Analysis - Ausarbeitungen

Die reellen Zahlen können durch die Axiome definiert werden:

A) Körperaxiome ("Rechenregeln") (Relationen zwischen Zahlen)

(Summe und Produkt eindeutig)

(A1)	$x+y = y+x$	Kommutativität	$\oplus$
(A2)	$(x+y)+z = x+(y+z)$	Assoziativität	
(A3)	$x+0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	neutrales Element (0)	
(A4)	$x+(-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$	inverses Element (-x)	
(A5)	$x \cdot y = y \cdot x$	Kommutativität	$\odot$
(A6)	$(x \cdot y) z = x \cdot (y \cdot z)$	Assoziativität	
(A7)	$x \cdot 1 = x$	neutrales Element (1)	
(A8)	$x \cdot x^{-1} = 1$	inverses Element (x^{-1})	
(A9)	$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivität	

zu (A3): 0 ist eindeutig:

$0 + x = x \quad | x = \bar{0}$ (Bel.)
$0 + \bar{0} = \bar{0} \quad | A1$
$\bar{0} + 0 = \bar{0}$

$\bar{0} + x = x \quad | x = 0$ (Bel.)
$\bar{0} + 0 = 0$

$\Downarrow$

$0 = \bar{0}$

einfach $0+x=x$ und $\bar{0}+x=x$ nehmen, für x die jeweils andere Null einsetzen und vergleichen.

zu (A4): $-x$ ist eindeutig:

w Gegenelement zu x, also $x+w=0$

Ann: $x+w'=0$
$x+w=0$ (ch)

$$\underline{w'} = w'+0 = w' + (x+w) \underset{A9}{=} \underbrace{(w'+x)}_{0 \text{ aus Annahme}} + w = 0 + w = \underline{w}$$

einfach zu w' (das "zweite" Gegenelement zu x) $0 = x+w$ addieren und umklammern - fertig.

B) Anordnungs-Axiome $<$

B1) $x<y,\ y<z \Rightarrow x<z$ Transitivität

B2) $x<y \Rightarrow x+z < y+z$ Monotonie der Addition

B3) $x<y \Rightarrow a\cdot x < a\cdot y$ Monotonie der Multiplikation
$(a>0)$

$A \Rightarrow B$: „A ist hinreichend für B"

$A \Leftrightarrow B$: A genau dann, wenn B

LEMMA 1.1

(1) $1>0$

(2) $x<y \Leftrightarrow -x > -y$ Umdrehen d. Zeichens bei Vorzeichenwechsel

(3) $x<y \Rightarrow ax > ay$ " " " " über Multipl.
$a<0$

(4) $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

(5) $\underset{x>0}{x} > \underset{y>0}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ " " " bei $\frac{1}{x}$

(6) $x>y \Rightarrow x+w > y+z$
$w>z$

zu (5):

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$$ Bew: $\cdot x \cdot y$

Beweise: (2): (B2) $\mid -x-y$

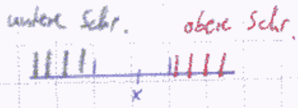
(3): 1.) $\cdot(-a)$, da $(-a)>0$.
2.) (2)
3.) $-(-x)=x$ qed

(4) a) $\frac{1}{x} \neq 0$, da $\frac{1}{x}\cdot x = 1$
b) $\frac{1}{x} \not< 0$, da $\frac{1}{x}\cdot x \not< 0\cdot x$
$1 \not< 0$ $\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$.

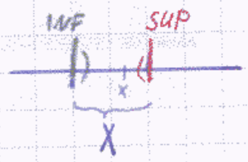
(5) $\frac{1}{xy}\cdot x > y\cdot\frac{1}{xy}$ | (4) $\Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$

(6) 1) $x+w > y+w$
2) $y+w > y+z$

beides gilt nach B2, zusammen wegen B1



Def 1.1: Schranke: jedes $x \leq / \geq$ obere / untere Schranke



Def 1.2: SUP / INF:

in einer bel. kleinen ε-Umgebung um INF / SUP findet man immer mind. 1 Element aus X.

ausserdem ist jede andere Schranke größer / kleiner als SUP / INF.

614
S 3

C) Vollständigkeitsaxiom

Def 1.3 a) $\sup\limits_{\inf} A \in A \Rightarrow a = \max\limits_{\min} A$

das Supremum / Infimum heißt Maximum / Minimum, wenn es in A enthalten ist.

| Es gibt immer eine kleinste obere Schranke, wenn A beschränkt ist und nicht leer ist. (logisch).

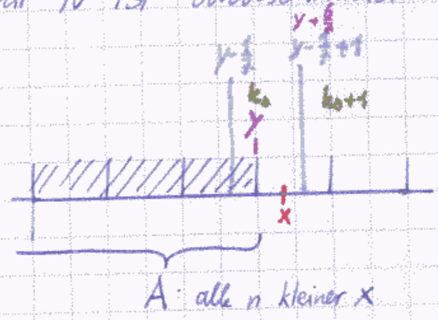
es kann aber sein, daß dieses sup aus $\mathbb{R}$ ist, z.B.:

$$\sup \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

615
S 3

Satz 1.1 es gilt zu jeder reellen Zahl eine größere natürliche Zahl.
(„Archimedisches Prinzip") ($\mathbb{N}$ ist unbeschränkt nach oben)

Beweis: für $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt:



1.) y = kleinste obere Schranke !

$\Rightarrow$ 2.) $y - \frac{1}{2}$ = keine obere Schranke

$\Rightarrow$ 3.) k_0 ex. mit $k_0 > y - \frac{1}{2}$

$y + \frac{6}{7} > y \Rightarrow$ liegt nicht in A.

$k_0 + 1 > y \Rightarrow k_0 + 1 \notin A \Rightarrow \underline{k_0 + 1 > x}$

(5)

zu (A7): 1 ist eindeutig.

neutrales Element,

Beweis wie A4: $1' = 1' \cdot 1$, $1 = 1 \cdot 1'$ A5

$x \cdot 0 = 0$

Bew: $0 = -(x \cdot z) + (x \cdot z)$ | $\boxed{A3: \ 0 + z = z}$

$0 = -(x \cdot z) + (x \cdot (0 + z))$ | A9: ausklammern

$0 = -(x \cdot z) + x \cdot 0 + x \cdot z$ | A1

$0 = -(x \cdot z) + x \cdot z + x \cdot 0$ | A4: $-x + x = 0$

$0 = 0 + x \cdot 0$ | A3: $0 + z = z$

$0 = x \cdot 0$

$(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, $(-1) \cdot y = -y$

Trick: $\boxed{A4}$: $x - x = 0$ | $0 \cdot y = 0$ $\boxed{A7}$

$(x - x) \cdot y = 0$

$x \cdot y + \underline{(-x) y} = 0$ $\boxed{A4}$: $x \cdot y + \underline{(-(x \cdot y))} = 0$

äquivalent.

zu (A8): w eindeutig: $w \cdot x = w' \cdot x$ $(w \cdot x - w' \cdot x = 0)$

Trick: 1.) ausklammern $(w - w') x = 0$

2.) $\cdot w \Rightarrow w \cdot x = 1$ $(w - w') = 0$

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x$ oder y 0.

Einfach das einsetzen:

$ax = b$ eindeutig lösbar: mit $x = \frac{1}{a} b$

$ax = a\left(\frac{1}{a} b\right) = 1 \cdot b = b$

eindeutig, da $ax' = ax$ $| \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow$ qed.

$-(-x) = x$, da $x + (-x) = 0$

Gegenelement: $-(-x)$

$(-1)(-1) = 1$ [da $(-x)(-y) = (-1)(x)(-1)(y) = (-1)(-1) x y$]

Analysis - Zusammenfassung Buch

Kapitel 2: Folgen reeller Zahlen

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$: jeder nat. Zahl wird genau eine reelle zugeordnet.

$f(n) := a_n \quad {}_{n=1,2,3,\dots}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: alle Glieder der Folge: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\infty$

Menge muß unendlich sein, kann aber abzählbar sein: (z.B. $\mathbb{N} \cup \{0\}$)

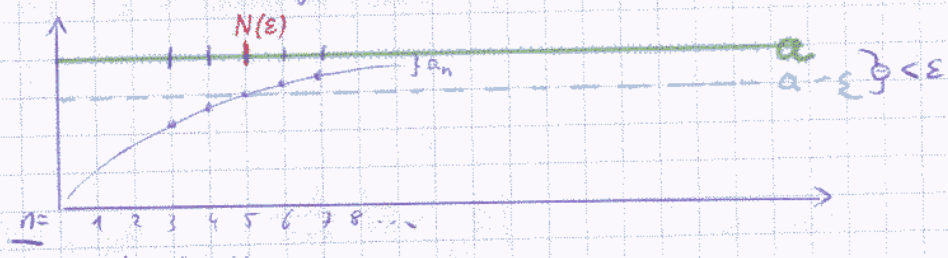
Bildungsgesetz a_n : beschreibt, wie die ~~Grammatik~~ Folge gebildet wird.

4.: rekursive Definition: $a_{n+1} := \quad \dots a_n \dots$

- Menge der Zahlenwerte $\{\dots\}$: alle Zielwerte.

Definition 2.2 Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt $=$ Ziel-Zahlenwerte beschränkt.
(nach oben oder unten oder beides.)

Definition 2.3 Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent:



ab nach rechts

für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt: $a - (a - a_n) < \varepsilon$

Ab einem bestimmten n, (welches für jede ε-Umgebung existiert), ist jedes Element a_n immer näher am Grenzwert a als $a - \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \qquad a_n \to a,\ n \to \infty$

weitere Eigenschaften:

$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

1) $x > 0 \overset{B3}{\Rightarrow} x \cdot x > x \cdot 0$

2) $x < 0 \overset{\text{Lem 1.1/3}}{\Rightarrow} x \cdot x > x \cdot 0$

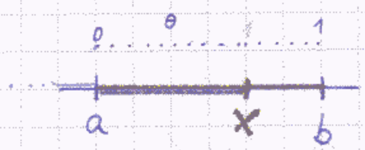
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow$ alle $x_i = 0$

sei mind. ein $x_i > 0$, z.B. x_1, dann ist

können alle 0 sein, muss aber nicht

$$\underbrace{x_1^2 + (x_2^2 + \ldots + x_n^2)}_{\text{ist also } > 0\text{, Vorr. war aber } = 0.} > (x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geq 0 \quad ↯$$

G10 S **Zwischenpunkt**



$$\theta = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{bzw.} \quad x = a + \theta \cdot (b-a)$$

Bew: $\theta > 0$ da $\frac{x-a}{b-a} > 0 \leftarrow x-a > 0$; da $\frac{1}{b-a} > 0 \leftarrow b-a > 0$

$\theta < 1$ da $\frac{x-a}{b-a} < 1$ da $x-a < b-a \leftarrow x < b$

$\Rightarrow 0 < \theta < 1$

G11 p ungerade $\Rightarrow p^2$ ungerade sei $k, k' \in \mathbb{N}$

$$p = \underbrace{2k+1}_{\text{Def. für ungerade Zahl}} \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{k'} + 1 = \underbrace{2k'+1}_{\text{ungerade.}}$$

also einfach $p = 2k+1$ quadrieren $\Rightarrow$ zu $2k'+1$ umformen.

