Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 9 | 21.12.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Regeln von l'Hôpital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

2 Punkte

Lösung.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$, $(\cos x - 1) \to 0$, $\sin x \to 0 \Rightarrow$ "$\frac{0}{0}$"-Regel

Falls der Grenzwert existiert, gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} (-\tan x) = 0\end{aligned}$$

Somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0$ mit der Regel von L'Hospital.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$ ist von der Form "0^0"

Wir formen um: $(\sin x)^{sinx} = e^{\ln((\sin x)^{sinx})} = e^{\sin x \ln(\sin x)}$.
exp ist stetig, wir ziehen den lim also rein und betrachten: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}}$ hat Form "$\frac{-\infty}{\infty}$"(oder betrachte analog $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$ der Form "$\frac{0}{0}$")

Ableitungen: $(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$
$(\frac{1}{\sin x})' = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$

$\Rightarrow$ falls der Grenzwert existiert, gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (-\sin x) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ mit l'Hospital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\sin x} &= \exp\left(\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln(\sin x) \right) \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Regeln von l'Hôpital)
Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom. Zeigen Sie mit der Hilfe der Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{|x|\to\infty} |p(x)|e^{-|x|} = 0.$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^n|e^{-|x|} = 0$. Dafür betrachten Sie die Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ getrennt.

3 Punkte

Lösung.
Da $p(x) = a_k\, x^k + a_{k-1}\, x^{k-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ und wegen der Δ-Ugl. genügt es zu zeigen, dass gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{|x|\to\infty} |x^n|\mathrm{e}^{-|x|} \;=\; 0.$$

a) Bilden wir den Limes $x \to \infty$, dürfen wir oBdA $x > 0$ zuvor annehmen.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \underbrace{|x^n|\mathrm{e}^{-|x|}}_{=\,x^n\mathrm{e}^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\mathrm{e}^x} \\
&= \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{mehrfach l'Hospital}\\ \text{anwenden}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^x} \\
&= n! \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} \\
&= \frac{n!}{\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x}_{=\infty}} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

b) Bilden wir den Limes $x \to -\infty$, dürfen wir oBdA $x < 0$ zuvor annehmen.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \underbrace{|x^n|\mathrm{e}^{-|x|}}_{=\,(-1)^n x^n \mathrm{e}^x} &= \lim_{x\to-\infty} (-1)^n x^n \mathrm{e}^x \;=\; (-1)^n \lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x \\
&= (-1)^n \lim_{x\to+\infty} (-x)^n \mathrm{e}^{-x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \\
&\overset{1.}{=} 0.
\end{aligned}$$

c) Da die Grenzwerte in 1. und 2. übereinstimmen, erhalten wir.

$$\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\Rightarrow} \quad \lim_{|x|\to\infty} |p(x)| \cdot \mathrm{e}^{-|x|} = \lim_{|x|\to\infty} \underbrace{\left| \sum_{j=0}^{k} a_j\, x^j \right|}_{\leq \sum_{j=0}^{k} |a_j||x|^j} \cdot \mathrm{e}^{-|x|} \;\leq\; C \cdot \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\lim_{|x|\to\infty} |x|^j \mathrm{e}^{-|x|}}_{=0 \quad \forall\, j=0,\ldots,k} \;=\; 0,$$

wobei $C := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|\} \geq 0$ bezeichne.

Aufgabe 3. (Taylorentwicklung)
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x-1}$ und $x_0 = 0$.

a) Bestimmen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$ von f, $n \in \mathbb{N}$.

b) Stellen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 auf.

c) Geben Sie $T_3(x)$ an.

d) Bestimmen Sie das Restglied $f(x) - T_n(x)$.

e) Reicht $n = 5$ aus, damit der Fehler auf $[-1.1]$

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - T_n(x)|$$

kleiner als 10^{-2} ist?

2.5 Punkte

Lösung.
Gegeben $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}, x_0 = 0$

a) Es gilt $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1},\ f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x-1}$ und

$$f^{(n)} = 2^n \mathrm{e}^{2x-1},\ n \in \mathbb{N}$$

(Beweis induktiv möglich, hier aber sehr leicht zu sehen).

b) Mit $x_0 = 0$ und $f^{(k)}(0) = 2^k e^{-1}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \mathrm{e}^{-1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\mathrm{e} \cdot k!} x^k$$

c)

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{\mathrm{e}k!} x^k = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}}x + \frac{4}{2\mathrm{e}}x^2 + \frac{8}{6\mathrm{e}}x^3 = \frac{4}{3\mathrm{e}}x^3 + \frac{2}{\mathrm{e}}x^2 + \frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d) Nach Vorlesung gilt

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [-1, 1]$$

e) Aus d) folgt

$$\begin{aligned}
\|f(x) - T_n(x)\|_\infty &\leq \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{2^{n+1} \mathrm{e}^{2x-1}}{(n+1)!} \right| \cdot \|x^{n+1}\|_\infty \\
&\leq \frac{2^{n+1}\mathrm{e}}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{2^{n+1}\mathrm{e}}{(n+1)!} \overset{!}{<} \frac{1}{100} = 10^{-2}
\end{aligned}$$

Setze $n = 5$ ein: $\frac{2^6 \mathrm{e}}{6!} = \frac{64\mathrm{e}}{720} \approx 0.24 \not< \frac{1}{100}$
$\Rightarrow n = 5$ reicht nicht aus!

Aufgabe 4. (Taylorpolynom)
Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2\, e^x$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ 3. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(b) Berechnen Sie eine Annäherung für e, indem Sie $T_3(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers $|f(x^*) - T_3(x^*)|$ an.

2.5 Punkte

Lösung.

(a) Allgemein berechnen wir das Taylorpolynom mithilfe der Formel

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Da hier $n = 3$ gegeben ist, berechnen wir die ersten drei Ableitungen von f

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 2x)\exp(x) \\ f''(x) &= (x^2 + 4x + 2)\exp(x) \\ f^{(3)}(x) &= (x^2 + 6x + 6)\exp(x) \end{aligned}$$

und werten sie jeweils an der Stelle $x_0 = 0$ aus

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &= 2 \\ f^{(3)}(x_0) &= 6 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$T_4(x) = 0 + 0 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = x^2 + x^3.$$

(b) An der Stelle $x^* = 1$ liefert die Funktion f den Wert e. Somit ergibt sich für das Taylorpolynom

$$T_3(x^*) = 1 + 1 = 2.$$

Der Fehler der Taylorentwicklung ist gegeben durch

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|,\ \xi \in [x_0, x].$$

Mit der vierten Ableitung

$$f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)\exp(x)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} |f(x^*) - T_3(x^*)| &= |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (1-0)^4| \\ &= |\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}| \\ &\leq \frac{f^{(4)}(1)}{24} = \frac{21e}{24} \approx 2,3784966 \end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass die vierte Ableitung im Intervall $[0, 1]$ streng monoton wachsend ist.