Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 1 | 26.10.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Aussagenlogik)

Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, dass das Kontrapositionsgesetz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

für beliebige Aussagen A, B gültig ist.

1 Punkt

Lösung.

Es seien A und B Aussagen. Dann gilt:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	f	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	w

Da in der letzten Spalte nur die Belegung w, also wahr, herauskommt, ist das Kontrapositionsgesetz bewiesen.

Aufgabe 2. (Morgansche Regeln)
Beweisen Sie für zwei beliebige Aussagen A und B die Regeln von de Morgan:

a) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$,

b) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$.

1.5 Punkte

Lösung.

a) Es seien A und B Aussagen. Dann gilt:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
w	f	w	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
w	f	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	w

b) Es seien A und B Aussagen. Dann gilt:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
w	f	w	f	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w	w

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$	$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$
w	f	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	w

Aufgabe 3. (Mengenlehre)
Seien A und B zwei Mengen.

a) Sei $f : X \to Y$ und $A \subset B \subset X$. Zeigen Sie, dass dann $f(A) \subset f(B)$.

b) Zeigen Sie, dass $A \subset B \iff A \cup B = B$.

1.5 Punkte

Lösung.

a) **Zu zeigen:** jedes $y \in f(A)$ ist auch $y \in f(B)$.
Sei $y \in f(A)$ beliebig.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists\, x \in A : f(x) = y \\ &\overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} \exists\, x \in B : f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(B). \end{aligned}$$

Anmerkung:
$f(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in A : f(x) = y\}$
$y \in f(B) \Leftrightarrow \exists x \in B : f(x) = y$

b) Annahme: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
Zwei Richtungen sind zu zeigen:

„$\Rightarrow$“: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
Es gilt: $A \subset B$. **Zu zeigen:** $A \cup B = B$.

„$\subset$“: Sei $x \in A \cup B$ beliebig. **Zu zeigen:** $x \in B$.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \Rightarrow\ & x \in A \subset B \quad \vee \quad x \in B \\ \Rightarrow\ & x \in B \\ \Rightarrow\ & A \cup B \subset B. \end{aligned}$$

„$\supset$“: Sei $x \in B$ beliebig. **Zu zeigen:** $x \in A \cup B$.

$$\begin{aligned} x \in B \Rightarrow\ & x \in A \cup B \\ \Rightarrow\ & B \subset A \cup B. \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: $A \cup B \Rightarrow A \subset B$
Es gilt: $A \cup B = B$. **Zu zeigen:** $A \subset B$.

Sei $x \in A$ beliebig.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B.$$

Also erhalten wir $A \subset B$. □

Der Fall $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ muss ausgeschlossen werden, damit die Wahl $x \in A$ oder $x \in B$ beliebig möglich ist. Für $A = \emptyset$ haben wir

$$\emptyset \subset B \Leftrightarrow \emptyset \cup B = B \rightsquigarrow \textit{immer wahr}$$

Für $B = \emptyset$:

$$A \subset \emptyset \Leftrightarrow A \cup \emptyset = \emptyset \rightsquigarrow \textit{wahr für} A = \emptyset$$

Aufgabe 4. (Mengen)
Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$(B \setminus A) \cup A = A \cup B$$

1 Punkt

Lösung.

'$\subseteq$' sei $x \in (B \setminus A) \cup A \Rightarrow x \in B \setminus A$ oder $x \in A$

1.Fall: $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

2.Fall: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

Insgesamt also: $(B \setminus A) \cup A \subseteq A \cup B$.

'$\supseteq$' sei $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ oder $x \in B$

1.Fall: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus A)$

2.Fall: $x \in B \Rightarrow x \in B$ und ($x \in A$ oder $x \notin A$)

$$\begin{aligned}
&\overset{Distributivgesetz}{\Rightarrow} && (x \in B \text{ und } x \in A) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin A) \\
&\Rightarrow && (x \in B \cap A) \text{ oder } x \in B \setminus A \\
&\Rightarrow && x \in A \text{ oder } x \in B \setminus A \\
&\Rightarrow && x \in (B \setminus A) \cup A
\end{aligned}$$

Insgesamt also $(A \cup B) \subseteq (B \setminus A) \cup A$
Aus den beiden Inklusionen folgt die Gleichheit.
Rein formal muss hier auch noch der Fall der leeren Menge gesondert behandelt werden.