Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 8 | 14.12.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Ableitungsregeln)
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

a) $f:\ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\frac{1}{x^2})$.

b) $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos 2x$.

c) $h:\ \mathbb{R}\backslash\{\sqrt[5]{5}\} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x^3+3x^2+1}{x^5-5}$.

d) $e:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ e(x) = \arctan(x)$.

1 Punkt

Lösung.

a) Mit Kettenregel und $\sin'(x) = \cos(x)$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$ folgt

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

b) Mit Produktregel und $(e^{2x})' = 2e^{2x},\quad (\cos(2x))' = -2\sin(2x)$ folgt

$$g'(x) = e^{2x}(-2\sin(2x)) + 2e^{2x}\cdot\cos(2x) = 2e^{2x}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

c) Mit Produktregel (beziehungsweise Quotientenregel) und $(x^3+3x^2+1)' = 3x^2 + 6x,\quad (x^5-5)' = 5x^4$ folgt

$$h'(x) = \frac{(3x^2+6x)(x^5-5) - (x^3+3x^2+1)5x^4}{(x^5-5)^2} = \frac{3x^2+6x}{x^5-5} - \frac{5x^4(x^3+3x^2+1)}{(x^5-5)^2}$$

d) Mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und $\tan(y)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(y)$ (aus Additionstheorem) folgt

$$e'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe 2. (Differenzierbarkeit)

Untersuchen Sie die folgenden Funktion mittels Differenzenquotienten auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x \cdot \sin(x)|$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \sin x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

3 Punkte

Lösung.

a) Sei $-\pi < h < 0$, dann gilt $\sin h < 0$ und somit $h \cdot \sin h > 0$. Für $x_0 = 0$ folgt damit

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h \cdot \sin h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h \cdot \sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \sin h = \sin 0 = 0,\end{aligned}$$

da $\sin$ in 0 stetig ist.

Ist $0 < h < \pi$, so gilt $\sin h > 0$ und damit $h \cdot \sin h > 0$. Dann folgt für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h \cdot \sin h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \cdot \sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \sin h = \sin 0 = 0,\end{aligned}$$

da $\sin$ in 0 stetig ist.

Da linker und rechter Grenzwert übereinstimmen und existieren, gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0,$$

also ist f differenzierbar in 0.

b) Betrachte die Differenzenquotienten:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(h) - 0}{h} \overset{Vorl.}{=} 1$$

und

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Da linker und rechter Grenzwert des Differenzenquotienten in 0 nicht gleich sind, existiert der Grenzwert nicht. Also ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 3. (Lipschitz-stetig)
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(-x^3)$.

(a) Begründen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.
Hinweis: Machen Sie eine Extremwertuntersuchung der ersten Ableitung.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

4 Punkte

Lösung.

(a) Da $f(x) = \frac{1}{\exp(x^3)}$ eine Verkettung von stetigen Funktionen ist, nämlich von $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sowie $x \mapsto \exp(x)$, ist f stetig.

(b) Es gilt

$$f'(x) = \underbrace{-3x^2}_{\leq 0} \cdot \underbrace{\exp(-x^3)}_{>0} < 0$$

in D_f, daher ist f streng monoton fallend.

(c) Mittels Grenzwertuntersuchung

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(-x^3) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x^3)} = 0$$

und

$$f(0) = \frac{1}{\exp(0^3)} = \frac{1}{1} = 1$$

ergibt sich durch den Zwischenwertsatz der Wertebereich $W_f = (0, 1]$.

(d) Der Mittelwertsatz besagt

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

für ein ξ zwischen x und y. Es lässt sich die maximale Steigung durch eine Extremwertuntersuchung der ersten Ableitung bestimmen:

- Die zu untersuchende Funktion lautet:

$$g(x) := f'(x) = -3x^2 \cdot \exp(-x^3)$$

- Notwendige Bedingung $g'(x_0) = 0$:
  Mit der ersten Ableitung

$$g'(x) = 3x \cdot (3x^3 - 2) \exp(-x^3)$$

  ergeben sich die möglichen Extremstelle $x_0 = 0$ und $x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

- Die Steigung von f an den Extremstellen ergibt sich durch

$$g(x_0) = 0, \quad g(x_1) < 0$$

- Untersuchung an den Rändern:

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{\exp(x^3)} \overset{\text{L'Hô}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{3x^2\exp(x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x\exp(x^3)} = 0$$

Mit der Wahl von

$$\xi = x_1, \quad L := |f'(\xi)|$$

ist die Lipschitz-Stetigkeit von f gegeben

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi\in[0,\infty)} |f'(\xi)|\,|x-y| \leq L|x-y|$$

für beliebige $x, y \in D_f$.

(e) Da Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit impliziert und wir in Teil (d) bezeigt haben, dass f Lipschitz-stetig ist, ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 4. (Ableitungen)
Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und bestimmen Sie die Kandidaten für Extremstellen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\sin(\cos(x)))$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\exp(\arctan(2x))}{1+4x^2}$.

2 Punkte

Lösung.

a) Die Ableitung berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(\sin(\cos(x))) \cdot (\sin(\cos(x)))' \\ &= -\sin(\sin(\cos(x))) \cdot \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \sin(\sin(\cos(x))) \cdot \cos(\cos(x)) \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Die Kandidaten der Extremstellen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) &\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \ \vee \ \cos(\cos(x)) = 0 \ \vee \sin(\sin(\cos(x))) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\vee \ x = 2\pi n_1 \pm \arccos((2\pi n_2) \pm \arcsin(n_3 \pi)), \quad , n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = n_1 \cdot \pi \quad \vee \quad x = n_2 \frac{\pi}{2} \ \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = n\frac{\pi}{2}, \ \ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b) Hier gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\arctan(2x)' \exp(\arctan(2x))}{1+4x^2} + \exp(\arctan(2x)) \cdot \left(-\frac{8x}{(1+4x^2)^2}\right) \\ &= \exp(\arctan(2x)) \left(\frac{2-8x}{(1+4x^2)^2}\right) \end{aligned}$$

und für die Kandidaten der Extremstellen

$$0 = g'(x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

da die Exponentialfunktion keine Nullstelle hat.