Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 12 | 25.01.2016

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Differenzierbarkeit)

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}.$$

Für welche Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f differenzierbar?

b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+\log(x) \\ x\sqrt{y}+\sqrt{z} \end{pmatrix}$$

an.
Geben Sie die größte offene Menge $U \subset D_f$ an, in der f differenzierbar ist.
Begründen Sie, warum f dort differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung von f.

3 Punkte

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
\partial_x f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\mathrm{e}^{xy} + (x^2+y^2)y\mathrm{e}^{xy} \\
&= (2x + x^2y + y^3)\mathrm{e}^{xy} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
\partial_y f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\mathrm{e}^{xy} + (x^2+y^2)x\mathrm{e}^{xy} \\
&= (2y + x^3 + xy^2)\mathrm{e}^{xy} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Da $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auf $\mathbb{R}^2$ Verkettungen, Additionen und Multiplikationen von stetigen Funktionen darstellen, sind $\partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

$\Rightarrow f$ ist total differenzierbar in ganz $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x,y) &= \big(\partial_x f(x,y), \quad \partial_y f(x,y))\big) \\
&= \big((2x+x^2y+y^3)\mathrm{e}^{xy}, \quad (2y+x^3+xy^2)\mathrm{e}^{xy}\big)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Es ist $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+\ln x \\ x\sqrt{y}+\sqrt{z} \end{pmatrix}$ auf $(0,\infty)\times[0,\infty)^2$ definiert und stetig (da Summe und Produkt stetiger Funktionen). Jedoch ist $[0,\infty)$ nicht offen in $\mathbb{R}$, und damit auch $[0,\infty)^2$ nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

Die größte (offene) Teilmenge von $[0,\infty)$ ist $\mathrm{int}([0,\infty)) = (0,\infty)$, und damit ist $(0,\infty)^2$ ebenfalls offen in $\mathbb{R}^2$. Da auch noch $\mathrm{int}([0,\infty)^2) = (0,\infty)^2$ gilt und das kartesische

Produkt offener Mengen offen ist, ist $(0,\infty)^3 = \mathrm{int}((0,\infty)\times[0,\infty)^2)$ die größte (offene) Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, in der f partiell differenzierbar ist, denn für alle $(x,y,z) \in (0,\infty)^3$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix}, \\
\partial_y f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}, \\
\partial_z f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese sind in $(0,\infty)^3$ stetig, also ist f total differenzierbar auf $(0,\infty)^3$ und es gilt:

$$f'(x,y,z) = (\partial_x f(x,y,z), \partial_y f(x,y,z), \partial_z f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ \sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. (Differenzierbarkeit)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Ist f stetig in $(0,0)$?

(b) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f. Ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$?

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

4 Punkte

Lösung.

(a) Wir beweisen die Stetigkeit in $(0,0)$ mit dem ε-δ-Kriterium. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\|_\infty < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left|\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{3y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| + \left|\frac{3y^3}{y^2}\right| = |y| + 3\,|y| = 4\,|y| \leq 4\|(x,y)\|_\infty < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist f stetig im Nullpunkt.

Alternativer Beweis über das Folgenkriterium:
Um die Stetigkeit von f im Nullpunkt zu zeigen, benutzen wir das Folgenkriterium der Stetigkeit. Sei also $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Nullfolge.

Unterteile die Folge in Teilfolgen für die gilt:

- (x_{n_j}, y_{n_j}) läuft suksessiv alle Folgenglieder von ab, für die $x_{n_j} = y_{n_j} = 0$gilt.
- (x_{n_k}, y_{n_k}) läuft suksessiv alle Folgenglieder von ab, für die $x_{n_k} = 0$, $y_{n_k} \neq 0$ gilt.
- (x_{n_l}, y_{n_l}) läuft suksessiv alle Folgenglieder von ab, für die $x_{n_l} \neq 0$, $y_{n_l} = 0$ gilt.
- (x_{n_m}, y_{n_m}) läuft suksessiv alle Folgenglieder von ab, für die $x_{n_m} \neq 0$, $y_{n_m} \neq 0$ gilt.

Damit sind alle Folgenglieder abgedeckt. Es gilt nun:

- $|f(x_{n_j}, y_{n_j})| = |f(0,0)| = 0$.
- $|f(x_{n_k}, y_{n_k})| = \left|\frac{x_{n_k}^2 y_{n_k} + 3y_{n_k}^3}{x_{n_k}^2 + y_{n_k}^2}\right| \overset{x_{n_k}=0}{=} \left|\frac{3y_{n_k}^3}{y_{n_k}^2}\right| = |3y_{n_k}| \to 0$
- $|f(x_{n_l}, y_{n_l})| = \left|\frac{x_{n_l}^2 y_{n_l} + 3y_{n_l}^3}{x_{n_l}^2 + y_{n_l}^2}\right| \overset{y_{n_l}=0}{=} \left|\frac{0}{x_{n_l}^2}\right| = 0$
- $|f(x_{n_m}, y_{n_m})| = \left|\frac{x_{n_m}^2 y_{n_m} + 3y_{n_m}^3}{x_{n_m}^2 + y_{n_m}^2}\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left|\frac{x_{n_m}^2 y_{n_m}}{x_{n_m}^2 + y_{n_m}^2}\right| + \left|\frac{3y_{n_m}^3}{x_{n_m}^2 + y_{n_m}^2}\right| \leq \left|\frac{x_{n_m}^2 y_{n_m}}{x_{n_m}^2}\right| + \left|\frac{3y_{n_m}^3}{y_{n_m}^2}\right| \to 0$

Zusammen erhalten wir damit

$$f(x_n, y_n) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h. f ist stetig im Nullpunkt.

