Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 13 | 01.02.2016

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Richtungsableitung)

Sei die Funktion $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

1.5 Punkte

Lösung.

Für $(x, y) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ gilt $f(x, y) = (\sin x)^{\cos y} = e^{\cos y \cdot \ln(\sin x)}$. Da $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ gilt, ist f insbesondere wohldefiniert.
Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos y \cdot e^{\cos y \cdot \ln(\sin x)} \\ &= \cot x \cdot \cos y \cdot (\sin x)^{\cos y} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= -\sin y \cdot \ln(\sin x) \cdot e^{\cos y \cdot \ln(\sin x)} \\ &= -\sin y \cdot \ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{\cos y} \end{aligned}$$

Zur Richtungsableitung: Es ist

$$f_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \cot\frac{\pi}{4} \cdot \cos 0 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\cos 0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$f_y\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = -\sin 0 \cdot \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\cos 0} = 0.$$

Für $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ gilt

$$\|v\|_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

und es folgt

$$\begin{aligned} D_v f\left(\tfrac{\pi}{4}, 0\right) &= \left(f_x\left(\tfrac{\pi}{4}, 0\right) \quad f_y\left(\tfrac{\pi}{4}, 0\right)\right) \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Fixpunktsatz von Banach)

Gegeben sei

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(e^x e^{-y} + \ln(x+1)) \\ \frac{1}{5}(\tan(\frac{x}{2}) + (y - \frac{3}{5})^2) \end{pmatrix}$$

definiert auf dem Raum $\Omega = [0,2] \times [0,2]$.

Zeigen Sie, dass die Vorraussetzungen für den Fixpunktsatz von Banach für ein Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ erfüllt sind.

2 Punkte

Lösung.

a) Ω ist abgeschlossen und konvex.

b) F_1 ist auf Ω bzgl. x monoton steigend, bzgl. y monoton fallend. Somit folgt:

$$F_1(\Omega) \subseteq [F_1(0,2), F_1(2,0)] = [\frac{1}{8}(e^0 e^- 2 + \ln(1)), \frac{1}{8}(e^2 e^0 + \ln(3))] \subset [0.01692, 1.061]$$

F_2 ist auf Ω bzgl. x monoton steigend, bzgl. y quadratisch mit einem Minimum bei $y = \frac{3}{5}$ und einem Maximum bei $y = 2$. Somit folgt:

$$F_2(\Omega) \subset [F_2(0, \frac{3}{5}), F_2(2,2)] \subset [0, 0.7035]$$

Also ist F eine Selbstabbildung $F : \Omega \to [0, 1.1] \times [0, 0.75] =: \Omega'$

c) Für die Ableitung gilt :

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(e^x e^{-y} + \frac{1}{x+1}) & -\frac{1}{8}e^x e^{-y} \\ \frac{1}{10}(1 + \tan^2(\frac{x}{2})) & \frac{2}{5}(y - \frac{3}{5}) \end{pmatrix}$$

Und somit auf Ω'

$$F'_{\text{max}} = \begin{pmatrix} 0.5005 & 0.3755 \\ 0.1376 & 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ||F'_{\text{max}}||_1 = 0.6381 \text{ bzw. } ||F'_{\text{max}}||_\infty = 0.876$$

Also sind die Vorraussetzungen erfüllt.

Aufgabe 3. (Banachscher Fixpunktsatz)
Belege durch ein Beispiel, dass die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ auf einer Menge M keine oder keine eindeutige Lösung besitzt, falls

a) f keine Selbstabbildung ist

b) f keine Kontraktion ist

c) die Menge M nicht abgeschlossen ist

aber die anderen Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatz jeweils erfüllt sind.

3 Punkte

Lösung.

a) Def. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ und $M = [0, 1]$

1) M ist abgeschlossen

2) f ist keine Selbstabbildung, denn $f(1) = \frac{5}{4} \notin [0, 1]$

3) f ist Kontraktion:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}|x - y| \;\forall\, x, y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Betrachte die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin M \end{aligned}$$

f besitzt in M keinen Fixpunkt.

b) Def. $f(x) = x$ auf $M = [0, 1]$

1) M ist abgeschlossen

2) Es gilt $f(x) = x \in [0, 1] \;\forall x \in [0, 1]$
$\Rightarrow f$ Selbstabbildung

3) F ist keine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |x - y| &\leq L|x - y| \\ &\Leftrightarrow L \geq 1 \end{aligned}$$

Betrachte Fixpunktgleichung

$$f(x) = x \;\Leftrightarrow\; x - x = 0$$

Letzte Gleichung ist für alle $x \in [0, 1]$ erfüllt
$\Rightarrow f$ besitzt unendlich viele Fixpunkte in M.

c) Def. $f(x) = \frac{1}{2}x$ auf $M = (0, 1]$

1) M ist kein abgeschlossenes Intervall

2) f ist Selbstabbildung, denn:
f ist stetig und streng monton wachsend

$$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} f(M) \subseteq [f(0), f(1)] = [0, 1]$$

und für alle $x \in M$ gilt $f(x) \neq 0$

$$\Rightarrow f(M) \subseteq (0,1] = M$$

3) f ist Kontraktion, denn $x, y \in M$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|$$

Betrachte die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} f(x) = x \; &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - x = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \notin M \end{aligned}$$

Somit besitzt f keinen Fixpunkt in M.