$x^2 = 2 \quad x \in \mathbb{Q}$ gibt es nicht!

$x \in \mathbb{Q}$ heißt $x = \frac{p}{q}$, wobei $\frac{p}{q}$ schon fertig gekürzt ist (p und q also teilerfremd sind).

$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ gerade (s.o.) | setze $p = 2h$ (da p ja gerade), $h \in \mathbb{N}$

$(2h)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2h^2 \Rightarrow q$ gerade (s.o.)

p und q besitzen also den Teiler 2, sind nicht teilerfremd. ↯

Satz 2.1

(a) Der Grenzwert einer Folge ist <u>eindeutig</u> bestimmt.

(b) Folge konvergent $\Rightarrow$ Folge beschränkt.

Beweis:

zu a) Gäbe es 2 Grenzwerte a und a', so hieße das ja, es jeweils einen Index $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$, ab dem alle Werte jeweils in der Grenzwertumgebung liegen. Ab dem Maximum von $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$ müssen dann alle Werte in beiden Umgebungen liegen.

[Wir haben beide ε-Umgebungen gleich groß]

Der Betrag des Abstands zwischen a und a' ist nun nie größer als die Summe der Beträge von a nach a_n und von a' nach a_n (siehe Grafik).

(diese Summe)
Dieser muß aber kleiner sein als $2\cdot\varepsilon$, weil a_n ja in <u>beiden</u> Umgebungen gleichzeitig drin liegt.

da dies aber für <u>jedes</u> $\varepsilon > 0$ gelten muß, <u>muß</u> zwangsläufig $a = a'$ sein. ϟ

$$a \neq a'$$

$\varepsilon > 0$: $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$ existieren mit:

Index! Index!

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{für } n > N_1(\varepsilon)$$

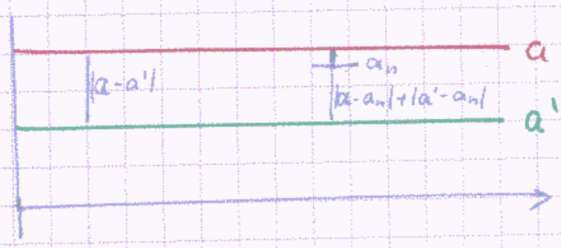
$$|a' - a_n| < \varepsilon \quad \text{für } n > N_2(\varepsilon)$$

$$n \geq N := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$$

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq \underbrace{|a - a_n| + |a' - a_n|}_{< 2\varepsilon}$$

$$|a - a'| < 2\varepsilon \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow a = a' \quad ϟ$$



G 16
S 4

Satz 1.2

(1) $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt.

(2) $0 \leq x < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ $\Rightarrow$ $x = 0$

(3) $x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $x \leq \frac{p}{q} \leq y$ (Dichtigkeit von $\mathbb{Q}$)

Definition 2.4: Häufungspunkt einer Folge ("HP")

Ein Punkt einer Folge heißt Häufungspunkt, ~~einer Folge~~
wenn jede (beliebig kleine) Umgebung um diesen Punkt
unendlich viele Glieder der Folge (!!) enthält.

⇒ jeder Grenzwert ist HP.

⇒ nicht jeder HP muß unbedingt GW sein.

Beispiel: $a_n := (-1)^n$:

1 und -1 sind HP.

aber: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$

Definition 2.5: Teilfolge

Folge: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

wenn man nun nicht alle indexe n nimmt (trotzdem unendlich viele), heißt die Folge Teilfolge. $(\subseteq \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$

Aus den "n", die nachher drin sein sollen, machen wir wieder eine Folge: $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Den $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ wird also jeweils eine nat. Zahl zugeordnet (mon. wachsend!!); dies sind die n-Indexe, die wir nehmen. Also heißt unsere Teilfolge eigentlich:

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

Beispiel / (zu 2.1):

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ denn für alle Indexe n (schon ab dem ersten) ist der Wert minus 1 gleich Null.

$$|a_n - 1| = 0 < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N(\varepsilon) \geq 1$$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$: denn dann muß $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \overset{!}{<} \varepsilon$ sein, also (Umformung): $| \cdot n : \varepsilon$

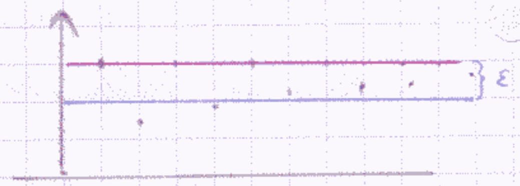
Betrag kann wegfallen, da n pos. und somit $\frac{1}{n}$ immer > 0.

wird größer $\to 10 \geq \frac{1}{0{,}1} \leftarrow$ wird kleiner

$$\underline{n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Index, ~~ab~~ dem alle Glieder in der ε-Umgebung liegen.

ab $n > \frac{1}{\varepsilon}$ liegen also alle Glieder in der kleiner werdenden ε-Umgebung.



Nehmen wir eine noch „strengere" (also weiter rechts) Grenze liegen auf jeden Fall auch alle drin:

$$\underbrace{N(\varepsilon)}_{\text{Index, ab dem } n \text{ auf jeden Fall (jetzt sogar „doppelt") drin ist. „sicher"}} \geq 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

für alle n größer $2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ $\left(n > 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right)$ gilt dann: | Kehrwert

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \underset{\text{trivial}}{<} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{1}{n} < \varepsilon}} \text{ für alle } n > N(\varepsilon)$$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ $\quad a_{2k} = \frac{k}{k+1} \quad a_{2k-1} = 1 \quad 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots$

a) $\underbrace{|a_{2k} - 1|}_{\text{um auf die Null-Linie zu kommen.}} = \left|\frac{k}{k+1} - 1\right| = \frac{1}{k+1} < \varepsilon$ für $\underset{\text{Index}}{k}\, (\geq \underset{\text{Index, ab dem der Wert kleiner ist als } \varepsilon}{K(\varepsilon)}) > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Umformung

b) $|a_{2k-1} - 1| = 0$

Fall a) ist kleiner als ε für alle k ab $\overbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1}^{\text{wird größer für kleine } \varepsilon}$.
Fall b) ist eh immer $1 - 1 = 0$.
} Also betrachten wir Fall a):

2k heißt ja nur "gerade Zahl", unser Index ist ja n. Also:

$$2K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$$

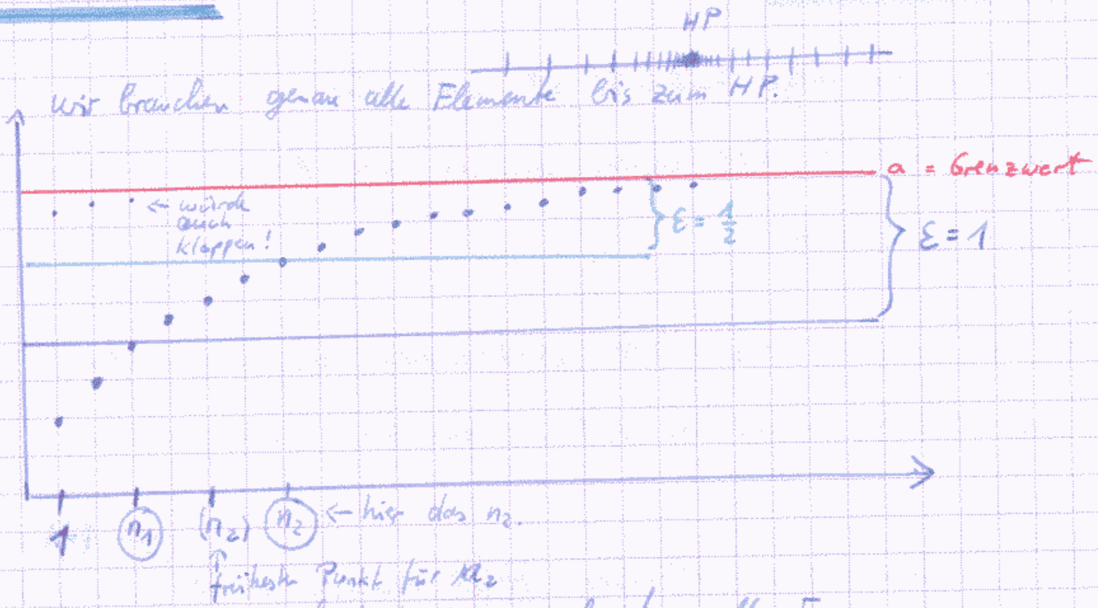
$$n \geq 2K(\varepsilon) \Rightarrow |a_{2k} - 1| < \varepsilon$$

$$\underline{n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon}$$

$\Rightarrow$ später nötig (für rekursive Folgen): Konvergenzkriterien.

S16
G42

Beweis zu Satz 2.4:



- Nach 1 gibt es mit Sicherheit ein n_1, ~~ab dem alle E~~ dessen Wert in der ε-Umgebung „1" ist.
- Nach n_1 gibt es auch sicherlich wieder einen n_2, dessen Wert in der ε-Umgebung „$\frac{1}{2}$" ist.

(Klar, denn da wir einen HP haben, müssen sich unsere Werte dem ja erstmal annähern.)

zwischen diesem n_1 und n_2 fügen wir jetzt nochmal ein N ein, sodaß also n_1 und n_2 mind. den Abstand 2 haben.

[Das ganze klappt natürlich auch, wenn die Werte direkt nah an a anfangen; dann sind sie ja erst recht in den entsprechenden Umgebungen.]

