Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Hausaufgabenübung Blatt 7 | 07.12.2015
Abgabe: 14.12.2015, 11:30 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Stetigkeit)

a) Zeigen Sie die Stetigkeit in $x_0 = 0$ der Funktion

$$\begin{aligned} f\ &:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) &= x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ für } x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

mittels des Folgenkriteriums für Stetigkeit.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit in $x_0 = 0$ der Funktion

$$\begin{aligned} g\ &:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

mittels der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit.

c) Zeigen Sie die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion

$$h: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

mittels der $\epsilon - \delta$-Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

3.5 Punkte

Aufgabe 2. (Lipschitz-Stetigkeit)

a) Zeigen Sie die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion

$$f \ : [1, 10] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

und geben Sie die Lipschitz-Konstante $L > 0$ an.

b) Beweisen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

2 Punkte

Aufgabe 3. (Stetigkeit)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig ergänzbar sind:

a) $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

b) $g \ : \ \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}, \ \ g(x) \ = \ \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ an den Stellen x_1 und x_2. Bestimmen Sie zunächst x_1 und x_2.

Hinweis: Benutzen Sie im Teil (a) die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Denken Sie im Teil (b) an Polynomdivision.

2.5 Punkte

Aufgabe 4. (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(1) = f(-1)$. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x \in [0, 1]$ gibt mit $f(x) = f(x-1)$.

2 Punkte