Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 2 | 02.11.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Abbildungen)
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) := |x|$

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(x) := |x|$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ h(x) := |x|$

Geben Sie Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften an:

d) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

e) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

1 Punkt

Lösung.

$$\text{Es gilt } |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

a)

$$f = \text{id} \Rightarrow f(x) = x$$
$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Daraus und da $x \in \mathbb{N} : f(x) = x$ folgt direkt f bijektiv.

b) g ist nicht surjektiv:
Da die negativen ganzen Zahlen nicht im Wertebereich W_g von g liegen, ist g nicht surjektiv.
g ist nicht injektiv: Ansatz (wie Vorlesung):
Sei $x_1 = 5$, $x_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, aber $g(x_1) = g(x_2)$.
$\Rightarrow g$ nicht injektiv.

c) Da für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $n > 0$ gilt, folgt, dass h nicht surjektiv sein kann:

$$h(n) = |n| = n > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Injektivität.

d) z.B.

$$f_1(x) = \mathsf{arctan}(x)$$
$$f_1(x) = \mathsf{exp}(x)$$

e) z.B.

$$f_2(x) = x(x-1)(x+1)$$

Aufgabe 2. (Abbildungen)

a) Seien $p_1(x) = x^2 + 1$ und $p_2(x) = x^3 + 5x - 1$. Bestimmen Sie $f = p_1 \circ p_2$ und $g = p_2 \circ p_1$.

b) Sei $h(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von h, $h \circ p_1$ und $p_1 \circ h$ an.

c) Sei $k_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $k_a(x) = x^4 + ax^4 + 2$ und Parameter $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Wertebereich von k_a in Abhängigkeit von a an.

Hinweis: Der Wertebereich einer Funktion $f \colon A \to B$ ist die Menge $W_f := f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq B$, also das Bild der Funktion.

1 Punkt

Lösung.

a) $f = p_1 \circ p_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = p_1\left(p_2(x)\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + 5x - 1\right)^2 + 1 \\ &= x^6 + 10x^4 - 2x^3 + 25x^2 - 10x + 2 \\ g = p_2 \circ p_1 &\Rightarrow\; g(x) = p_2\left(p_1(x)\right) \\ g(x) &= \left(x^2 + 1\right)^3 + 5\left(x^2 + 1\right) - 1 \\ &= x^6 + 3x^4 + 8x^2 + 5 \end{aligned}$$

Wir bemerken insbesondere, dass $f(x) \neq g(x)$!

b) $h(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} \quad \Rightarrow \quad D(h) = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ weil an diesen Stellen „durch Null geteilt würde“.

$$\begin{aligned} (h \circ p_1)(x) &= \frac{1}{\left(x^2 + 1 - 2\right)\left(x^2 + 1 - 1\right)} = \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)x^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)x^2} \quad \text{mit 3. binomischer Formel.} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich analog zu oben

$$\begin{aligned} D(h \circ p_1) &= \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}. \\ (p_1 \circ h)(x) &= \left(\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right)^2 + 1 = \frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2} + 1 \end{aligned}$$

Dann ergibt sich analog zu oben

$$D(p_1 \circ h) = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}.$$

c)

$$\begin{aligned} k_a(x) &= x^4 + ax^4 + 2, \quad a \in \mathbb{R} \\ &= (a+1)x^4 + 2 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

$a = -1:$ $k_{-1} = 2$, d.h. $W(k_{-1}) = \{2\}$

$a > -1:$ Dann ist $a + 1 > 0$ und k_a hat Parabelform, nach oben geöffnet.
$(a+1)x^4 + 2 \geq 0$ weil $x^4 = \left(x^2\right)^2 \geq 0$
somit gilt auch: $(a+1)x^4 + 2 \geq 2$ und $k_a(0) = 2$.
Deshalb: $W(k_a) = [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ weil $\lim\limits_{x \to \pm\infty} k_a(x) = +\infty$

$a < -1:$ Dann ist $a + 1 < 0$ und analog zu $a > -1$ erhalten wir
(Parabelform nach unten geöffnet)
$W(k_a) = (-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

Aufgabe 3. (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Übersetzen Sie Teil (a) zunächst in die Summenschreibweise. Teil (a) heißt auch die "geometrische Summenformel".

1.5 Punkte

Lösung.

a) Formulierung der Aufgabe in der Summenschreibweise:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1 \qquad : A(n)$$

weil $q^0 = 1$.
Induktionsannahme: $(n = 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} q^k &= q^0 + q^1 \\ &= 1 + q \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1-q^2}{1-q} \\ &= \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} \\ &= 1 + q \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $A(n)$ wahr für ein beliebiges aber festes $n \in N$.
Induktionsschritt: $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{\left(1-q^{n+1}\right) + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) IA: $(n = 1)$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1 \quad \checkmark$$

IV: Sei die Behauptung wahr für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

