Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 3 | 09.11.2015

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2.5 Punkte

Lösung.
(IA): n=1:

$$1^3 = \frac{1 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad (\checkmark)$$

(IV): Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei die Aussage wahr.

(IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\ &\overset{(IV)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} + \frac{4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{4} \qquad = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}\end{aligned}$$

und wir rechnen nach dass auch

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$$

gilt.

Aufgabe 2. (Komplexe Zahlen)
Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie Betrag und Argument von z exakt in $(-\pi, \pi]$.

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$$

1.5 Punkte

Lösung.

$$\begin{aligned}(\frac{1-i}{1+i})^5 &= (\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i})^5 \\ &= (\frac{1-2i-1}{2})^5 \\ &= (-i)^5 = -i\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r = 1\,, \quad \phi = -\frac{1}{2}\pi\,.$$

Aufgabe 3.

Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+3i}{z-3i}\right) \geq 0$$

3 Punkte

Lösung.

Sei $z = x + iy, x, y\mathbb{R}$. Dann gilt für $z \neq 3i$

$$\begin{aligned}
\omega := \frac{z+3i}{z-3i} &= \frac{x+iy+3i}{x+iy-3i} = \frac{x+i(y+3)}{x+i(y-3)} \\
&= \frac{(x+i(y+3))(x-i(y-3))}{x^2+(y-3)^2} \\
&= \frac{x^2 - ix(y-3) + ix(y+3) + (y+3)(y-3)}{x^2+(y-3)^2} \\
&= \frac{x^2+(y+3)(y-3)}{x^2+(y-3)^2} + i\frac{-x(y-3)+x(y+3)}{x^2+(y-3)^2} \\
&= \frac{x^2+(y+3)(y-3)}{x^2+(y-3)^2} + i\frac{6x}{x^2+(y-3)^2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Im(\omega) = \frac{6x}{x^2+(y-3)^2}$

Es gilt

$$\begin{aligned}
Im(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow\ & [6x \geq 0 \wedge \overbrace{x^2+(y-3)^2}^{\text{Diese Gleichung ist immer erfüllt}} > 0] \\
& \vee [6x < 0 \wedge \underbrace{x^2+(y-3)^2}_{\text{Diese Gleichung ist nie erfüllt}} < 0] \\
\Leftrightarrow\ & 6x \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq 0
\end{aligned}$$

Also $Im(\frac{z+3i}{z-3i}) \geq 0$
$\forall z \in \{\omega = x + iy \in \mathbb{C}; x \geq 0\}$
(Bemerkung: Für $x = 0$ muss der Fall $y = 3$ ausgeschlossen werden!)

Aufgabe 4. (Einheitswurzeln,Nullstellen)

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen $-12-7i$, $\overline{3+5i}$ und $(1-i)^{10}$, wobei jeweils das Argument in $(-\pi,\pi]$ liegen soll.

b) Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$, für die gilt: $z^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Das Polynom $p(x):=2x^4-4x^3-8x^2-16x-64$ hat die Nullstellen $x=-2$ und $x=4$. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.

3 Punkte

Lösung.

a) Sei $\mathbb{C}\setminus\{0\}\ni z=x+iy,\quad x,y\in\mathbb{R},\quad \varphi=\arg(z),\quad r=|z|,$

$$\begin{aligned} z&=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\\ &=\underbrace{r\cdot\cos\varphi}_{=x}+i\cdot\underbrace{r\cdot\sin\varphi}_{=y},\end{aligned}$$

also

$$\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=\tan\varphi.$$

Um $\varphi\in(-\pi,\pi]$ zu erreichen, berechnen wir dies mit dem arctan :

$$\varphi\;=\;\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & \text{für } x>0,\\ (\arctan\frac{y}{x})+\pi & \text{für } x<0,\ y\geq 0,\\ (\arctan\frac{y}{x})-\pi & \text{für } x<0,\ y<0,\\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } x=0,\ y>0,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x=0,\ y<0\end{cases}$$

oder mit arccos :

$$\varphi\;=\;\begin{cases}\arccos\frac{x}{r} & \text{für } y\geq 0,\\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{für } y<0.\end{cases}$$