⇒ Auf diese Weise erhalten wir die Teilfolge

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{mit} \quad \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\text{Abstand des Wertes zum GW}} < \frac{1}{k}$$

diese Folge wird nur näher an a, entfernt sich nicht mehr.

Yeah, damit haben wir die gesuchte Teilfolge! :-) *G*

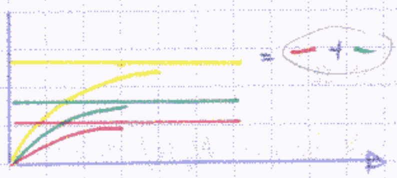
$\{\cdot\cdot\}$: FOLGE ! ...

a = Grenzwert von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
b = " von $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

S.16 **Satz 2.2**

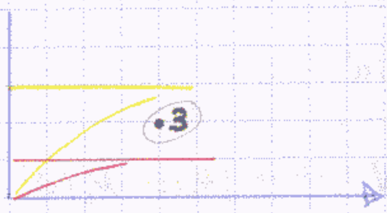
(vorher): Der Grenzwert einer Folge ändert sich nicht, wenn man „später startet" (also Glied 1 an Stelle 10, 2 an 11 setzt usw.):

$b_n := a_{n+k_0} \Rightarrow$ GW von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ identisch.

(1) 

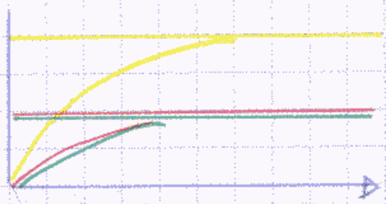
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b}$$

Addiert man 2 Folgen (wie immer komponentenweise), addieren sich die Grenzwerte.

(2) 

$$\boxed{\lim \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a}$$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Streckt man eine Folge, streckt man den Grenzwert entsprechend.

(3) 

$$\boxed{\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b}$$

Multipliziert man 2 Folgen (wieder komponentenweise), multipliziert man die Grenzwerte.

(4) $$\lim \boxed{\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}}$$

Nimmt man von einer Folge den Kehrwert, muß man auch vom Grenzwert den " nehmen.

(5) $$\boxed{\lim |a_n| = |a|}$$

Bew: $\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|$ Dreiecksungleichung.

Nimmt man den Betrag einer Folge, bekommt auch der Grenzwert den Betrag.

(6) $$\boxed{a_n \le b_n \text{ (ab best. } N) \Rightarrow a < b}$$

Wenn ab einem gewissen N alle (!!!) Glieder von a_n kleiner sind als die von b_n, ist auch der Grenzwert von a_n kleiner als der von b_n.

Satz 2.5: Bolzano-Weierstraß für Folgen

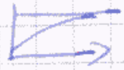
Folge beschränkt $\Rightarrow$ HP vorhanden. (Grund: Menge der Elemente muß ja unendlich sein.)

(irgendwo müssen die ganzen unendl. vielen Elemente ja bleiben.)

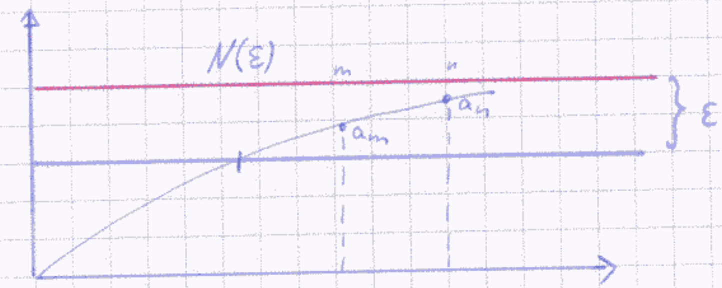
Satz 2.6: "

Folge - mon. wachsend
- nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Folge konvergent. (")

lim = sup


klar.

Satz 2.7: Konvergenzkriterium von Cauchy



ab $N(\varepsilon)$ gilt für alle a_m, a_n: $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Folge ist konvergent

DEF: ↑ Folge monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}$

↓ Folge monoton fallend $\Leftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1}$

641
S16

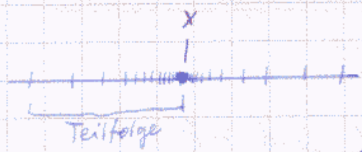
Satz 2.3

Folge konvergiert gegen a $\Leftrightarrow$ jede Teilfolge konvergiert gegen a. zu BEW.

Satz 2.4

Ein Punkt a ist genau dann HP einer Folge,
wenn er Grenzwert einer Teilfolge ist.

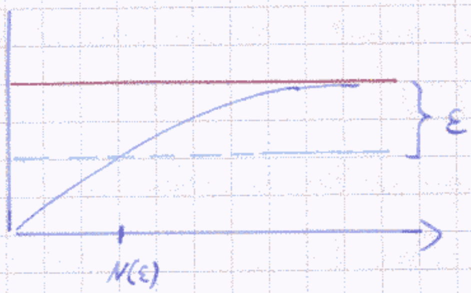
Erläuterung:



In einer Teilfolge sind ja auch unendlich viele Glieder enthalten. Wenn wir nun die Teilfolge nehmen, in der alle Glieder über x abgeschnitten sind, haben wir
- eine unendlich (große) Folge (weil HP)
- den Grenzwert x.

zu BEW.

Beweis zu Satz 2.3:



$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: Originalfolge mit allen Elementen. $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

Die Werte von k (also n_k) sind nun die Indexe der Folge a. Wir haben also nicht mehr alle.

|
k

|
n_k

($k \to n_k$ ordnet jedem k eine nat. Zahl zu, wobei k und n_k aufsteigend ist.
$k =$ 1 2 3 4 5 6 7 8
$n_k =$ 1 2 5 6 40 41 44 80)

In Worten:

Der GW der Folge ist ja a, d.h. ab $N(\varepsilon)$ ist der Abstand zu a kleiner als ε. Das gilt auch für die Teilfolge a_{n_k}. Da $n_k > k$ ist, gilt das erst recht, wenn k sogar auch $> N(\varepsilon)$ ist.

! $\Rightarrow$ Das ist jetzt der Witz:
n_k ist ja immer größer k.

Wenn also $k > N(\varepsilon)$ ist erst recht $n_k > N(\varepsilon)$.

also gilt auch für alle $k \geq N(\varepsilon)$:

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_{n_k} = a$$

AFI - Buch S. 22 ff

Kapitel 3: Reelle Funktionen

Def 3.1 D: Definitionsbereich, W: Wertebereich — ordnet jedem D (El. aus) genau ein W (El. aus) zu.

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Abbildung: jedem x max 1. y zugeordnet (= Funktion)

Def 3.2 $f(A)$ Bild: alle y, auf die ein x verweist. $x \mapsto y$

$f^{-1}(B)$ Urbild: alle x, die auf ein y verweisen. $x \mapsto y$

$f|_E$ Restriktion: Teil E von D.

surjektiv: $f(D) = W$ (ganzer Bildbereich wird genutzt (mind. 1x)

injektiv: monoton. (max. 1x)

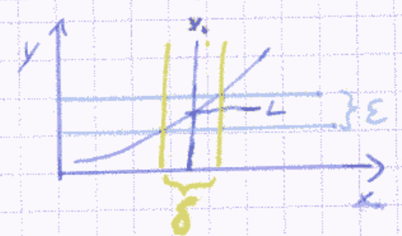
$\Rightarrow$ Umkehrabb. vorhanden.

Stetigkeit = Graph hat keinen Sprung.

Diff'bar = Graph hat auch keinen Knick.

Monoton = Graph steigt / fällt nur.

Def 3.3 ε-δ-Umgebung:



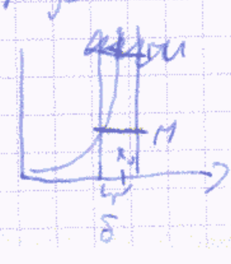
(1) alle x innerhalb von δ (um x_0) haben einen Wert innerhalb von ε (um L).

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$: ~~Egal wie klein wir δ wählen, der Grenzwert ist immer größer als ein~~

~~Zu jedem bel. groß gewählten GW gibt es immer ein δ, in dem x_0 liegt~~

Zu jedem $M > 0$ (Wert) ex. eine δ-Umgebung um x_0, sodass jeder Wert dieser δ-Umgebung größer als dieses M ist.

(M größer $\rightarrow$ δ-Umgebung kleiner.)



Beweis zu Satz 2.5

also, wenn die Folge beschränkt ist, wir aber (wie immer) unendlich viele Punkte haben, müssen die ganzen Punkte ja irgendwo bleiben.

a) Wenn nur endlich viele Werte vorkommen, muß mindestens einer der Werte unendlich oft vorkommen. Dieser ist dann HP der Folge.

(! Wir beachten: beim HP einer Folge müssen nicht unendlich nah über oder unter dem ~~Wert~~ Werte liegen, es reicht, wenn unendlich viele Nachbarwerte gleich sind, (also in der bel. kleinen ε-Umgebung unendl. viele Elemente der Folge drin sind – das ist hier gegeben; sogar für $\varepsilon = 0$.)

b) Wenn unendlich viele Werte vorkommen, liegen eben rund um den HP in jeder bel. kleinen Umgebung unendlich viele Elemente.

Beweis zu Satz 2.6

$$1$$
$$\binom{0}{0}$$

$$1 \qquad 1$$
$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$1 \qquad 2 \qquad 1$$
$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1$$
$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$
$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$
$$\binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5}$$

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$
$$\binom{6}{1} \qquad \binom{6}{2} \qquad \binom{6}{3} \qquad \binom{6}{4} \qquad \binom{6}{5} \qquad \binom{6}{6} \qquad \binom{6}{7}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}^{3\text{-mal}}}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$a = e^{\log a}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^n \cdot y^{n-k}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= 1 \cdot x^4 y^0 \\ &+ 4 \cdot x^3 y^1 \\ &+ 6 \cdot x^2 y^2 \\ &+ 4 \cdot x^1 y^3 \\ &+ 1 \cdot x^0 y^4\end{aligned}$$

ANALYSIS 1

Kapitel 1: Reelle Zahlen

A) Körperaxiome:

A1 Kommutativität: $x+y=y+x$ (Summanden vertauschbar)
A2 Assoziativität: $(x+y)+z=x+(y+z)$ (Klammern beim Addieren erlaubt)
A3 Existenz der 0 (neutrales Element)
A4 Inverses $(-x)$

A5 Komm. •
A6 Assoz. •
A7 Existenz der 1 (neutrales Element)
A8 Inverses $(\frac{1}{x})$

A9 Distributivität $x(y+z) + xy + xz$

B) Anordnungsaxiome: $<$ steht für $\boxed{<}, \boxed{=}$ oder $\boxed{>}$.