<u>IS:</u> $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\overset{\text{(IV)}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \overset{\substack{\text{zu zeigen!}\\ \downarrow}}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& 2 - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \tfrac{1}{n+1} & \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} \leq \tfrac{1}{n} & \mid \text{erweitern} \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{n+2}{(n+1)^2} \leq \tfrac{1}{n} & \mid \cdot n \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \leq 1 \quad \checkmark &
\end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. (Mengen reeller Zahlen)
Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen. Handelt es sich jeweils um ein Maximum bzw. Minimum?

a) $M_1 = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x = \frac{1}{z} \text{ für } z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

b) $M_2 = [a, b),\ M_3 = (a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt

c) $\left|\frac{x+3}{2x-5}\right| \geq 3$

d) $|2x| > |5 - 2x|$

e) $\frac{x+4}{x-2} < x$

1.5 Punkte

Lösung.

a) Sei $x \in M_1$, $x = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, also $|x| \leq 1$.

$$\min M_1 = \inf M_1 = -1, \qquad \max M_1 = \sup M_1 = 1.$$

b) Es gilt $\min M_2 = \inf M_2 = a$ und $\sup M_2 = b$. Wegen $b \notin M_2$ existiert $\max M_2$ nicht.
Es gilt $\max M_3 = \sup M_3 = b$ und $\inf M_3 = a$. Wegen $a \notin M_3$ existiert $\min M_3$ nicht.

c) Wohldefiniertheit: $\left|\dfrac{x+3}{2x-5}\right| \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq \dfrac{5}{2}$

Fallunterscheidung

1) Sei $\dfrac{x+3}{2x-5} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+3}{2x-5} \geq 3$

$\underline{x > \frac{5}{2}:}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & x+3 &\geq 3(2x-5) \\ &\Leftrightarrow & x+3 &\geq 6x-15 \\ &\Leftrightarrow & -5x &\geq -18 \\ &\Leftrightarrow & x &\leq \frac{18}{5} \quad (= 3.6) \end{aligned}$$

$\underline{x < \frac{5}{2}:}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & x+3 &\leq 3(2x-5) \\ &\Leftrightarrow & x+3 &\leq 6x-15 \\ &\Leftrightarrow & 18 &\leq 5x \\ &\Leftrightarrow & x &\geq \frac{18}{5} \end{aligned}$$

2) Sei $\dfrac{x+3}{2x-5} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{x+3}{2x-5} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+3}{2x-5} \leq -3$

$\underline{x > \frac{5}{2}:}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x+3 &\leq -3(2x-5) \\ \Leftrightarrow \quad x+3 &\leq -6x+15 \\ \Leftrightarrow \quad 7x &\leq 12 \\ \Leftrightarrow \quad x &\leq \frac{12}{7} \end{aligned}$$

$\underline{x < \frac{5}{2}:}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x+3 &\geq -3(2x-5) \\ \Rightarrow \quad x+3 &\geq -6x+15 \\ \Leftrightarrow \quad 7x &\geq 12 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq \frac{12}{7} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \left(\frac{5}{2}, \frac{18}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{7}, \frac{5}{2}\right)$$

d) $|2x| > |5-2y|$

$\underline{\text{Fall 1:}}$ $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |2x| = 2x$

$\Rightarrow \quad 2x > |5-2x|$

$\underline{\text{Fall 1a:}}$ $5-2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2x > 5-2x \quad \Leftrightarrow \quad 4x > 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1a} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right] \end{aligned}$$

$\underline{\text{Fall 1b:}}$ $5-2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2x > -5+2x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 > -5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1b} = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right] \end{aligned}$$

$\underline{\text{Fall 2:}}$ $x < 0 \quad \Rightarrow \quad |2x| = -2x$

$\Rightarrow \quad -2x > |5-2x|$

$\underline{\text{Fall 2a:}}$ $5-2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq \dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -2x > 5-2x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 > 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{2a} = \emptyset \end{aligned}$$

$\underline{\text{Fall 2b:}}$ $5-2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -2x > -5+2x \quad \Leftrightarrow \quad 4x > 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x < \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{2b} = \emptyset \end{aligned}$$

<u>Zusammen:</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) \end{aligned}$$

e) $\dfrac{x+4}{x-2} < x \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$

- 1.Fall: $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$
  Dann gilt

  $$\begin{aligned}\frac{x+4}{x-2} < x &\Leftrightarrow x + 4 < x(x-2) \\ &\Leftrightarrow x + 4 < x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow 0 < x^2 - 3x - 4\end{aligned}$$

  $x^2 - 3x - 4$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -1, \quad x_2 = 4$. Also $0 < x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow x < -1$ oder $x > 4$.
  $\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)\} \cap (2, +\infty) = (4, +\infty)$
- 2.Fall: $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$
  Dann gilt

  $$\begin{aligned}\frac{x+4}{x-2} < x &\Leftrightarrow x + 4 > x(x-2) \\ &\Leftrightarrow 0 > x^2 - 3x - 4\end{aligned}$$

  Analog zu 1.Fall erhält man $0 > x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow x > -1$ und $x < 4$.
  $\Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-1, 4) \cap (-\infty, 2) = (-1, 2)$

Zusammen: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (4, +\infty) \cup (-1, 2)$