Aufgabe 4. (impliziter Funktionensatz)
Es sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^z + yx \\ z\mathrm{e}^{\sin(y)} + 2\pi x \mathrm{e}^{\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, ob durch die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ bei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal eine Funktion $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = f(y)$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(z)$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $F(x,y,z) = 0$ sowohl eine Funktion $y(x)$ als auch $z(y)$ und $x(z)$ existiert.

3.5 Punkte

Lösung.
(a)
F ist stetig und differenzierbar als Verkettung stetiger und differenzierbarer Funktionen. Um die Vorraussetzungen des impliziten Funktionensatzes zu überprüfen, setzen wir zuerst:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} \\ \implies DF(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x,y,z) & \partial_y F_1(x,y,z) & \partial_z F_1(x,y,z) \\ \partial_x F_2(x,y,z) & \partial_y F_2(x,y,z) & \partial_z F_2(x,y,z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} \partial_x F_1(x,y,z) &= y, & \partial_x F_2(x,y,z) &= 2\pi \mathrm{e}^{\cos(y)}, \\ \partial_y F_1(x,y,z) &= x, & \partial_y F_2(x,y,z) &= z\cos(y)\mathrm{e}^{\sin(y)} - 2\pi x \sin(y) \mathrm{e}^{\cos(y)}, \\ \partial_z F_1(x,y,z) &= \mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^z, & \partial_z F_2(x,y,z) &= \mathrm{e}^{\sin(y)}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun ein

$$DF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\pi\mathrm{e} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Auflösung nach x, z betrachten wir die Teildeterminante von DF, wobei die mittlere, zu y gehörende Spalte entfernt wird:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\pi\mathrm{e} & 1 \end{pmatrix} = -2\pi\mathrm{e} \neq 0,$$

somit existiert nach dem impliziten Funktionensatz eine Funktion $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = f(y)$ in einer Umgebung von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Auflösbarkeit nach x, y betrachten wir wieder die entsprechende Teildeterminante

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi\mathrm{e} & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

das heißt hier existiert gemäß des impliziten Funktionensatzes lokal um $(0,0,0)^T$ keine Funktion $f(z) = (x,y)^T$.

(b)
Wir setzen $(x,y,z)^T = (1,\pi/2,1)^T$ in die Funktion ein und erhalten:

$$F(1,\pi/2,1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} + \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{e} + 2\pi \end{pmatrix} =: c \neq 0.$$

Somit ist der Satz von der impliziten Funktion in diesem Fall nicht anwendbar und wir können keine direkte Aussage über die Existenz von Funktionen $y(x)$, $z(y)$ und $x(z)$ machen. Alternativ definieren wir

$$\tilde{F}(x,y,z) = F(x,y,z) - c,$$

und erhalten

$$\tilde{F}(1,\frac{\pi}{2},1) = 0, \quad D\tilde{F} = DF.$$

Damit gilt die erste Vorraussetzung für den impliziten Funktionensatz für $\tilde{F}$ und wir setzen den Punkt $(x,y,z)^T = (1,\pi/2,1)^T$ in die Jacobi-Matrix ein:

$$D\tilde{F}(1,\pi/2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 2e \\ 2\pi & -2\pi & \mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Teildeterminantem

$$\det\begin{pmatrix} \pi/2 & 1 \\ 2\pi & -2\pi \end{pmatrix} = -\pi^2 - 2\pi \neq 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} \pi/2 & 2\mathrm{e} \\ 2\pi & \mathrm{e} \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}\pi\mathrm{e} \neq 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{e} \\ -2\pi & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \mathrm{e} + 4\pi\mathrm{e} \neq 0.$$

Somit existieren nach dem impliziten Funktionensatz Funktionen $f,g,h : U \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad h(z) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Da diese Funktionen von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^2$ abbilden, existieren Komponentenfunktionen

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \end{pmatrix}, \quad h(z) = \begin{pmatrix} h_1(z) \\ h_2(z) \end{pmatrix},$$

und somit gilt $y(x) = f_1(x)$, $z(y) = g_2(y)$ und $x(z) = h_1(z)$.