Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Hausaufgabenübung Blatt 2 | 02.11.2015
Abgabe: 09.11.2015, 11:30 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) := |x|$

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(x) := |x|$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ h(x) := |x|$

Geben Sie Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften an:

d) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

e) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

1 Punkt

Aufgabe 2. (Abbildungen)

a) Seien $p_1(x) = x^2 + 1$ und $p_2(x) = x^3 + 5x - 1$. Bestimmen Sie $f = p_1 \circ p_2$ und $g = p_2 \circ p_1$.

b) Sei $h(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von h, $h \circ p_1$ und $p_1 \circ h$ an.

c) Sei $k_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $k_a(x) = x^4 + ax^4 + 2$ und Parameter $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Wertebereich von k_a in Abhängigkeit von a an.

Hinweis: Der Wertebereich einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge $W_f := f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq B$, also das Bild der Funktion.

1 Punkt

Aufgabe 3. (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Übersetzen Sie Teil (a) zunächst in die Summenschreibweise. Teil (a) heißt auch die "geometrische Summenformel".

1.5 Punkte

Aufgabe 4. (Mengen reeller Zahlen)
Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen. Handelt es sich jeweils um ein Maximum bzw. Minimum?

a) $M_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{z} \text{ für } z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

b) $M_2 = [a, b),\ M_3 = (a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt

c) $\left|\frac{x+3}{2x-5}\right| \geq 3$

d) $|2x| > |5 - 2x|$

e) $\frac{x+4}{x-2} < x$

1.5 Punkte