Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

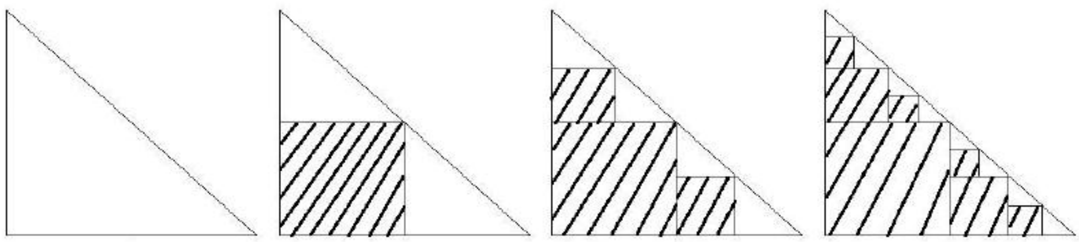
Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Hausaufgabenübung Blatt 5 | 23.11.2015
Abgabe: 30.11.2015, 11:30 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Konvergenz von Reihen)
Wir approximieren ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1 in jedem Schritt durch weitere Hinzunahme von (kleineren) Quadraten, siehe Skizze.



Zeigen Sie, dass die zu den Flächeninhalten der Quadrate gehörende Reihe gegen den Flächeninhalt des Dreiecks konvergiert.

1.5 Punkte

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k + 3^{k-1}}{5^k}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Hinweis zu (b): Bestimmen Sie zunächst $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.5 Punkte

Aufgabe 3. (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$,

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$,

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$,
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{j=1}^{n} j$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k$,

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2k}}{e^{-k}}$.

4 Punkte

Aufgabe 4. (Additionstheorem)
Zeigen Sie, dass das Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

1 Punkte