Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

# Analysis für Informatiker | WS 2015/16
# Probeklausur | 17.12.2015, 18.12.2015

**Aufgabe 1.**

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1).$$

**4 Punkte**

**Aufgabe 2.**

Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n = 1$, ein Polynom ohne reelle Nullstelle. Zeigen Sie, dass es $n$ Paare reeller Zahlen $(\alpha_i, \beta_i)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$ gibt, sodass

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^2 + \alpha_i x + \beta_i) \qquad \forall x \in \mathbb{C}$$

gilt.

**3 Punkte**

**Aufgabe 3.**

Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten folgender Folgen für $n \to \infty$ und begründen Sie ihre Antwort:

a) $a_n := \frac{(2n+x)^4}{xn^4 - 5n^3 + 6}$, für $x = 0$ und $x \neq 0$,

b) $b_n := \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n$

**2 + 3 Punkte**

**Aufgabe 4.**

Begründen oder widerlegen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)!}$

**1.5 + 2.5 Punkte**

**Aufgabe 5.**

Ein Läufer läuft insgesamt 2km in $10$ Minuten. Zum Zeitpunkt $t$ (in Minuten) hat er die Strecke $s(t)$ (gemessen in km) zurückgelegt. Die Funktion $s : [0, 10] \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Zeigen Sie, dass es immer einen Zeitabschnitt in $[0, 10]$ von $5$ Minuten gibt, in dem der Läufer genau $1$ km durchläuft.
**Hinweis:** Betrachten Sie die Funktion $f(t) = s(t + 5) - s(t) - 1$ auf $[0, 5]$.

**4 Punkte**