Da die Funktionalmatrix nur stetige Funktionen als Einträge hat, ist F stetig partiell differenzierbar. Dies impliziert totale Differenzierbarkeit

Für die Determinante von $DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ gilt:

$\det\left(DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x(e^{2y} + e^{-2y} + 2) - x(e^{2y} + e^{-2y} - 2) = 4x$

b) Es ist $\det\left(DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Für $x \neq 0$ ist also $DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ invertierbar und somit F invertierbar in einer Umgebung von $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Sei nun also $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x=0$. Sei nun $\binom{x}{y} \in U$ offen, dann existieren $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $y_1 \neq y_2$ und $\left\{\binom{0}{y_1}, \binom{0}{y_2}\right\} \subset U$. Da aber gilt $F\binom{0}{y_1} = F\binom{0}{y_2} = 0$, ist F in $\binom{x}{y}$ nicht invertierbar.

c) Nach dem Satz über lokale Invertierbarkeit und wegen F invertierbar in $\binom{1}{0}$ nach Aufgabe b) gilt:

$$DH\left(F\binom{1}{0}\right) = \left(DF\binom{1}{0}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 - Stetigkeit von $f: [a,b] \to \mathbb{Q}$ (5 Punkte)

Angenommen f wäre nicht konstant. Dann existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$, sodass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da zwischen zwei rationalen Zahlen immer eine irrationale Zahl liegt, existiert ein $x^* \in [f(x_1), f(x_2)] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Da f stetig nach Annahme, ist der Zwischenwertsatz anwendbar und es folgt die Existenz eines $y \in [x_1, x_2]$, sodass $f(y) = x^*$. Das ist ein Widerspruch zu $f([a,b]) \subset \mathbb{Q}$. □

Aufgabe 11 - Rekursiv definierte Folgen (4 + 9 Punkte)

a) Definiere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ stetig differenzierbar mit $f'(x) = -\sin(x)$. Folglich gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und $\sin(x) \in [-1,1]\ \forall x \in \mathbb{R}$ für ein $\xi \in [\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}]$:

$$\left|\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\right| = |\cos'(\xi)| \left|\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right| = |-\sin(\xi)| \left|\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$ was zu zeigen war. □

b) (i) Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$. Nach Teilfolgenprinzip ist dann auch $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{a_n}{2}\right) = a^*$ Mit der Stetigkeit des cos folgt schließlich $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{a_n}{2}\right) = \cos\left(\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{2}\right) = \cos\left(\frac{a^*}{2}\right)$ □

(ii) Die Aussage folgt per vollständiger Induktion: Der Induktionsanfang wurde in a) gezeigt. Im Induktionsschritt folgt: $|a_{n+2} - a^*|$
$$= \left|\cos\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right) - \cos\left(\frac{a^*}{2}\right)\right| \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}|a_{n+1} - a^*| \overset{(IV)}{\leq} 2^{-(n+1)}|a_1 - a^*|$$ □

(iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a^* \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - a^*| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a^*| = 0$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{-n_0}|a_1 - a^*| < \varepsilon$. Nach (ii) gilt dann $|a_{n+1} - a^*| \leq 2^{-n}|a_1 - a^*| \leq 2^{-n_0}|a_1 - a^*| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$
Mit der Äquivalenzkette oben folgt die Aussage. □