Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

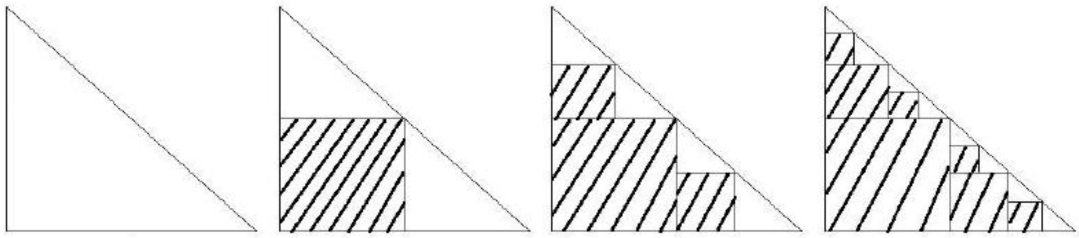
Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 5 | 23.11.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Konvergenz von Reihen)

Wir approximieren ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1 in jedem Schritt durch weitere Hinzunahme von (kleineren) Quadraten, siehe Skizze.



Zeigen Sie, dass die zu den Flächeninhalten der Quadrate gehörende Reihe gegen den Flächeninhalt des Dreiecks konvergiert.

1.5 Punkte

Lösung.

Es gilt für die Reihe der aufsummierten Flächeninhalte der Quadrate:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate konvergiert also gegen den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k + 3^{k-1}}{5^k}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Hinweis zu (b): Bestimmen Sie zunächst $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.5 Punkte

Lösung.
a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k + 3^{k-1}}{5^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k}{5^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{5^k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} i \right)^k - 1 \right) + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^k
\end{aligned}$$

geom. Reihe

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - \frac{2}{5} i} - 1 + \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} \\
&= \frac{1 + \frac{2}{5} i}{1 + \frac{4}{25}} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{25}{29} \left(1 + \frac{2}{5} i \right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{21}{58} + \frac{10}{29} i
\end{aligned}$$

b) Definiere $a_n := \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$
Bestimme a und b:

Es folgt mit Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
1 &= a(2n+1) + b(2n-1) \\
&= (2a + 2b)n + (a - b) \\
\Rightarrow\ & 2a + 2b = 0 \quad \wedge \quad a - b = 1 \\
\Rightarrow\ & a = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad b = -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ & a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]
\end{aligned}$$

Betrachte nun die m-te Partialsumme

$$
\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1}\right] \\
&\underset{i=n-1}{\overset{\text{Indexverschiebung}}{=}} \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2(i+1)-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2i+1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \underbrace{\frac{1}{2m+1}}_{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0}\right] \\
&\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \\
\Rightarrow S_m &\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \\
\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} &\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$,

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$,
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{j=1}^{n} j$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k$,

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2k}}{e^{-k}}$.

4 Punkte

Lösung.

a) Minorantenkriterium:

$$a_k := \frac{1}{k+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}$$

und da $\sum \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch $\sum a_k$ divergent.

b)

$$a_k := \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^2}$$

und da $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$, ist auch $\sum a_k$ nach Majorantenkriterium konvergent. Wegen $|a_k| = a_k$ gilt sogar absolute Konvergenz.

c)

$$a_k := \frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz nach dem Quotientenkriterium.

d)

$$a_k := \left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{3k^2+1} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium.

e)

$$a_k := \frac{e^{-2k}}{e^{-k}} = e^{-2k-(-k)} = e^{-k} = \frac{1}{e^k} \leq \frac{1}{2^k}$$

Da $\sum \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$ (geometrische Reihe), konvergiert $\sum a_k$ nach Majoranten-Kriterium. Da $|a_k| = a_k$ gilt auch die absolute Konvergenz, genau wie auch in (b).

Aufgabe 4. (Additionstheorem)
Zeigen Sie, dass das Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

1 Punkte

Lösung.
Nach Vorlesung gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} + e^{i(-x-y)}}{4} \\
&\quad - \frac{e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} + e^{i(-x-y)}}{4i^2} \\
&\overset{i^2=-1}{=} \frac{2e^{i(x+y)} + 2e^{-i(x+y)}}{4} = \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \\
&= \cos(x+y).
\end{aligned}$$