Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 6 | 30.11.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Monotonie der Exponentialfunktion)

Zeigen Sie: Es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und exp ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

1 Punkt

Lösung.

Es gilt

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k \overset{0^0:=1}{=} \frac{1}{0!} 0^0 = 1$$

und

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > 1$$

für alle $x > 0$. Für $x < 0$ gilt

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} > 0,$$

also gilt insgesamt $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Zur Monotonie:
Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Dann gilt $\exp(y) = \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{y-x} \cdot \mathrm{e}^x > e^x = \exp(x)$, da $y - x > 0$ gilt und somit $\exp(y - x) = e^{y-x} > 1$ ist (s.o.).

Aufgabe 2. (Exponentialreihe)

a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz und, dass für alle $n \in N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}\,.$$

(Zur Erinnerung: $0! := 1$.)

b) Zeige durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes und direktes Umformen, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m}\right)$$

und folgere daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

c) Zeige, dass aus (a) und (b) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$

3 Punkte

Lösung.

a)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{nach Hinweis.}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{1}{m^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\cdot\frac{(m-k+1)\cdot\dots\cdot m}{\underbrace{m\cdot\dots\cdot m}_{k\text{-mal}}} \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{m}\right) \\ &\overset{m>n}{\geq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{m}\right)\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &\geq \lim_{m\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{m}\right)\right)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\lim_{m\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{m}\right)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

c) Aus (a) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Aus (b) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

insgesamt folgt also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 3. (Grenzwerte von Funktionen)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte. Vergessen Sie nicht Ihre Aussagen zu begründen.

(a) (i) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x-2}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}$.

(b) (iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$.

(iv) Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{falls } x \neq 3, \\ 0, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$.
Welche Aussage können Sie nun über die Existenz von $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ treffen?

4 Punkte

Lösung.
a) (i) Es folgt mit den Rechengesetzen der Vorlesung

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{2x-2} &= \frac{3 \lim\limits_{x\to -1} x - 1}{2 \lim\limits_{x\to -1} x - 2} \\ &= \frac{3\cdot(-1)-1}{2\cdot(-1)-2} = \frac{-3-1}{-2-2} \\ &= \frac{-4}{-4} = 1\end{aligned}$$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$, gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} &= \frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(4+2x+x^2)} \\ &= \frac{4+2x+x^2-12}{(2-x)(4+2x+x^2)} = \frac{x^2+2x-8}{(2-x)(4+2x+x^2)} \\ &= -\frac{(2-x)(x+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)} = -\frac{(x+4)}{(4+2x+x^2)}\end{aligned}$$

Mit den Rechengesetzen folgt also

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} &= -\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(4+2x+x^2)} \\ &= -\frac{2+4}{4+2\cdot 2+2^2} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) (iii) Für $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt:

$$\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = \frac{(2x^3-4x^2-3x-3)(x-1)}{(x-1)} = 2x^3-4x^2-3x-3$$

Mit Rechengesetzen folgt dann

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = \lim_{x\to 1}(2x^3-4x^2-3x-3) = -8$$

(iv) 1. Sei $x > 3$. Dann gilt $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = 1$ und es folgt $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$

2. Sei $x < 3$. Dann gilt $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$ und es folgt $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$

Es gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

Aus 1. und 2. können wir somit folgern, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ nicht existiert.

Aufgabe 4. (Grenzwerte von Funktionen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(\frac{1}{n}) = 1$ und $f(-\frac{1}{n}) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

2 Punkte

Lösung.
Angenommen, der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert, d.h. es gibt ein $L \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$. Nach Definition gilt also dann für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt jeweils

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

also

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Damit kann der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existieren.