Prof. Dr. M. Grohe

C. Aschermann, E. Selman, S. Winter

Übungsblatt 2

Abgabetermin: 30.04.2014

- Die Lösungen der Hausaufgaben werden in den Tutorien abgegeben.

  Zur Not ist es **am Mittwoch 30.04 bis 18 Uhr** möglich, diese in den Kasten vor dem Flur des Lehrstuhls Informatik 7 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, erste Etage).

- Die **Hausaufgaben** müssen in Gruppen von je **3 Studierenden** aus der **gleichen Übungsgruppe** abgegeben werden.

- **Nummer der Übungsgruppe**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt in folgender Form aufzuschreiben.

  Gruppe: 12
  FoSAP-Übungsblatt 5

  Erika Mustermann, 294255
  Otto Normalstudent, 315450

  Blätter, die ohne Übungsgruppennummer in den Lehrstuhlkasten eingeworfen werden, werden nicht bewertet.

- **Heften bzw. tackern Sie die Blätter!**

Tutoraufgabe 1 (vollständige Induktion)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen per vollständiger Induktion.

a) Für jede natürliche Zahl n gilt:

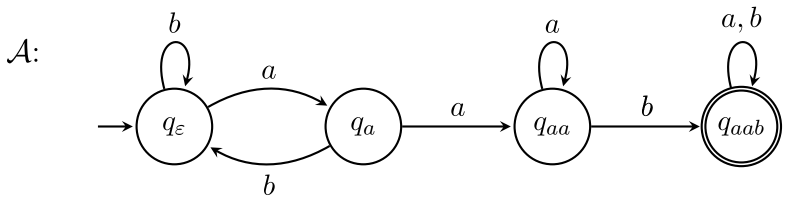
$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 4$ gilt:

$$2^n < n!$$

Tutoraufgabe 2 (vollständige Induktion über die Wortlänge)

Beweisen Sie die folgende Behauptung per vollständiger Induktion über die Wortlänge.



Behauptung: $\mathcal{A}$ akzeptiert $w \in \{a, b\}^* \iff w$ enthält das Infix aab.

Tutoraufgabe 3 (Operationen auf Sprachen)

Sind folgende Behauptungen richtig für jede Sprache L und K? Beweisen Sie die Behauptung oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

a) $KL = LK$

b) $(KK)^* \subseteq K^*$

c) $(KK)^* \supseteq K^*$

d) $K^* \cup L^* \subseteq (K \cup L)^*$

e) $K^* \cup L^* \supseteq (K \cup L)^*$

Tutoraufgabe 4 (DFA-erkennbare Sprachen)

Wir betrachten Sprachen über dem 1-elementigen Alphabet $\{a\}$. Für jede natürliche Zahl n bezeichne a^n das Wort $aa\dots a$ der Länge n. Welche der folgenden Sprachen sind DFA-erkennbar? Wieviele Zustände braucht ein DFA mindestens, um die gegebene Sprache zu erkennen?

a) $\{a\}$

b) $\{a, aa, aaa\}$

c) $\{a, aaa, aaaaa\}$

d) $\{aa, aaaa, aaaaaa\}$

e) $\{a^n \mid n \text{ ist gerade}\}$

f) $\{a^n \mid n \text{ ist ungerade}\}$

g) $\{a^n \mid n \text{ ist durch 7 teilbar}\}$

h) $\{a^n \mid n < k\}$

i) $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

j) $\{a^n \mid n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$

⋆⋆⋆⋆⋆

Aufgabe 5 (vollständige Induktion) **2+3=5**

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen per vollständiger Induktion.

a) Für jede positive natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

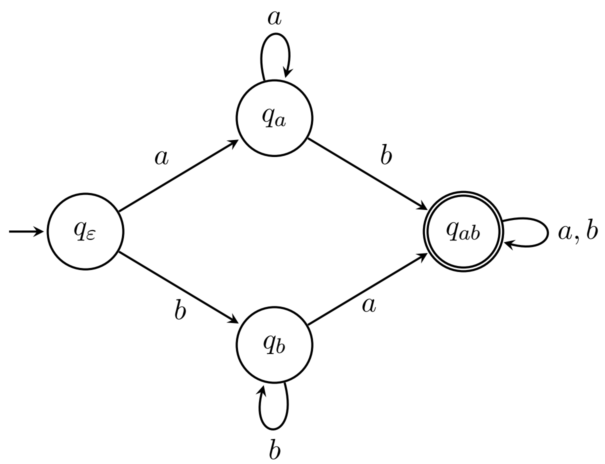
b) Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 5$ gilt:

$$n^2 < 2^n$$

Aufgabe 6 (vollständige Induktion über die Wortlänge) **5**

Beweisen Sie die folgende Behauptung per vollständiger Induktion über die Wortlänge.

$\mathcal{A}$:



Behauptung: $\mathcal{A}$ akzeptiert $w \in \{a,b\}^* \iff w$ enthält mindestens ein a, sowie mindestens ein b.

Aufgabe 7 (Operationen auf Sprachen) **2+2+2+3=9**

Sind die folgenden Behauptungen richtig für jede Sprache K, L und M? Beweisen Sie die Behauptung oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

a) $(L \cup M)^* \subseteq (L^* M^*)^*$

b) $(L \cup M)^* \supseteq (L^* M^*)^*$

c) $(K \cup L)^* L \supseteq (K^* L)^*$

d) $(K \cup L)^* L \subseteq (K^* L)^*$