B1 $x<y,\ y<z \Rightarrow x<z$ Transitivität
B2 $x<y \Rightarrow x+z<y+z$ Monotonie der Add.
B3 $\underset{a>0}{x<y} \Rightarrow a\cdot x < a\cdot y$ Monotonie der Mult.

Man darf also bei einer (Un-) Gleichung beliebig dazuaddieren oder -multiplizieren; wenn man auf beiden Seiten dasselbe macht, ändert sich nichts.

Lemma 1.1:

(1) $1>0$ ✓
(2) $x<y \Rightarrow -x>-y$ ✓
(3) $\underset{a<0}{x<y} \Rightarrow ax>ay$
(4) $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0$
(5) $x>y, x>0, y>0 \Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

alles trivial.

Satz 1.4: Vollständige Induktion

$P(1)$ richtig, $P(n+1)$ richtig $\rightarrow$ P(jedes n) richtig

Satz 1.5: Bernoullische Ungleichung

$x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$

Def. 1.5: Binomialkoeffizient $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$ $\boxed{\binom{n}{0} = 1}$ $\boxed{0! = 1}$

~~Satz 1.6~~: Binomische Formel:

$$(1) \quad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

$$(2) \quad \boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

Satz 1.7: Geometrische Summenformel

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Def. 1.6: Intervalle $[a, b)$

a enthalten, b nicht enthalten.

Def. 1.7: ε-Umgebung $B_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Def. 1.8:

$A \cup B$ Vereinigungs-Menge
$A \cap B$ Schnitt - " -
$\complement A$ Komplement von A (alles außer A)
$A \times B$ kartesisches Produkt (geordnete Paare)

Satz 1.8: Bolzano-Weierstraß für Mengen:

Menge unendl. + beschränkt $\Rightarrow$ HP existiert.

Lemma 1.8: A kompakt $\Leftrightarrow$ jede <u>unendliche</u> Teilmenge von A besitzt HP. (bezügl.

Lemma 1.9: A kompakt $\Rightarrow$ sup A und inf A sind in A.

Definition 1.14: komplexe Zahlen: $\underset{\text{Realteil}}{x} + \underset{\text{Imaginärteil}}{y}\,i$ ($x + yi$)

Satz 1.9 Darstellung im x-y-System $\Rightarrow$
Betrag $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\overline{z} = (x - yi)$

Lemma 1.10: (1) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\overline{\overline{z}} = z$

(2) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$z = (x, 0) \Rightarrow z = \overline{z}$

(3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (i

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(4) Polar-Darstellung:

$z = r \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi)$

$z^n = r^n \cdot$ "

Definition 1.1: obere / untere Schranke (einer Menge) = kein Element größer / kleiner

Definition 1.2: Supremum = kleinste obere Schranke
Infimum = größte untere Schranke

C) Vollständigkeitsaxiom:

Menge (nicht leer) (nach oben) beschränkt $\Rightarrow$ Supremum existiert. (in $\mathbb{R}$ ja, in $\mathbb{Q}$ nein!!)

Definition 1.3: Maximum = Supremum ist Teil der Menge!
Minimum = Infimum " " " " !

Satz 1.1: („Archimedisches Prinzip"):
Es gibt zu jeder reellen Zahl eine größere natürliche.

Satz 1.2: (1) $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt. klar.
(2) wenn x zwischen 0 und $\frac{1}{n}$ liegt, ist $x = 0$. klar.
(3) Zwischen 2 reellen Zahlen liegt immer eine rationale.

Lemma 1.2 $a = \sup A \Leftrightarrow$ in jeder ε-Umgebung um a liegt wieder ein x.

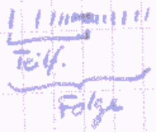
Lemma 1.3: (1) Betrag
(2) Dreiecksungleichung:

$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|}$$

Satz 1.3: $\mathbb{N}$ charakterisieren:
(1) 1 ist drin.
(2) $x+1$ ist drin
(3) es gibt keine Teilmenge mit (1) und (2).

Satz 2.3: Folge konvergiert gg. a ⇒ jede Teilfolge auch

Satz 2.4: a GW einer Teilfolge ⇔ a HP der Folge.

(merke:  einfach alles über HP abschneiden ⇒ Teilfolge)

Satz 2.5: Bolzano-Weierstraß für Folgen:

Folge beschränkt ⇒ HP vorhanden.

(logisch; irgendwo müssen die ∞ vielen Elemente ja hin)

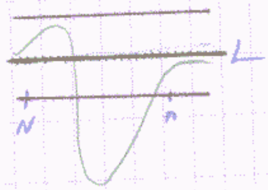
Satz 2.6. $\left.\begin{array}{l}\text{Folge mon. wachsend} \\ \text{" nach oben beschränkt}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Folge konvergent. (muss ja)

Satz 2.7: CAUCHY-Konvergenzkriterium:

Ab einem $N(\varepsilon)$ liegt die <u>Differenz</u> zweier <u>beliebiger</u> Elemente in der ε-Umgebung

⇒ Folge ist konvergent.

Df. 2.[illegible]: limes superior $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = L$:=



ab einem Index N (abhängig von ε)

sind alle Werte <u>unter</u> $L+\varepsilon$,

ab einem weiteren n sind dann alle Werte echt

im „ε-Schlauch."

limes inferior $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = L$:= andersrum.

Satz 2.8: ...

Lemma 1.4: Mengen-Beziehungen (siehe Skript S. 8)
- endlich / unendlich
- abzählbar

Def. 1.9: Innerer Punkt := kein Randpunkt $\mathring{A}$
(Def. mit ε-Umgebung: um x gibt's ε-Umgebung, die in A liegt.)

Def. 1.10: offnene Menge := $\mathring{A} = A$ (nur innere Punkte)

Lemma 1.5: $\bigcap_{i=1}^{n}$ offene Mengen (endlich viele) ist offen.

$\bigcup$ offene Mengen (bel. viele) " ".

Def. 1.11: Häufungspunkt A' := beliebig nah ist noch ein anderer Punkt.

Def. 1.12: abgeschlossene Hülle $\bar{A}$:= $A \cup A'$
($\mathbb{Q}$ ist nicht abgeschlossen!) ($\bar{\mathbb{Q}}$ ist $\mathbb{R}$!)

Lemma 1.6: offen u. abgeschlossen kein Widerspruch! Aber:

$$\boxed{A \text{ offen} \Leftrightarrow \complement A \text{ abgeschlossen}}$$

kein Randpunkt   inkl. HP

Lemma 1.7: $\bigcap_{i=1}^{n}$ abgeschlossene Mengen ist abgeschlossen

$\bigcup$ abgeschlossene Mengen ist abgeschlossen.

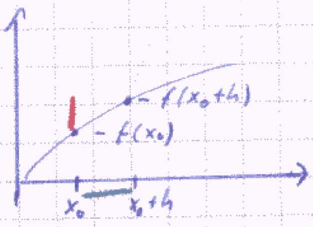
Def. 1.13: kompakte Menge := abgeschlossen + beschränkt

Kapitel 4 - Differentiation

Def 4.1:

Differenzenquotient $\underbrace{\frac{\Delta_h f(x_0)}{h}}_{}$:= $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

„das Δ der $f(x_0)$"



differenzierbar: $\lim_{h\to 0}$ " existiert.

$$= f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

einseitige Ableitung: $f'_+(x_0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}$

---

f in x_0 diffbar $\Leftrightarrow$ Abl. von links und rechts gleich

---

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

h jeweils 1 runter wegen $\cdot \frac{1}{h}$

$$\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 \cdot \cancel{x^4 h^0} + \\ 4 \cdot x^3 h^1 + \\ 6 \cdot x^2 h^2 + \\ 4 \cdot x^1 h^3 + \\ 1 \cdot x^0 h^4 \end{bmatrix} - x^4 \right] = \begin{bmatrix} 4 \cdot x^3 h^0 \\ + 6 \cdot x^2 h^1 \\ + 4 \cdot x^1 h^2 \\ + 1 \cdot x^0 h^3 \end{bmatrix} = 4 \cdot x^3$$

wenn h gegen 0 läuft, fallen diese Faktoren weg:

Weg: zeige, daß aus $f(x) = x^n$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ folgt:

1.) Differenzenquotienten aufstellen

2.) Pascalsche Formel anwenden: $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n h^{n-k}$

3.) $-x^4$ und $\cdot\frac{1}{h}$ einrechnen: $\frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^n h^{n-k-1}$

Kapitel 2: Folgen reeller Zahlen

Def. 2.1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ← "Index" des Folgegliedes.
↑
Folgeglied

Def. 2.2: Folge „beschränkt" := Folgenwerte gehen nicht über/unter bestimmten Wert.

Def. 2.3: Folge „konvergiert" gegen a :=
ab einem N liegen alle Folgeglieder in einer
hängt von ε ab!
bel. kleinen ε-Umgebung.

Satz 2.1: (a) Grenzwert einer Folge ist eindeutig.
(b) Folge konvergent $\Rightarrow$ Folge beschränkt.

Satz 2.2: (1) Grenzwert addierter Folgen = addierte Grenzwerte.
(2) Folge $\cdot \alpha$ $\Rightarrow$ GW $\cdot \alpha$
(3) Grenzwert multipl. Folgen = multipl. Grenzwerte
(4) " der Kehrwertfolge = Kehrwert d. GW
(5) " der Betragsfolge = Betrag " "
(6) jedes Glied n der Folge a kleiner als das der Folge b
$\Rightarrow$ GW(a) < GW(b)

Def. 2.4: Häufungspunkt einer Folge :=
jede (noch so kleine) ε-Umgebung von x enthält unendlich viele weitere Glieder der Folge.

Def. 2.5: Teilfolge := $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z.B. $k = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$

$\underbrace{1\ 2\ 4\ 5\ 10\ 11}$

→ unsere neuen Indexe

unsere neuen Indexe sind die Folgeglieder der k-Folge

Ableitungsregeln:

$\log x \rightarrow \frac{1}{x}$

$e^x \rightarrow e^x$

Summanden werden einzeln abgeleitet!

