Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 4 | 16.11.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die

$$\text{Re}\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) \leq \left(\frac{5}{|z|}\right)^2$$

erfüllen, und fertigen Sie eine Skizze der Lösungsmenge an.

2 Punkte

Lösung.

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann lässt sich z schreiben als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ ist dann gegeben als $\bar{z} = x - iy$.
Beachte, dass der Fall $x = 0 \wedge y = 0$ ausgeschlossen wurde.

$$\begin{aligned}\text{Re}\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) &= \text{Re}\left(\frac{4z}{\bar{z}\cdot z}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{4x+4iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{4x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

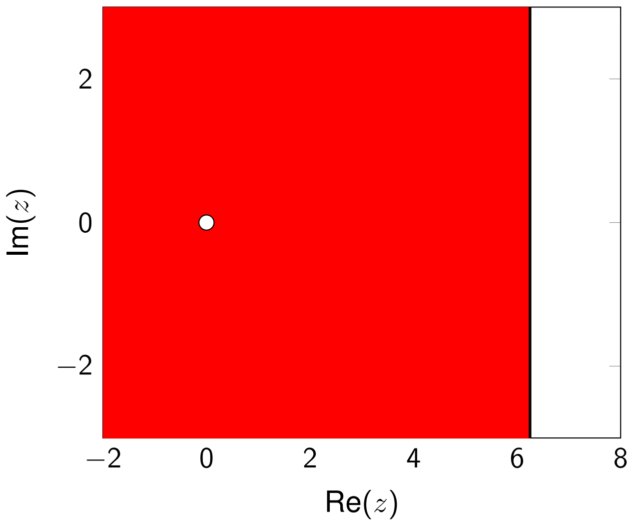
Außerdem gilt für die rechte Seite der Ungleichung

$$\left(\frac{5}{|z|}\right)^2 = \frac{25}{x^2+y^2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & \frac{4x}{x^2+y^2} \leq \frac{25}{x^2+y^2} \qquad \Big|\cdot(x^2+y^2)\text{ , denn } x^2+y^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x \leq 25 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq \frac{25}{4} \\ \Rightarrow \quad & \left\{ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \text{Re}\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) \leq \left(\frac{5}{|z|}\right)^2 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \text{Re}(z) \leq \frac{25}{4} \right\}\end{aligned}$$

Skizze:



Es ist zu beachten, dass $z = 0$ nicht teil der Menge ist.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Folgen)
Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1}$

b) $a_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\right)^n$

c) $a_n = \frac{4n^2+1}{2n^3+n^2}$

2 Punkte

Lösung.

a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\right)^4 \cdot \left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{2n}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

mit $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to \mathrm{e}$ mit Substitution $n \to 2n$, da die Teilfolge von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ den gleichen Grenzwert hat.

$$\to \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^4 \cdot 1 = \mathrm{e}^{-4}.$$

Dabei wurde die Produktregel für konvergente Folgen verwendet.

b) Es gilt $\frac{1}{n} \geq 0$ und somit $\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$. Damit ist

$$\left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\right)^n \geq (\sqrt[n]{n})^n = n$$

Somit ist a_n unbeschränkt und divergent.

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{4n^2+1}{2n^3+n^2} &\leq \frac{4n^2+1}{2n^3} \\ &= \frac{4n^2}{2n^3} + \frac{1}{2n^3} \\ &= 2 \cdot \overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \cdot \overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}} \end{aligned}$$

und $\frac{4n^2+1}{2n^3+n^2} \geq 0$. Mit Einschließungskriterium gilt $a_n \to 0$.

Aufgabe 3.

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ durch

(i) $a_n = \frac{2n+3}{n+5}$

(ii) $b_n = \frac{(-1)^n+n}{n}$

Zeigen Sie durch Verwendung der Definiton der Konvergenz, dass die Folge (a_n) den Grenzwert 2 und die Folge (b_n) den Grenzwert 1 besitzen.

3 Punkte

Lösung.

(i) Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$
z.z.: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\epsilon)$ gilt $|a_n - 2| \leq \epsilon$.
dazu: sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $n \geq \frac{7}{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2(n+5)}{n+5}\right| \\ &= \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| \\ &= \frac{7}{n+5} < \frac{7}{n} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Bestimme $N(\epsilon)$ geeignet:
$N(\epsilon) := \lfloor \frac{7}{\epsilon} \rfloor + 1$,
Dann ist die Konvergenz mit $N(\epsilon) = \lfloor \frac{7}{\epsilon} \rfloor + 1$ gezeigt worden.

(ii) Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $n \geq \frac{1}{\epsilon}$

$$\begin{aligned} |b_n - 1| &= \left|\frac{(-1)^n+n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n+n-n}{n}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Definiere nun $N(\epsilon) = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ dann konvergiert $(b_n)_n$ nach Definition gegen 1.

Aufgabe 4. (Folgen)
Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \sqrt{1+2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass (a_n) der Abschätzung $a_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt.

b) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist.

c) Finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass $a = \sqrt{1+2a}$ gilt.

d) Zeigen Sie nun, dass (a_n) eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist und geben Sie den Grenzwert an.

Hinweis: Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend und stetig in $[0, \infty)$.

3 Punkte

Lösung.

a) IA: $a_1 = 0 < 3 \quad \checkmark$
IV: Sei $a_n < 3$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
IS: $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+2a_n} \overset{\text{(IV)}}{<} \sqrt{1+6} \\ &= \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3. \\ \Rightarrow \ a_n &< 3 \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n} > \sqrt{1+2a_{n-1}} = a_n$$

(vollständige Induktion: Angenommen $a_n > a_{n-1}$, $\sqrt{\cdot}$ ist monoton!)

c)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{1+2a} \quad \Leftrightarrow & a^2 &= 1+2a \\ & \quad\Leftrightarrow & a^2 - 2a - 1 &= 0 \\ & & &\Rightarrow a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

d) Teil(a): a_n ist nach oben beschränkt.
Teil(b): a_n ist monoton wachsend
$\Rightarrow$ (Monotonieprinzip): a_n ist konvergent.
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{1+2a}$
Da $a_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$ kommt nur $a_1 = 1 + \sqrt{2}$ als Grenzwert in Frage.