Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Hausaufgabenübung Blatt 6 | 30.11.2015
Abgabe: 07.12.2015, 11:30 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Monotonie der Exponentialfunktion)
Zeigen Sie: Es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

1 Punkt

Aufgabe 2. (Exponentialreihe)

a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz und, dass für alle $n \in N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}.$$

(Zur Erinnerung: $0! := 1$.)

b) Zeige durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes und direktes Umformen, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m}\right)$$

und folgere daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

c) Zeige, dass aus (a) und (b) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

3 Punkte

Aufgabe 3. (Grenzwerte von Funktionen)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte. Vergessen Sie nicht Ihre Aussagen zu begründen.

(a) (i) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x-1}{2x-2}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}$.

(b) (iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$.

(iv) Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{falls } x \neq 3, \\ 0, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$.

Welche Aussage können Sie nun über die Existenz von $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ treffen?

4 Punkte

Aufgabe 4. (Grenzwerte von Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(\frac{1}{n}) = 1$ und $f(-\frac{1}{n}) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

2 Punkte