$f'(\text{Zahl}) = 0$

$f'(3x) = 3$

$f'(\alpha \cdot x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$

$f \cdot g = f'g + fg'$

$\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$f(g) = f'(g) \cdot g'$

z.B.: $f(x) a^x = (e^{\log a})^x = e^{\log a \cdot x}$

$f'(x) = \log a \cdot e^{\log a \cdot x} = \log a \cdot a^x$

$(a^x)' = \log a \cdot a^x$

$\cancel{f(x) = a^x = (e^{\log a})^x = e^{\log}}$

$f(x) = x^\alpha = e^{\log x \cdot \alpha}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \alpha \cdot e^{\log x \cdot \alpha} = \frac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

Satz 2.9: (1) Menge A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ GW liegt in der Menge.

(2) kompakt $\Leftrightarrow$ <u>jede</u> Folge aus A hat eine Teilfolge, deren GW in A liegt.

Def.: 2.7

Satz 4.8. L'Hopital 1696

f, g diffbar. (2) oder ∞ (3) auch nach unten.

(i) $g(x)$ und $g'(x)$ über Null, $x \in [a, x_0)$

(ii) $\lim f, g = 0$ oder $\lim g = \pm\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Def 4.4 / 4.5

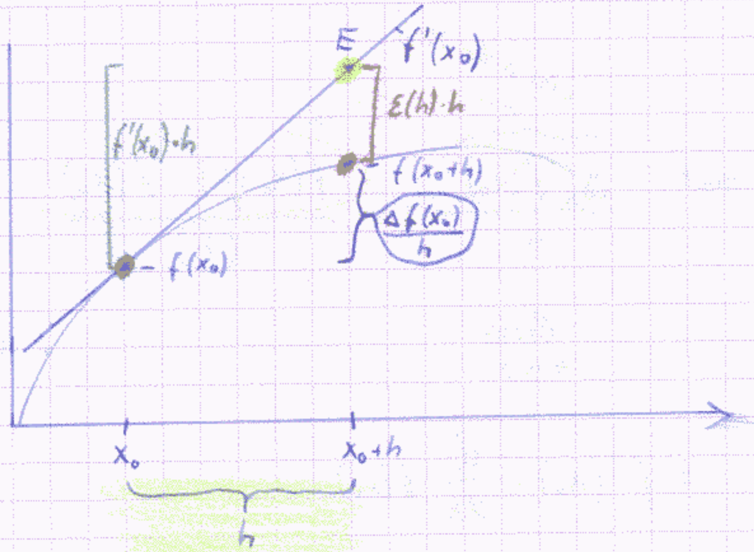
$C[a,b]$ = alle stetigen Funktionen auf $[a,b]$

$C^n[a,b] = \{f, f', \dots, f^n\}$

zu Satz 4.8:

Ist eine Funktion (g) ab einem a immer über 0 und steigend, so ist – für x gg. ∞ – der Quotient aus einer Funktion f, (die diffbar sein muß!) und dieser Funktion gleich dem Quotienten der Ableitungen aus beiden.

Lemma 4.1 "Zerlegungsformel"



Wenn man am Punkt $f(x_0)$ der Steigungstangente von $f(x_0)$ folgt, gelangt man an der Stelle (x_0+h) zu einem Punkt E. der Abstand von E zu dem Funktionswert an dieser Stelle wird mit $\varepsilon(h)\cdot h$ bezeichnet:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h$$

Genau dann, wenn eine solche Funktion $\varepsilon(h)$ existiert, gibt es eine Ableitung in x_0 (logisch.)

Def. 4.2

f diff'bar in $\overbrace{(a,b)}^{\text{alle außer die Randpunkte}}$ $\Leftrightarrow$ in jedem Punkt diff'bar zwischen a und b

" " " $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ in den Randpunkten jeweils zusätzlich die einseitige Ableitung.

Satz 4.1 diffbar $\rightarrow$ stetig. (1) in Punkt
(2) in Intervall.

Taylor: Satz 4.1 Def. 4.6

Polynom: $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \boxed{x^\nu}$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \left((x - x_0) + (x_0)\right)^\nu \qquad \text{„Pascal-Dreieck-Formel"}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (x-x_0)^\mu (x_0)^{\nu-\mu} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{a_\nu \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} (x-x_0)^\mu (x_0)^{\nu-\mu} \right\}}_{b_\nu} \cdot (x-x_0)^\nu \cdot \cancel{(x_0)^{\nu-\nu}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot (x-x_0)^\nu$$

$x = x_0 \Rightarrow \quad f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot \overset{\swarrow \text{ ist nur bei } \nu=0 \text{ Eins, sonst Null}}{0^\nu} = b_0 = f(x_0) = \dfrac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$ } passt so später ins Schema

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot (x-x_0)^\nu$$

$$f'(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot \nu \cdot (x-x_0)^{\nu-1}$$

$$f''(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot (x-x_0)^{\nu-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot (\nu-2) \cdot (x-x_0)^{\nu-3}$$

$$\vdots$$

$$\underline{f^{(k)}(x)} = \sum_{\nu=k}^{n} b_\nu \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot \ldots \cdot (\nu-k+1) \cdot (x-x_0)^{\nu-k}$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n} b_\nu \cdot \frac{\nu!}{k!} \, (x-x_0)^{\nu-k} \qquad \Big| \; x = x_0$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n} b_\nu \cdot \frac{\nu!}{k!} \cdot \overbrace{0^{\nu-k}}^{\text{nur 1 bei } \nu=k!} = \underline{b_k \cdot \frac{k!}{k!}} = b_k$$

(2) $\Rightarrow b_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \dfrac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x-x_0)^\nu$

Restglied: geht gg. 0 für $n \to \infty$ $\left\{ + \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right.$

Satz 4.3 Ableitung der Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

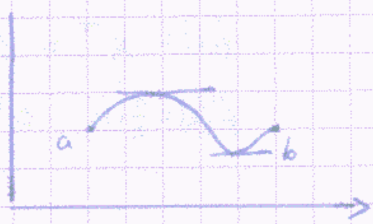
die Ableitung der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Ableitung

Def. 4.3: lokales Maximum: in einer Umgebung höchster Punkt
globales " insgesamt "

Satz 4.4: Steigung im Maximum/Minimum = 0. (logisch).

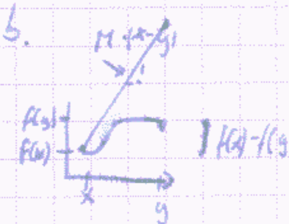
Satz 4.5: (Satz von Rolle:)

f <u>stetig</u> und <u>diff'bar</u> zwischen a und b
$\Rightarrow$ es gibt einen Wert zwischen a und b mit $f' = 0$.
(logisch.)



Satz 4.6: (Mittelwertsatz)

f diffbar: zwischen a und b ex. (mind.) 1 Punkt mit der gleichen Steigung wie die Verbindungsgerade zwischen a und b.

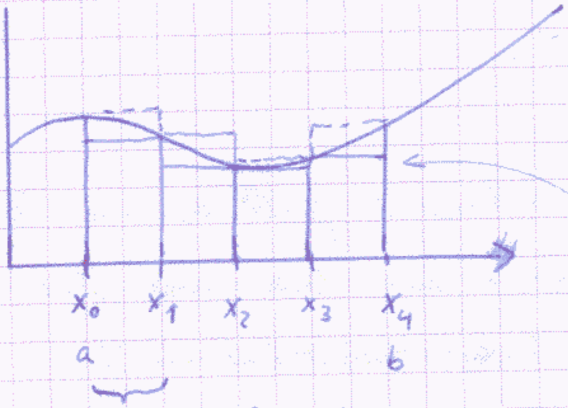


Folgerung 4.1: $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$ Lipschitz! (logisch!)
M: größte Steigung zwischen a und b

Satz 4.7:
$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton wachsend
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng " "
$f'(x) = 0 \Rightarrow f$ const.

Kapitel 5: Riemannsches Integral

Def. 5.1: Zerlegung



h = Maschenweite

kleiner: "Verfeinerung"

Def. 5.2: Riemannsche Ober-/Untersumme $S(T)$, $s(T)$

Riemannsche Zwischensumme
(wenn man einen beliebigen Punkt im Intervall auswählt, auf dessen Höhe man den Balken setzt)

Lemma 5.1: (1) eine feinere Obersumme ist immer kleiner als die gröbere.
eine " Untersumme " " größer " " ".
(2) die Untersumme ist immer kleiner als die Obersumme.

Def. 5.3: $\underline{\int} f\,dx = \sup_T s(T)$

das untere Riemannsche Integral ist die größtmögliche Untersumme (wohl bei der feinsten Einteilung also.)

$\Downarrow$

Lemma 5.2:

$$\lim_{h\to 0} s(T) = \underline{\int_a^b} dx$$

Def. 5.4: Riemann-Integrierbar = egal welche Zwischenpunkte ich wähle: der Grenzwert bei $h \to 0$ läuft immer gegen $\int$.
(Unterschied $< \varepsilon \Rightarrow h < \delta(\varepsilon)$, das gilt's zu jedem $\varepsilon > 0$.)

Def. 4.6 (Taylor) , Satz 4.9

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu} + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Abschätzung eines Polynoms.

also: $f(x) = \frac{f(x_0)}{1}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2 \cdot 1} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2 \cdot 1}(x-x_0)^3 + \dots$

bzw. $f(x) = \frac{(x-x_0)^0}{1} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$

Satz 5.4

$\checkmark$ = Riemann-Integrierbar

(1) Linearität: $f, g \checkmark \Rightarrow \alpha \cdot f \checkmark, \quad f+g \checkmark$ klar

$$\int \alpha f = \alpha \int f \quad , \quad \int (f+g) = \int f + \int g$$

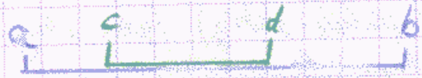
(2) Monotonie: $f(x) < g(x) \Rightarrow \int f < \int g$ "Ungleichungen darf man integrieren"

(3) $f \checkmark \Rightarrow |f| \checkmark \qquad \left|\int f\right| \leq \int |f|$

(4) $f, g \checkmark \Rightarrow f \cdot g \checkmark$

Satz 5.5

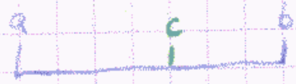
(1)



f auf $[a,b]$ Riemann-Integrierbar

$\Rightarrow$ f auf $[c,d]$ Riemann-Integrierbar

(2)



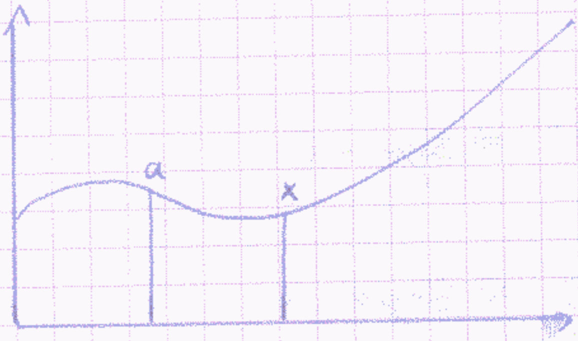
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Def. 5.5: $b > a$!!!