(b) Mit der Quotientenregel erhält man für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2xy(x^2+y^2) - (x^2y+3y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{(x^2+9y^2)(x^2+y^2) - (x^2y+3y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Zur partiellen Differenzierbarkeit in $(0,0)$: Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+(h,0))-f((0,0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f((h,0))-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^2\cdot 0+3\cdot 0^3}{h^2+0^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

und

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+(0,h))-f((0,0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,h))-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{0^2\cdot+3\cdot h^3}{0^2+h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3}=\lim_{h\to 0}3=3,$$

also ist f in $(0,0)$ sowohl nach x als auch nach y partiell differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}((0,0))=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}((0,0))=3$.

(c) Angenommen, f wäre in $(0,0)$ total differenzierbar. Nach der Definition der totalen Differenzierbarkeit wäre dann

$$Df((0,0))=\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix}$$

und es müsste für alle $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ gelten

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|}=\frac{|f((0,0)+\xi)-f((0,0))-\varphi(\xi)|}{\|\xi\|}=0$$

mit

$$\varphi(\xi)=Df((0,0))\cdot\xi=\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=3\xi_2.$$

Betrachten wir also obige Gleichung:

$$\frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|_2}=\frac{|f((0,0)+\xi)-f((0,0))-\varphi(\xi)|}{\|\xi\|_2}$$
$$=\frac{\frac{\xi_1^2\xi_2+\xi_2^3}{\xi_1^2+\xi_2^2}-3\xi_2}{\|\xi\|_2}=\frac{\frac{\xi_1^2\xi_2+\xi_2^3-3\xi_1^2\xi_2-3\xi_2^3}{\xi_1^2+\xi_2^2}}{\|\xi\|_2}$$
$$=\frac{\frac{\xi_1^2\xi_2+\xi_2^3-3\xi_1^2\xi_2-3\xi_2^3}{\|\xi\|_2^2}}{\|\xi\|_2}=\frac{-2\xi_1^2\xi_2}{\|\xi\|_2^3}.$$

Nun wählen wir $\xi=(\xi_1,\xi_2)=(x,x)$ für $x\neq 0$, $x\to 0$, dann gilt insbesondere auch $\|\xi\|\to 0$ und es folgt

$$\frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|_2}=\left|-\frac{2x^3}{\left\|\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}\right\|}\right|=\left|-\frac{2x^3}{\sqrt{2}^3|x|^3}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir haben also eine Folge gefunden mit

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|}\neq 0,$$

also kann f in $(0,0)$ nicht total differenzierbar sein.

Aufgabe 3. (Differenzieren)

a) Leiten Sie die folgende Funktion nach α, z, S und b_0 ab:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : f(\alpha, z, S, b_0) = (x^2 \sin(\alpha z) + y \cos(S - \alpha) + S\alpha z)e^{-z+\cos(\alpha^2)} - 3(Sx)^2$$
$$x \in \mathbb{R}, y \in \{0, -1, 1\}$$

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $Df = J_f = f'$ von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y) - 3y^2\cos(z^2x) \\ xyz - (xyz)^2 + e^{xy^2z^3} \end{pmatrix}$$

2 Punkte

Lösung.

a) Mit Produkt- und Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, z, S, b_0) &= \mathrm{e}^{-z+\cos\alpha^2} \cdot \Big[(x^2 z\cos(\alpha z) - y\sin(S-\alpha)\cdot(-1) + Sz) \\
&\quad + 2\alpha\left(-\sin\alpha^2\right)\left(x^2\sin(\alpha z) + y\cos(S-\alpha) + S\alpha z\right)\Big] \\
&= \mathrm{e}^{-z+\cos\alpha^2} \cdot \Big[(x^2 z\cos(\alpha z) + y\sin(S-\alpha) + Sz) \\
&\quad - 2\alpha\sin\alpha^2(x^2\sin(\alpha z) + y\cos(S-\alpha) + S\alpha z)\Big] \\
\frac{\partial f}{\partial z}(\alpha, z, S, b_0) &= \mathrm{e}^{-z+\cos\alpha^2} \cdot \Big[\left(\alpha x^2\cos(\alpha z) + S\alpha\right) \\
&\quad + \left(x^2\sin(\alpha z) + y\cos(S-\alpha) + S\alpha z\right)\cdot(-1)\Big] \\
&= \mathrm{e}^{-z+\cos\alpha^2} \cdot \Big[\alpha x^2\cos(\alpha z) + S\alpha(1-z) \\
&\quad - \left(x^2\sin(\alpha z) + y\cos(S-\alpha)\right)\Big] \\
\frac{\partial f}{\partial S}(\alpha, z, S, b_0) &= (-y\sin(S-\alpha) + az)\cdot\mathrm{e}^{-z+\cos\alpha^2} - 6x^2S \\
\frac{\partial f}{\partial b_0}(\alpha, z, S, b_0) &= 0
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
J_f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sin y + 3y^2z^2\sin(z^2x) & 2x\cos y - 6y\cos(z^2x) & 6xy^2z\sin(z^2x) \\ yz - 2xy^2z^2 + y^2z^3e^{xy^2z^3} & xz - 2x^2yz^2 + 2xyz^3e^{xy^2z^3} & xy - 2x^2y^2z + 3xy^2z^2e^{xy^2z^3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (Jacobi-Matrix)

Bestimmen Sie jeweils die Jacobi-Matrix.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-x^2+\sin(z)} \\ \cos(xy) \\ \ln(x^2+y^2+z^2+1) \end{pmatrix}$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(x,y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ x+y \\ \frac{1}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$

1 Punkte

Lösung.

(a):

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2xe^{-x^2+\sin(z)} & 0 & \cos(z)e^{-x^2+\sin(z)} \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) & 0 \\ \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{pmatrix}.$$

(b):

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 1 & 1 \\ -\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$