Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Hausaufgabenübung Blatt 13 | 01.02.2016
Abgabe: 09.02.2016, 11:30 Uhr,

(Rogowski → rechte Treppe → Treppenhaus 2.Stock → blauer Abgabekasten)

Hinweise zur Abgabe :

- Die Hausaufgaben sind in **Dreiergruppen** abzugeben.
- Geben Sie auf Ihren Abgaben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der Kleingruppe**, der Sie sich zugeordnet haben, an.
- In Ihrem Interesse: **Tackern** Sie Ihre Abgaben. Lose Zettel können schnell verloren gehen - für den Verlust loser Zettel haften wir nicht!

Aufgabe 1. (Richtungsableitung)

Sei die Funktion $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

1.5 Punkte

Aufgabe 2. (Fixpunktsatz von Banach)

Gegeben sei

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(e^x e^{-y} + \ln(x+1)) \\ \frac{1}{5}(\tan(\frac{x}{2}) + (y - \frac{3}{5})^2) \end{pmatrix}$$

definiert auf dem Raum $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$.
Zeigen Sie, dass die Vorraussetzungen für den Fixpunktsatz von Banach erfüllt sind.

2 Punkte

Aufgabe 3. (Banachscher Fixpunktsatz)

Belege durch ein Beispiel, dass die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ auf einer Menge M keine oder keine eindeutige Lösung besitzt, falls

a) f keine Selbstabbildung ist

b) f keine Kontraktion ist

c) die Menge M nicht abgeschlossen ist

aber die anderen Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatz jeweils erfüllt sind.

3 Punkte

Aufgabe 4. (impliziter Funktionensatz)
Es sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^z + yx \\ z\mathrm{e}^{\sin(y)} + 2\pi x\mathrm{e}^{\cos(y)} \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, ob durch die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ bei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal eine Funktion $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = f(y)$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(z)$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $F(x,y,z) = 0$ sowohl eine Funktion $y(x)$ als auch $z(y)$ und $x(z)$ existiert.

3.5 Punkte