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad \left[:= \int_b^a -f \right]$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

(2)



$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)\,du$$

der Flächeninhalt bis x ist der Flächeninhalt bis a +
der " zwischen a und x. (hier das Integral.)

Satz 5.9: Partielle Integration

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Satz 5.10: Taylorformel mit Integralrestglied

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\,dt$$

(???)

Satz 5.11: Integration durch Substitution

$$\int u(v) = \frac{1}{v'} \cdot U(v) \qquad \left[\text{da } U(v) = u(v) \cdot v'\right]$$

Def. 5.7: Sinus arcsin = Bogenmaß ("Länge" des Einheitskreisabschnitts)

$$\Theta(y) = \arcsin(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$ (y zwischen -1 und 1)

(aber von y aus gemessen!!!)

ordnet jedem y das Bogenmaß zu.

Satz 5.1

$\underbrace{f \in R[a,b]}_{\text{alle Riemann-Integrierbaren Funktionen}}$: unabhängig vom der Wahl der Zwischenpunkte

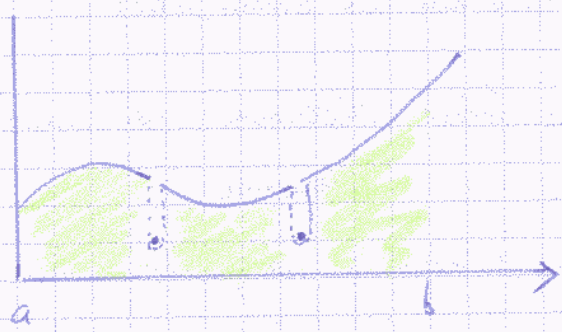
$\Longleftrightarrow$ zu jedem noch so kleinen ε gibt es eine Zerlegung, bei der die Differenz aus Ober- und Untersumme kleiner ε ist.
("Riemannsches Integrabilitätskriterium")

$$0 \leq S(T_\varepsilon) - s(T_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$\Longleftrightarrow$ die Grenzwerte von oben und unten sind gleich.

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Lemma 5.3



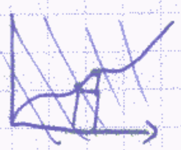
auch wenn einzelne Punkte „ausbrechen", bleibt das Riemannsche Integral gleich.

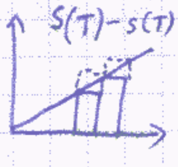
Satz 5.2 MONOTONE Funktionen sind Riemann-Integrierbar. (1)

Satz 5.3: STETIGE Funktionen sind Riemann-Integrierbar.

$$f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$$

f stetig + D kompakt $\Rightarrow f$ glm. stetig.



(1) 

$S(T)-s(T)$: nur 1. und letztes Glied bleibt stehen!

für $h < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$: h genügend klein $\Rightarrow$ kleiner ε.

Def 5.10

$$\sin_1 x = 2 \sin_0 \frac{x}{2} \cdot \cos_0 \frac{x}{2}$$

$$\cos_1 x = \cos_0^2 \frac{x}{2} - \sin_0^2 \frac{x}{2} \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

! $\sin_1 x$ Fortsetzung von $\sin_0 x$!

Satz 5.12

(1) $\sin x, \cos x$ stetig / $\in C[\pi, \pi]$

$\sin' x = \cos x$ | $-\sin x = \sin(-x)$

$\cos' x = -\sin x$ | $-\cos x = \cos(-x)$

FORMELN!

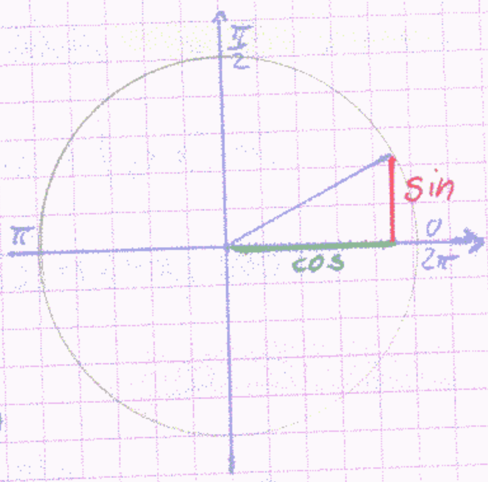
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

trivial: (2) $\sin(-\pi) = \sin \pi = 0$

$\sin'(-\pi) = \sin'(\pi) = -1$

$\cos(-\pi) = \cos \pi = 1$

$\cos'(-\pi) = \cos'(\pi) = 0$



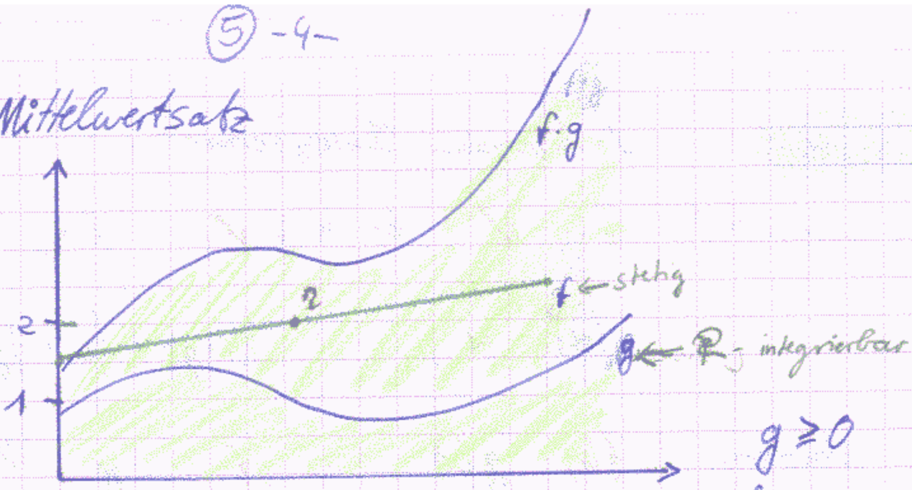
Def. 5.11 TRV

aneinanderreihen (sin verlängern)

$\sin x = \sin(x - k \cdot 2\pi)$

$\cos x = \cos(x - k \cdot 2\pi)$

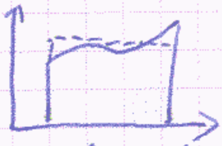
Satz 5.6 Mittelwertsatz



$g \geq 0$

$\int g > 0$

$$\int f \cdot g = f(\eta) \int g$$



für $f = 1$

Fläche durch Kasten ersetzbar.

Die Fläche unter $f \cdot g$ =

Die Fläche unter g · einem bestimmten η aus f.

Beweis: stetige Fkt. auf Kompaktum hat Max. + Min.

Satz 5.7: 1. Fundamentalsatz

unbestimmte Integrale!

f ✓ $\Rightarrow$

(1) $\int f$ stetig (sogar Lipschitz-stetig) (glm. stetig mit L-Konstante)

(2) f in x_0 stetig $\Rightarrow$ F in x_0 diff'bar.

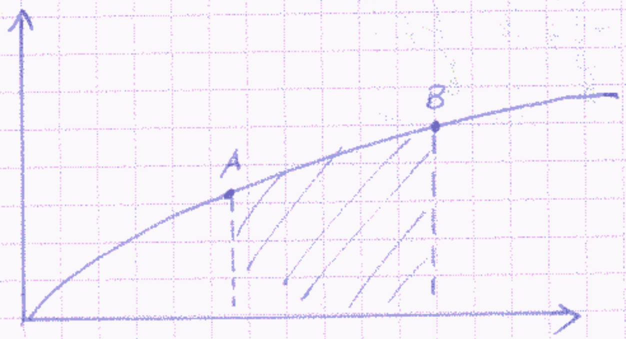
($\int' = id$)

(3) " (zweiseitig)

Def. 5.6 STAMMFUNKTION: $G' = g$

! Konstante !

Satz 5.8: 2. Fundamentalsatz



(1) $\int f(x)\, dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$

Kapitel 6: Folgen und Reihen

Def. 6.1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ REIHE

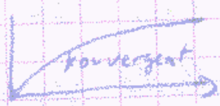
$\sum_{k=1}^{n} a_k$ n-te PARTIALSUMME

Def. 6.2: $s=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent: Summe läuft gg. einen Wert s

$(\lim_{n\to\infty} s_n = s)$

SUMME der Reihe.

nicht konvergent = divergent



Def. 6.3: absolut konvergent: auch Summe der Absolutbeträge konvergiert.

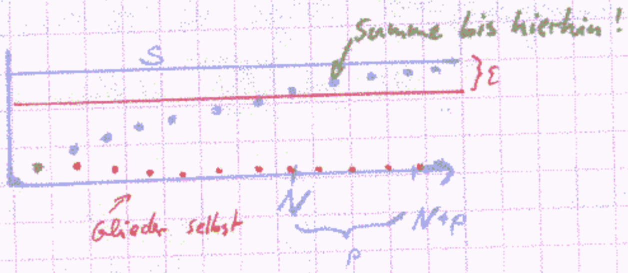
bedingt konvergent: ~~nicht absolut~~ konvergent.

Satz 6.1: $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergent:

$\Rightarrow \sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ auch konvergent. (klar.)

