Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Probeklausur | 17.12.2015, 18.12.2015

Aufgabe 1.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1).$$

4 Punkte

Lösung.

Zu zeigen ist die Aussage $A(n) := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 \overset{!}{=} n(2n+1)$.

(IA): $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^k k^2 = -1 + 4 = 3 = 1 \cdot (2+1) = n(2n+1).$$

1 Punkt

(IV): Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei die Aussage wahr.

0.5 Punkte

(IS): $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 + (-1)^{2n+1}(2n+1)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+2)^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} n(2n+1) + (-1)^{2n+1}(2n+1)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+2)^2 \\
&= n(2n+1) - (2n+1)^2 + (2n+2)^2 \\
&= (-n-1)(2n+1) + (2n+2)^2 \\
&= (-n-1)(2n+2) - (-n-1) + (2n+2)^2 \\
&= (n+1)(2n+2) - (-n-1) \\
&= (n+1)(2n+3) = A(n+1).
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion gilt die Aussage $A(n)$.

2.5 Punkte

Aufgabe 2.

Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n = 1$, ein Polynom ohne reelle Nullstelle. Zeigen Sie, dass es n Paare reeller Zahlen (α_i, β_i), $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$ gibt, sodass

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^2 + \alpha_i x + \beta_i) \qquad \forall x \in \mathbb{C}$$

gilt.

3 Punkte

Lösung.

Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in seine Linearfaktoren $\Rightarrow p(x) = \prod_{i=0}^{2n} (x - x_i)$.

1 Punkt

Da alle Nullstellen x_i komplex sind, treten sie immer als Paare komplexer und komplex konjugierter Zahlen auf.

0.5 Punkte

Demnach gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)(x - \bar{x}_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x^2 - x\bar{x}_i - x x_i + x_i \bar{x}_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x^2 + x(-\bar{x}_i - x_i) + |x_i|^2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x^2 + x(-2\text{Re} x_i) + |x_i|^2). \end{aligned}$$

1 Punkt

Mit $\alpha_i := -2\text{Re} x_i$ und $\beta_i := |x_i|^2$ folgt die Behauptung.

0.5 Punkte

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten folgender Folgen für $n \to \infty$ und begründen Sie ihre Antwort:

a) $a_n := \frac{(2n+x)^4}{xn^4-5n^3+6}$, für $x = 0$ und $x \neq 0$,

b) $b_n := \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n$

2 + 3 Punkte

Lösung.

a) Wir formulieren zunächst die Folgenglieder um:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+x)^4}{xn^4-5n^3+6} = \frac{(2n)^4(1+\frac{x}{2n})^4}{n^4(x-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^4})} \\ &= \frac{16(1+\frac{x}{2n})^4}{(x-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^4})} \end{aligned}$$

0.5 Punkte

Für $x = 0$ divergiert die Folge:

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

0.5 Punkte

Für alle anderen $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{16}{x}$, denn:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{2n}\right)^4 &= 1 \\ \lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^4}\right) &= x \end{aligned}$$

1 Punkt

b) Bringt man den Ausdruck auf die Form

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n = \left(1+\frac{2}{2n-2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n, \end{aligned}$$

1 Punkt

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \end{aligned}$$

2 Punkte

Aufgabe 4.
Begründen oder widerlegen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{(k+1)!}$

1.5 + 2.5 Punkte

Lösung.

a) Durch Anwendung des Wurzelkriteriums auf die Folge $a_k := \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ ergibt sich:

0.5 Punkte

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

0.5 Punkte

Damit absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium.

0.5 Punkte

b) Durch Anwendung des Quotientenkriteriums auf die Folge $a_k := \frac{k^k}{(k+1)!}$ ergibt sich:

0.5 Punkte

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)!}\cdot\frac{(k+1)!}{k^k}\\
&= \frac{1}{k+2}\cdot\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\\
&= \frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\\
&= \underbrace{\frac{k+1}{k+2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\to \mathrm{e}}\\
\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \mathrm{e} > 1
\end{aligned}$$

1.5 Punkte

Damit divergiert die Folge nach dem Quotientenkriterium.

0.5 Punkte

Aufgabe 5.

Ein Läufer läuft insgesamt 2km in 10 Minuten. Zum Zeitpunkt t (in Minuten) hat er die Strecke $s(t)$ (gemessen in km) zurückgelegt. Die Funktion $s : [0, 10] \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Zeigen Sie, dass es immer einen Zeitabschnitt in $[0, 10]$ von 5 Minuten gibt, in dem der Läufer genau 1 km durchläuft.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) = s(t + 5) - s(t) - 1$ auf $[0, 5]$.

4 Punkte

Lösung.

Es ist $s(0) = 0$ (Start) und $s(10) = 2$ (Ziel) laut Aufgabenstellung.
Der Ausdruck $s(t + 5) - s(t)$ gibt an, wie viele km in den 5 Minuten gelaufen werden, die zum Zeitpunkt t beginnen. $f(t)$ beschreibt die Differenz zu dem gesuchten einen km. Wir möchten zeigen, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0, 5)$ hat.

1 Punkt

Für f gilt:

$$f(0) = s(5) - s(0) - 1 = s(5) - 1,$$
$$f(5) = s(10) - s(5) - 1 = 1 - s(5).$$

Insbesondere gilt:

$$f(0) = -f(5).$$

1 Punkt

Fallunterscheidung:

1. Fall:

$$f(0) = f(5) = 0.$$

Der Läufer läuft den ersten UND den zweiten km in genau 5 Minuten. Insbesondere läuft er also den letzten km in genau 5 Minuten.

0.5 Punkte

2. Fall:

$$f(0) \neq f(5).$$

Dann gilt entweder $f(0) < f(5)$ oder $f(0) > f(5)$ und die stetige Funktion f hat damit nach Zwischenwertsatz (bzw. Nullstellensatz von Bolzano), eine Nullstelle t_0 in $(0, 5)$. Das heißt, es gibt ein Intervall $[t_0, t_0 + 5]$ der Länge 5 im Inneren von $(0, 10)$, in dem der Läufer genau einen km durchläuft.

1.5 Punkte