Wir berechnen nun die Polarkoordinaten von $z_1=-12-7i$, $z_2=3-5i$ und und zunächst von $\widetilde{z}_3=1-i$:

$$\arg z_1=-\arccos\tfrac{-12}{\sqrt{193}},\qquad \arg z_2=-\arccos\tfrac{3}{\sqrt{34}},\qquad \arg\widetilde{z}_3=-\arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1=\sqrt{193}\cdot e^{i(-\arccos\frac{-12}{\sqrt{193}})},\quad z_2=\sqrt{34}\cdot e^{i(-\arccos\frac{3}{\sqrt{34}})}\quad \widetilde{z}_3=\sqrt{2}\cdot e^{i(-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}})}=\sqrt{2}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})}.$$

Es bleibt, die Polarkoordinatendarstellung von $z_3:=\widetilde{z}_3^{\,10}$ zu bestimmen. Also:

$$\begin{aligned} z_3=\widetilde{z}_3^{\,10}&=\sqrt{2}^{10}(e^{i(-\frac{\pi}{4})})^{10}\\ &=2^5e^{i(-\frac{5\pi}{2})}=32e^{i(-\frac{5\pi}{2}+2\pi)}=32e^{i(-\frac{\pi}{2})}.\end{aligned}$$

b) Allgemeine Bemerkung: Nach der Eulerschen Formel gilt $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ für alle $\phi\in\mathbb{R}$.
Weiter gilt

$$z^n=w=|w|e^{i\alpha}\quad\text{mit } \alpha:=\arg w.$$

Mittels $|z|=\sqrt[n]{|w|}$ erhalten wir durch die Formel von de Moivre

$$z_k:=\sqrt[n]{|w|}\exp\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}i\right)\quad \text{für } k=0,1,\ldots,n-1$$

alle paarweise verschiedenen Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ von $z^n = w$.

Zur Aufgabe:
Es gilt $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $n = 4$. Also $1 = |w|$ und $\alpha = \arg w = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$.
Demnach besteht die Menge $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \}$ aus allen vierten Wurzeln aus $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = z_k = \exp(\frac{\pi}{6}i + \frac{k\pi}{2}i) \quad \text{für ein } k \in \{0, \ldots, 3\} \right\}.$$

c)

$$p(x) \;=\; 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64$$

bekannte Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$

Zunächst: Wir suchen ein Polynom q mit $q(x)(x+2)(x-4) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in seine Linearfaktoren zerfällt, muss diese Darstellung existieren. Weiterhin besitzt q den Grad 2.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64) : (x+2) \;=\; 2x^3 - 8x^2 + 8x - 32 \\
-\underline{(2x^4 + 4x^3)} \\
\quad -8x^3 - 8x^2 \\
\quad -\underline{(-8x^3 - 16x^2)} \\
\qquad 8x^2 - 16x \\
\qquad -\underline{(8x^2 + 16x)} \\
\qquad\quad -32x - 64 \\
\qquad\quad -\underline{(-32x - 64)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 8x^2 + 8x - 32) : (x-4) \;=\; 2x^2 + 8 \\
-\underline{(2x^3 - 8x^2)} \\
\quad 0 \; + 8x - 32 \\
\quad -\underline{(0 \; + 8x - 32)} \\
\qquad 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad q(x) \;=\; 2x^2 + 8$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
q(x) \;=\; 0 &\Leftrightarrow 2x^2 + 8 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \;=\; -8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \;=\; -4 \\
&\Leftrightarrow x \;=\; 2i \quad \vee \quad x \;=\; -2i
\end{aligned}$$

Weitere Nullstellen von p sind also auch: $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$, und noch andere Nullstellen von p kann es nach nicht geben, da p ein Polynom vom Grad 4 ist.