Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 7 | 07.12.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Stetigkeit)

a) Zeigen Sie die Stetigkeit in $x_0 = 0$ der Funktion

$$\begin{aligned} f \ &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) &= x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ für } x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

mittels des Folgenkriteriums für Stetigkeit.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit in $x_0 = 0$ der Funktion

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

mittels der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit.

c) Zeigen Sie die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion

$$h: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

mittels der $\epsilon - \delta$-Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

3.5 Punkte

Lösung.

a)

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x_0 = 0, \quad f(0) = 0$$

Wir betrachten die folgenden Grenzwerte

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \\ &\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \\ \Rightarrow &\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \\ \Rightarrow &\exists \overline{x} \in \mathbb{R} : \left| e^{-\frac{1}{\overline{x}^2}} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

für $x \in (-\overline{x}, \overline{x})$.
Somit gilt für alle Folgen $x_n \to 0$ ab einem Index $N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| x_n \cdot e^{-\frac{1}{x_n^2}} \right| \leq |x_n| \longrightarrow 0$$
$$\Rightarrow f$$

stetig in $x_0 = 0$ mit $f(0) = 0$.

b)

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(0) = 0$$

Für beliebige $\varepsilon > 0$ finde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$$

Für $x \neq 0$ haben wir

$$|g(x) - g(0)| = \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x|$$
$$\text{weil } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \ \forall\, x \neq 0.$$

Deshalb sei $\delta := \varepsilon > 0$:

$$\Rightarrow |x - 0| = |x| \leq \delta$$
$$\Rightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$$

für $|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \ g$ stetig in $x_0 = 0$.

c)

$$h(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$|h(x) - h(y)| = \left| \frac{1}{1 + |x|} - \frac{1}{1 + |y|} \right|$$
$$= \left| \frac{1 + |y| - (1 + |x|)}{\underbrace{(1 + |x)(1 + |y|)}_{\text{Nenner } \geq 1}} \right|$$
$$\leq \big| |y| - |x| \big| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |y - x| = |x - y| < \delta = \varepsilon$$

Mit der Wahl $\delta := \varepsilon$ ist h gleichmäßig stetig, weil x, y beliebig sind und δ nicht von x abhängt.

Aufgabe 2. (Lipschitz-Stetigkeit)

a) Zeigen Sie die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion

$$f\ : [1,10] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

und geben Sie die Lipschitz-Konstante $L > 0$ an.

b) Beweisen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

2 Punkte

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
f : [1,10] \to \mathbb{R}, f(x) &= \frac{3x^2}{x^2+1} \\
|f(x)-f(y)| &\leq \left| \frac{3x^2}{x^2+1} - \frac{3y^2}{y^2+1} \right| \\
&= \left| \frac{3x^2(y^2+1) - 3y^2(x^2+1)}{\underbrace{(x^2+1)(y^2+1)}_{\geq 1}} \right| \\
&\leq \left| 3x^2y^2 + 3x^2 - 3y^2x^2 - 3y^2 \right| \\
&\leq 3\left| x^2 - y^2 \right| = 3|(x-y)(x+y)| \\
&\leq 3\underbrace{|x+y|}_{\leq 10+10 \text{ weil } x,y\in[1,10]} \cdot |x-y| \\
&\leq 60|x-y|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 60 > 0$.

b) Lipschitz-stetig bedeutet, dass

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall\, x, y$$

Für gleichmäßsige Stetigkeit wähle somit $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$.
Dann ist

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Somit folgt aus Lipschitz-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 3. (Stetigkeit)
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig ergänzbar sind:

a) $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

b) $g : \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ an den Stellen x_1 und x_2. Bestimmen Sie zunächst x_1 und x_2.

Hinweis: Benutzen Sie im Teil (a) die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Denken Sie im Teil (b) an Polynomdivision.

2.5 Punkte

Lösung.

a) $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad z_0 = 0$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad e^z - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \frac{z^0}{0!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\ , \text{ für } z \neq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Somit ist f in $z_0 = 0$ stetig ergänzbar mit Wert $f(0) = 1$.

b) $g : \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Polynomdivision: $\left(x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2\right) : (x+2) = (x-1)^2\,(x+1)$

$$\Rightarrow \underbrace{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}_{p(x)} = (x-1)^2\,(x+2)(x+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{p(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1} = (-1-1)(-1+2) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{p(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} (x-1)(x+2) = 0$$

Somit ist g stetig ergänzbar mit Werten $g(x_1) = 0$ und $g(x_2) = -2$.

Aufgabe 4. (Zwischenwertsatz)
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(1) = f(-1)$. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x \in [0, 1]$ gibt mit $f(x) = f(x - 1)$.

2 Punkte

Lösung.
Definiere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(x - 1)$. Nach Voraussetzung ist f stetig. Darüber hinaus ist $x \mapsto x - 1$ stetig und somit ist die Funktion g stetig also Verkettung stetiger Funktionen. Es gilt

$$g(0) = f(0) - f(-1)$$

und wegen $f(1) = f(-1)$ folgt

$$g(1) = f(1) - f(0) = f(-1) - f(0) = -g(0).$$

1. Fall: Angenommen $g(0) = 0$. Dann ist $f(0) = f(-1)$ und die Behauptung gilt mit $x_0 = 0$.

2. Fall: Angenommen $g(0) \neq 0$. Dann gilt entweder

   (i) $g(0) < 0$ und $g(1) = -g(0) > 0$ oder
   (ii) $g(0) > 0$ und $g(1) = -g(0) < 0$.

   Aus (i) folgt mit der Stetigkeit von g und dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in (0, 1)$ existiert mit

   $$g(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = f(x_0 - 1).$$

   Aus (ii) folgt mit der Stetigkeit von $-g$ und dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in (0, 1)$ existiert mit

   $$-g(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = f(x_0 - 1).$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.