Satz 6.2:

aufsummierte Glieder !!! →



konvergent $\Leftrightarrow$ zu jeder ε-Umgebung um den Grenzwert gibt es ein N, ab dem beliebige Summen der Folgeglieder immer ~~kleiner ε~~ sind.

größer Grenzwert $\pm\varepsilon$

Lemma 5.4

(1) $\boxed{\begin{matrix}\Theta(y) < 0 \\ -1 < y < 0\end{matrix}}$ $y < 0 \Rightarrow$ Bogen < 0

$\boxed{\Theta(0) = 0}$ $y = 0 \Rightarrow$ Bogen $= 0$

$\boxed{\begin{matrix}\Theta(y) > 0 \\ 0 < y < 1\end{matrix}}$ $y > 0 \Rightarrow$ Bogen > 0

$$\boxed{\begin{matrix}\Theta'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-y^2)}} > 0 \\ y \in (-1, 1)\end{matrix}}$$ klar.

Def 5.8
(trivial)

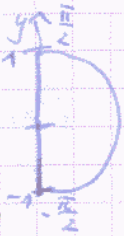
$$\lim_{y \uparrow 1} \Theta(y) = \frac{\pi}{2}$$

klar: bei $y = 1$ ist der Bogen bei $\frac{\pi}{2}$.

Def 5.9
($\sin_0 x$ ist praktisch unser sinus.)

Umkehrfunktion von $\arcsin y$: $[-1,1]$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $(y \to \Theta)$

$(\Theta \to y)$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $[1,1]$



$\underline{\sin_0 x}$

$\cos_0 x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$

Lemma 5.5

(1) $\sin_0 x$ streng mon. wachsend, stetig auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $|\sin_0 x| \le 1$ ✓

(2) $\sin_0' x = \cos_0 x$ $\cos_0' x = -\sin_0 x$

$\sin_0 0 = 0$ $\cos_0 0 = 1$ ✓

(3) $\sin_0 2x = 2 \sin x \cdot \cos_0 x$ $\cos_0 2x = \cos_0^2 x - \sin_0^2 x$

$x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

SINUSSÄTZE

Satz 6.6: Wurzelkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

also "ganz großes Folgeglied" (geht gg. → 0)

diese Wurzel $\sqrt[\infty]{a_\infty}$

$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ ⇒ (1) $\rho < 1$ ⇒ $\sum |a_k|$ konvergent

(2) $\rho > 1$ ⇒ $\sum a_k$ divergent

"$\sqrt[\infty]{a_\infty}$" (3) $\rho = 1$ ⇒ ??? (k. Aussage)

Wenn die unendlichste Wurzel aus dem unendlichsten Glied

- kleiner 1 ist, ist die Folge konvergent.
- größer 1 ist, ist die Folge divergent.

(da Wurzelziehen aus kleinen Zahlen große hervorbringt – es sei denn, sie geht wirklich „schnell" gg. 0)

Satz 6.7: Quotientenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\left[\begin{array}{l} R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ r = \underline{\lim} \ \ldots \end{array} \right]$

muß ja „immer" gelten, da also → 0! :-)

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ⇒ $\sum |a_k|$ konvergent.

bedeutet: "$|a_{n+1} < a_n|$"

$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ⇒ " divergent.

$\frac{\text{unendlichstes Glied} + 1}{\text{unendlichstes Glied}} < 1$ ⇒ konvergent.

für alle!!

Beispiel zu 6.6, 6.7:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$: $\sqrt[k]{\frac{k^2}{3^k}} = \frac{\sqrt[k]{k^2}}{3} = \underbrace{\sqrt[k]{k^2}}_{1 \text{ für } k\to\infty} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$ ⇒ konvergent.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$: $\frac{\frac{k!\cdot(k+1)}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{\cancel{k!}\cdot(k+1)\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}\cdot \cancel{k!}} = \frac{k^k}{(k+1)} = \ldots = \frac{1}{e}$ (5.2)

Beides „absolute Konvergenz"! $= \frac{k\cdot k^{k-1}}{(k+1)} = \frac{k^{k-1}}{1+\frac{1}{k}}$ $\}$ gg. ... $\}$ gg. 1

???

Satz 5.13

TRV

(1) $\sin(x+2\pi) = \sin x$ klar ✓

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$ ✓

$\cos(-x) = -\cos x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ ✓

(2)

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

(3) $\sin x = 0$ $\quad x = k \cdot \pi$

$\cos x = 0$ $\quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ✓

Lemma 5.6 Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

Def. 5.12

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

2
0

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Lemma 6.1: man darf klammern.

Bei konvergenten Reihen darf man die Elemente beliebig vertauschen und Klammern setzen, ohne daß sich etwas ändert:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

(ohne daß d. Konvergenz sich ändert)

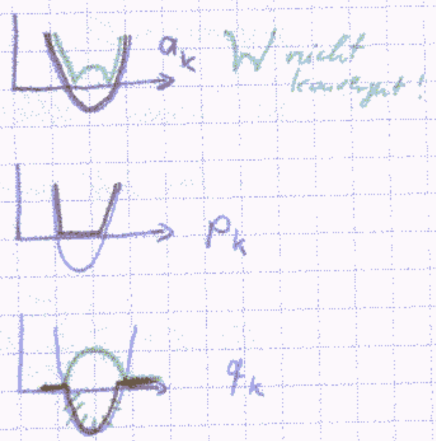
Satz 6.9: man darf umordnen, wenn bedingt konvergent.

„Satz von Riemann": es gibt eine solche Umordnung!

Satz 6.10: man darf umordnen, wenn absolut konvergent.

Lemma 6.2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad p_k$$



nur Reihe, nicht Absolutbeträge konvergieren.

$\sum a_k$ bedingt konvergent $\Rightarrow$ $\sum p_k$, $\sum q_k$ divergent

$\sum a_k$ absolut " $\Rightarrow$ " konvergent

auch Absolutbeträge konvergieren

Satz 6.3:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\Rightarrow$ Glieder selbst gehen logischerweise gegen 0.

$(\lim_{k \to \infty} a_k = 0)$

! NICHT UMGEKEHRT !

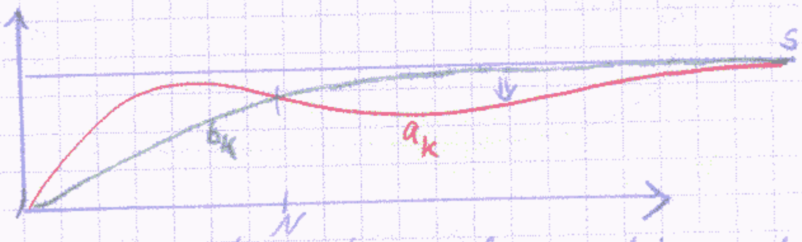
(z.B. harmonische Reihe: geht nicht schnell genug gg. 0!)

Satz 6.4: Majorantenkriterium

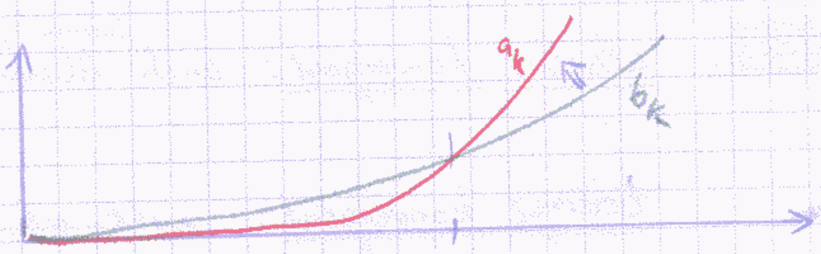
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \Rightarrow \sum a_k$ konvergent. ✓

(das sagen wir ja die ganze Zeit eh!) Def.

(2)



Ist $\sum b_k$ konvergent, und a_k ab irgendeinem N immer kleiner als $\sum b_k$, so ist auch $\sum a_k$ konvergent (wenn auch vielleicht gegen ein anderes s.)



$\sum b_k$ divergent, $|a_k| \geq |b_k|$ ab $k = N_0 \Rightarrow \sum a_k$ auch divergent.

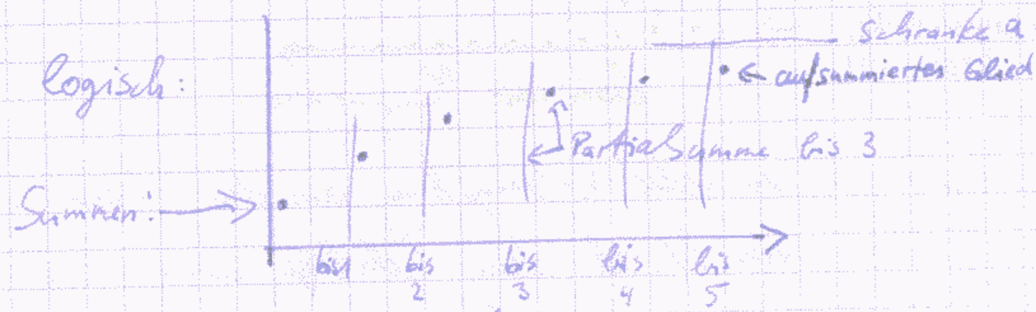
Satz 6.5:

(Partialsumme: bis n aufsummiert.)

$\left.\begin{array}{l}\sum^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ a_k \geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen beschränkt.

(d.h. jedes Summen-Glied ist kleiner a)

logisch:



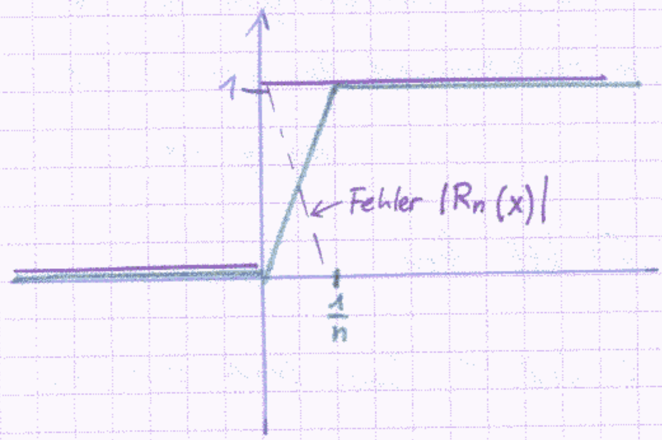
Kapitel 7: Folgen und Reihen von Funktionen

Def. 7.1: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: unendl. Folge von Funktionen, die auf D definiert sind.

f : andere Funktion, auch auf D definiert.

Läuft nun die Folge der Funktionen gegen f, so „konvergiert sie punktweise auf D gegen f".

