Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 10 | 11.01.2016

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1.
Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int x^2 sin(x) dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

c) $\int \cos x * \sin^2(x) dx$

3.5 Punkte

Lösung.

a) Berechne das Integral mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Sei $u_1(x) = x^2$, $v_1'(x) = \sin x$
$\Rightarrow u_1'(x) = 2x$ und $v_1(x) = -\cos(x)$
Es folgt

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2(-\cos x) + C \\ &= 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x + C\end{aligned}$$

b) Berechne das Integral mit Partieller Integration
Sei $u(x) = ln(x)$, $v'(x) = \frac{1}{x^2}$,
dann gilt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = -\frac{1}{x}$
Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} * (-\frac{1}{x}) dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + (-\frac{1}{x}) \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

c) Berechne mit Partieller Integration und
$u(x) = \sin^2(x)$, $v'(x) = \cos x$

$\Rightarrow u'(x) = 2\sin x * \cos x,\ v(x) = \sin x$

$$\underbrace{\int \cos(x) \cdot \sin^2(x)\,dx}_{=J} = \sin^3(x) - 2\underbrace{\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\,dx}_{=J} \quad | + 2 \cdot J$$

$$\Leftrightarrow 3\int \cos(x) \cdot \sin^2(x)\,dx = \sin^3(x)$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(x) \cdot \sin^2(x)\,dx = \frac{\sin^3(x)}{3}$$

Aufgabe 2. (Integration durch Substitution)

Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

1.5 Punkte

Lösung.

Mit der Substitution $x = \sin z, dx = \cos z dz$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\arcsin \frac{1}{2}} \frac{\sin^2 z}{(\cos^2 z)^{\frac{3}{2}}} \cos z dz &= \int_0^{\arcsin \frac{1}{2}} \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} dz \\
&= \int_0^{\arcsin \frac{1}{2}} \tan^2 z dz \\
&= \int_0^{\arcsin \frac{1}{2}} \frac{1}{\cos^2 z} - 1 \, dz \\
&= \tan z - z\big|_0^{\arcsin \frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Resubst.}}{=} \tan \arcsin x - \arcsin x\big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \tan \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{2} \\
&\approx 0.05375\ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (Riemann-Integral und Zerlegungssummen)

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$ für $a > 0$ direkt mittels Zerlegungssummen.

Hinweis: Verwenden Sie die durch $x_i = \frac{i^2}{n^2}a,\ i = 0, \ldots, n$, gegebenen Zerlegungen sowie $\xi_i = x_i$ als Zwischenstellen. Zeigen Sie auch, dass die Feinheit dieser Zerlegungen eine Nullfolge ist.

3 Punkte

Lösung.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}a}\left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) a \\
&= \frac{\sqrt{a^3}}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i(2i-1) \\
&= \frac{\sqrt{a^3}}{n^3} \cdot \left(2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{(n+1)n}{2}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{a^3}}{n^3} \left(n(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{a^3}}{n^3} \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}. \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{a^3} \cdot \frac{4}{6} \ = \ \frac{2}{3}\sqrt{a^3}.
\end{aligned}$$

Die Feinheitfolge $\left(\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, denn

$$\begin{aligned}
|x_i - x_{i-1}| \ &= \ a\left|\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\right| \ = \ a\left|\frac{2i-1}{n^2}\right| \ \leq \ a\left|\frac{2n-1}{n^2}\right| \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \\
\Rightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}| \ &= \ a\frac{2n-1}{n^2} \ \xrightarrow[n\to\infty]{} \ 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (Integration und Mittelwertsatz)
Ein Auto fährt mit Geschwindigkeit $v(t)$ zur Zeit t. Bezeichne $s(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Strecke ($s'(t) = v(t)$).

a) Der Fahrtenschreiber zeigt folgende Geschwindigkeitsverläufe
  (i) $v(t) = at$,
  (ii) $v(t) = \exp(at)$

  mit jeweils $a > 0$.
  Berechnen Sie jeweils die bis zur Zeit $T \geq 0$ zurückgelegte Fahrtstrecke $s(T)$.

b) Zeigen Sie, dass das Auto zu einem Zeitpunkt $t \in [0, \frac{3}{2}]$ (in Stunden) schneller als 120 km/h gefahren sein muss, wenn $s\left(\frac{3}{2}\right) = 197$ km gilt.

2 Punkte

Lösung.

a) Aus $s'(t) = v(t)$ und $s(0) = 0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $s(T) = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ ist.

  (i)

$$
\begin{aligned}
s(T) &= \int_0^T at\,\mathrm{d}t \;=\; a\int_0^T t\,\mathrm{d}t \\
&= a\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^T \;=\; a\frac{T^2}{2},
\end{aligned}
$$

  (ii)

$$
\begin{aligned}
s(T) &= \int_0^T \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{1}{a}\mathrm{e}^{at}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{aT} - 1).
\end{aligned}
$$

b) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $z \in (0, \frac{3}{2})$ mit

$$
\begin{aligned}
v(z) &= \frac{1}{\frac{3}{2} - 0}\underbrace{\int_0^{\frac{3}{2}} v(t)\,\mathrm{d}t}_{=s(\frac{3}{2})} \\
&= \frac{2}{3}\cdot 197 \;>\; 120.
\end{aligned}
$$

  Also ist das Auto zum Zeitpunkt z echt schneller als 120 km/h gefahren.