Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 11 | 18.01.2016

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Integration)

Bestimmen Sie folgendes Integral mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} dx$$

3 Punkte

Lösung.

Es gilt $p(x) = \frac{3x^2+11x+14}{x^3+2x^2-4x-8} := \frac{z(x)}{n(x)}$

Da bereits gilt $\deg(z) \leq \deg(n)$ müssen die Nullstellen des Nenners bestimmt werden. Die erste Nullstelle $x_0 = 2$ wird durch Raten ermittelt. Danach führt man eine Polynomdivision durch.

$$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 2) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Damit steht auch $x_1 = x_2 = -2$ als doppelte Nullstelle fest.

$p(x)$ kann also wie folgt zerlegt werden:

$$p(x) = \frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2}$$

Es gibt zwei verschiedene Wege, die Koeffizienten zu bestimmen.

1. Koeffizientenvergleich

Man bringt zunächst die zerlegte Seite auf den gleichen Nenner

$$\frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{A(x + 2)^2 + B(x + 2)(x - 2) + C(x - 2)}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

Um A, B und C zu bestimmen, werden im Zähler die Koeffizienten vor x^2, x und 1 einzeln verglichen. Es ergeben sich die 3 folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} A + B &= 3 && \text{(Vorfaktor von } x^2\text{)} \\ 4A + C &= 11 && \text{(Vorfaktor von } x\text{)} \\ 4A - 4B - 2C &= 14 && \text{(Vorfaktor von } 1\text{)} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Koeffizienten $A = 3$, $B = 0$ und $C = -1$.

2. Limesverfahren und Einsetzen

Betrachten von

$$\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{3x^2+11x+14}{x^3+2x^2-4x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\right)\mid\cdot(x-2)\right]$$

liefert $A=\frac{3\cdot 2^2+11\cdot 2+14}{(2+2)^2}=3$. Mit dem gleichen Verfahren

$$\lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{3x^2+11x+14}{x^3+2x^2-4x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\right)\mid\cdot(x+2)^2\right]$$

erhält man $C=\frac{3\cdot(-2)^2+11\cdot(-2)+14}{-2-2}=-1$. C wird nun durch einfaches Einsetzen von $x=0$ ermittelt. Es ergibt sich

$$\frac{14}{-8}=\frac{-3}{2}+\frac{B}{2}-\frac{1}{4}$$

und damit $B=0$.

Also ist die Partialbruchzerlegung

$$p(x)=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x+2)^2}$$

Die Stammfunktion folgt dann mit

$$\int\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x+2)^2}dx=3\ln|x-2|+\frac{1}{(x+2)}+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. (Uneigentliche Integrale)
Begründen Sie die Existenz oder Nichtexistenz der folgenden uneigentlichen Integrale

a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$.

b) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

2 Punkte

Lösung.

a) Wir haben

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x},$$

und wissen somit dass $\int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln(\ln x)$ gilt. Für das uneigentliche Integral ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \lim_{a\to\infty} [\ln(\ln x)]_2^a\end{aligned}$$

und da $\lim_{x\to+\infty} \ln \ln x = +\infty$ existiert dieses uneigentliche Integral nicht.

b) Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral und substituieren dafür $t = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ bzw. $\ln t = -\sqrt{x}$. Weiterhin ergibt sich formal

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \\ \Rightarrow \quad dx &= \frac{2 \ln t}{t} dt\end{aligned}$$

und somit berechnen wir

$$\begin{aligned}\int e^{-\sqrt{x}} dx &= \int t \frac{2 \ln t}{t} dt = 2 \int \ln t dt \\ &= 2 \int 1 \cdot \ln t dt = 2\,(t \ln t - t) = -e^{-\sqrt{x}}(2\sqrt{x} + 2),\end{aligned}$$

mittels einmaliger partieller Integration und Rücksubstitution. Nun ist

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx &= \lim_{a\to\infty} \int_1^a e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-\sqrt{x}}(2\sqrt{x}+2)\right]_1^a \\ &= \frac{4}{e} + \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{(2\sqrt{a}+2)}{e^{\sqrt{a}}}\right) = \frac{4}{e} + 0\end{aligned}$$

weil die Exponentialfunktion jedes Polynom dominiert und somit existiert dieses uneigentliche Integral.

Aufgabe 3. (Äquivalenz von Normen)
Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Normen

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n$ $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.

Hinweis: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf $\mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass

$$C_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C_2 \cdot \|x\|_b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

3 Punkte

Lösung.

Es gilt mit $x \in \mathbb{R}^n$, dass $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ und $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.
Gezeigt werden soll: $C_1 \cdot ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq C_2 \cdot ||x||_2$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, aber fest. Die Ungleichung $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i| \cdot |x_j| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n \\ i\neq j}} |x_i| \cdot |x_j| \\
\Leftrightarrow \quad 0 &\leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n \\ i\neq j}} |x_i| \cdot |x_j|.
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, angewandt auf die Vektoren $(1, ..., 1)$ und $(|x_1|, ..., |x_n|)$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |1| \cdot |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{n} \cdot \|x\|_2.
\end{aligned}$$

Beispiel für Gleichheit:

$$x_1 = (1, 0, ..., 0)$$
$$x_2 = (1, ..., 1).$$

Damit ist $C_1 = 1$ und $C_2 = \sqrt{n}$.

Aufgabe 4. (Lineare Abbildungen)
Gegeben seien die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ y + 5x \end{pmatrix}$$

und

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

a) Zeigen Sie die Linearität der Abbildungen φ und ψ.

b) Identifizieren Sie jeweils die zugehörige Matrix.

c) Bilden Sie die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ und geben Sie die Matrix an.

d) Diskutieren Sie die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$.

2 Punkte

Lösung.

a) Für die Linearität muss gelten

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2,\, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \cdot \varphi(x_1,\, y_1) + \beta \cdot \varphi(x_2,\, y_2)$$

bzw.

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2,\, \alpha y_1 + \beta y_2,\, \alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha \cdot \psi(x_1,\, y_1,\, z_1) + \beta \cdot \psi(x_2,\, y_2,\, z_2).$$

Für φ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2,\, \alpha y_1 + \beta y_2) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 - (\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2) \\ 2 \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \\ \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 + 5 \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot (x_1 - y_1) + \beta \cdot (x_2 - y_2) \\ \alpha \cdot (2x_1) + \beta \cdot (2x_2) \\ \alpha \cdot (y_1 + 5x_1) + \beta \cdot (y_2 + 5x_2) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \varphi(x_1,\, y_1) + \beta \cdot \varphi(x_2,\, y_2).
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für ψ

$$\begin{aligned}
&\psi(\alpha x_1 + \beta x_2,\, \alpha y_1 + \beta y_2,\, \alpha z_1 + \beta z_2) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) \\
&= \alpha \cdot (x_1 + y_1 + z_1) + \beta \cdot (x_2 + y_2 + z_2) \\
&= \alpha \cdot \psi(x_1,\, y_1,\, z_1) + \beta \cdot \psi(x_2,\, y_2,\, z_2)
\end{aligned}$$

b) In Matrix-Vektor-Darstellung ist φ gegeben durch

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und ψ analog durch

$$\psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) Die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(x, y) &= x - y + 2x + y + 5x = 8x \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

d) Es ist nicht möglich die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ zu bilden, da der Bildbereich von ψ ($\mathbb{R}$) und der Definitionsbereich von φ ($\mathbb{R}^2$) nicht übereinstimmen und somit inkompatibel sind.