Beispiel:



- bis 0 ist die Funktion 0,
- zwischen 0 und $\frac{1}{n}$ steigt sie von 0 auf 1
- ab $\frac{1}{n}$ bleibt sie 1.

Auch bei großen n (also kleinen $\frac{1}{n}$) entsteht zwischen 0 und 1 ein „Fehler", der hier bei 0 Eins und bei $\frac{1}{n}$ Null ist: der Fehler $|R_n(x)|$.

Wenn das Maximum dieses Fehlers gg. 0 geht (hier ist es ja 1), spricht man von

gleichmäßiger Konvergenz.

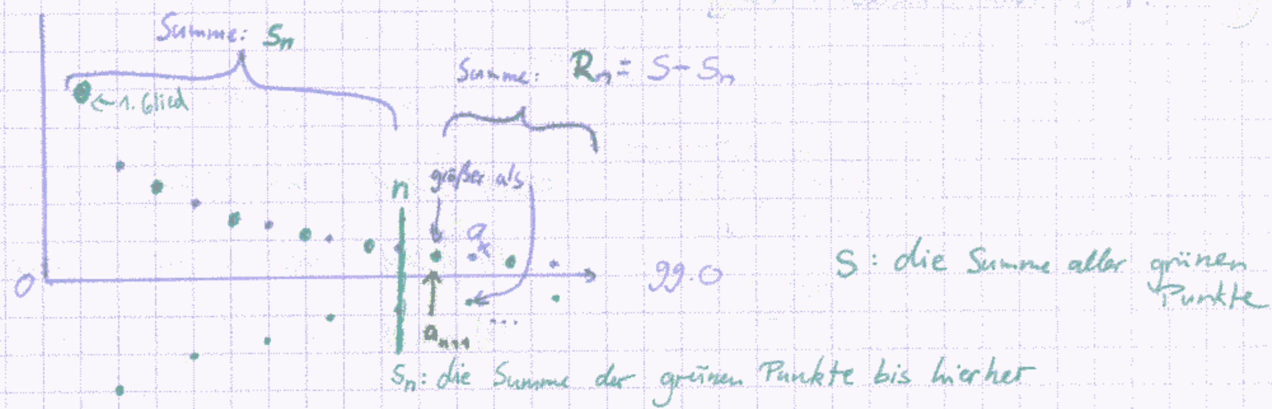
Def. 7.2: (für eine Funktion)

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$, also der dem Betrag nach größter Funktionswert.

„bedingte Konvergenz"

Satz 6.8: Leibniz-Kriterium

mon. fallende Folge gg. 0:



„grüne Folge" $= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$

R_n = die Summe aller Glieder <u>hinter</u> n ("Rest")

die Summe der Glieder hinter n (also R_n) hat dasselbe Vorzeichen wie sein erstes Glied (also a_{n+1}). (Logisch: das folgende Negativglied ist ja immer kleiner):

$$\underbrace{\operatorname{sgn}(S - S_n)}_{= \operatorname{sgn} R_n \leftarrow \text{Summe aller Glieder hinter } n} = \operatorname{sgn}(a_{n+1})$$

"Vorzeichen" — Summe bis n (inkl.)

außerdem ist $|S - S_n|$ (also R_n) kleiner als das erste Glied dieses Abschnitts (a_{n+1}): das – im Betrag leicht kleinere – Folgeglied wird ja immer abgezogen; wir haben also praktisch die Summe der Unterschiede der Folgeglieder, und die ist logischerweise nie größer als das 1. Glied; bestenfalls gleich.

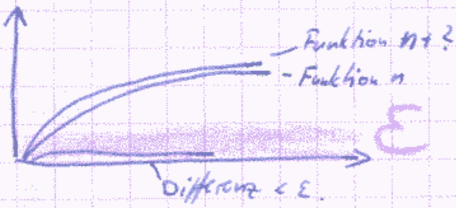
Kriterium ⇒ $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ ✓

<u>Beachte</u>: dieses bedingte Konvergenz-Kriterium ist nur echt mit 52 Folgegliedern! ;-) *G*

(Gunter findet halbseitig mit Schokolade überzogene Butterkekse übrigens besser. Ich ~~f~~ auch. Darum ... auf Leibniz! :-))

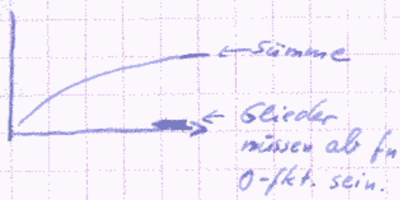
Satz 7.1: (Cauchy'sches Kriterium für glm. Konvergenz)

Eine Folge von Funktionen konvergiert genau dann gegen eine andere Folge f,
wenn zu jedem noch so kleinen ε ein N existiert,
ab dem die Differenz zweier beliebiger Folgen
mit Index <u>hinter</u> N kleiner als ε ist.



Def. 7.4:

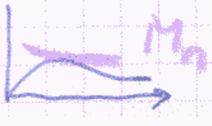
Damit eine <u>Reihe</u> von Funktionen gleichmäßig konvergent ist, muß die Folge ab einem bestimmten Glied die Nullfunktion sein (bzw. gegen die Nullfkt. laufen):
Eine <u>Reihe</u> von Funktionen ist nämlich alle Funktionen f_1 bis „f_∞" aufsummiert. Und das ist genau dann glm. konvergent, wenn die Folge der Partialsummen, also $f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \dots$
gleichmäßig konvergent ist.



Satz 7.2: (Weierstraßsches Majorantenkriterium):

Haben wir eine Reihe von Fkt.
(Reihe = <u>alle</u> Funktionen von f_1 bis f_∞ aufsummiert.)
Sei nun M_n der jeweils höchste Punkt von $|f_n(x)|$:
Wenn nun die Summe <u>alle</u> dieser M_n kleiner als ∞ ist, (bedeutet, daß M_n irgendwann gg. 0 geht), dann konvergieren die Reihen
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Das ist ja auch völlig logisch: (Satz 7.2 und Def 7.4).

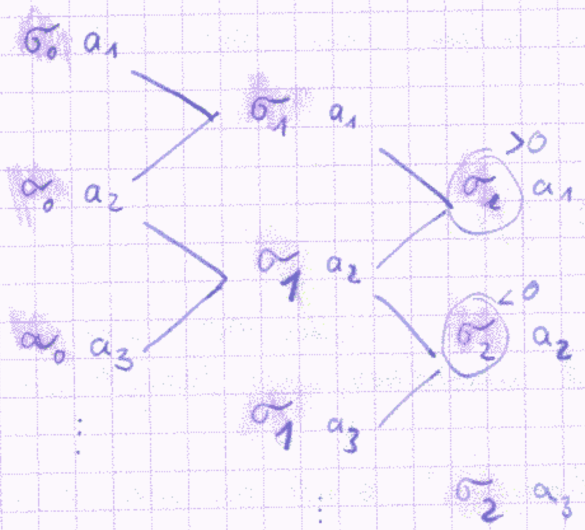


fällt aus!

Lemma

Satz 6.11:

$>$ = berechne Mittelwert



Vorr: 1) in irgendeiner Spalte ist mal der oberste Wert >0 und der drunter <0.

2) die Summe aller a_k's unter einem Bestimmten ist größer als dieser Zahl

$c \cdot$ (eine Zahl zwischen 0 und 1)

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k a_1$$, und diese Reihe konvergiert schneller als die Ausgangsreihe.

???

Satz 7.4:

f_n (Funktionenschar) Riemann-integrierbar, (auf $[a,b]$),
und diese Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig gegen f.
(d.h., „$f_\infty = f$")

Dann ist f auch Riemann-integrierbar, und
das Integral

$$\underbrace{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx}_{\text{erst Limes bilden, dann integrieren.}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}_{\text{erst integrieren, dann Limes bilden.}}$$

Satz 7.5:

... dasselbe für Reihen; also $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ statt f_∞.

Satz 7.6: Limes und Ableitung vertauschbar

- f_n stetig auf $[a,b]$
- Ableitung von f_n glm. konvergent gg. g (d.h. $f_\infty' = g$)
- $f_\infty(x)$ hat für mind. ein x einen Grenzwert.

1.) $\Rightarrow$ Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert glm. gegen eine <u>stetige</u> Funktion f.

2.) $\Rightarrow$ $f' = g$:

Satz 7.7:

... dasselbe für Reihen:

so. - f_n stetig
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$: Summe aller Ableitungen von f_n konvergiert. glm.
- die Summe aller Funktionswerte für ein x konvergiert

1.) $\Rightarrow$ die Reihe konvergiert glm.

2.) $\Rightarrow$ die Ableitung der Reihe ist die Summe aller Ableitungen.

Lemma 7.1: (Norm-eigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$)

größter Funktionswert!

(1) $\|f\| = 0 \iff f = 0$ (logisch)

(2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$ "

(3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ " . □

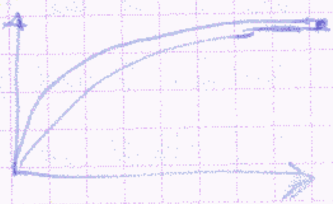
Def. 7.3 (glm. Konvergenz) „$\rightrightarrows$"

Funktionsfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert glm. gg. f (alle auf D definiert),
wenn der größte Funktionswert der $n \to \infty$lichsten Folge
gleich dem " " von f ist.

Also: $\lim_{n \to \infty} \|f_n\| = \|f\|$ bzw.

$\lim_{n \to \infty} \|f_n\| - \|f\| = 0$ bzw. (nach 7.1 (3))

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0.$



Lemma 7.2:

(siehe auf Def. 7.3; ist dasselbe nur mit ε ausgedrückt):

Eine Funktionen-Folge konvergiert genau dann gleichmäßig
gegen eine andere Funktion f („$f_n \rightrightarrows f$"), wenn
es zu jeder noch so kleinen ε-Umgebung ein N „x-Wert" gilt,
ab dem bei allen folgenden Werten
die Differenz zwischen f_n und f kleiner als ε ist.

Satz 7.9:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: Potenzreihe; Konvergenzradius $R > 0$.

(1) diese Potenzreihe ist für x im Konvergenzradius stetig diff'bar : $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ (Bekannte Regel)

(2) man kann das hier unendlich oft differenzieren;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n x^{n-k}$$

$$a_0 = \frac{f(0)}{1} = a$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2 \cdot 1}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

(?)