Kapitel 7

Kellerautomaten

Abschnitt 7.1

Definitionen und Beispiele

Idee

Wir erweitern endliche Automaten um einen unbeschränkt großen Speicher.

Allerdings schränken wir den Zugriff auf den Speicherinhalt ein:

- Es kann jeweils nur das Symbol aus dem Speicher gelesen werden, das zuletzt eingefügt wurde.
- Wir sprechen von einem Kellerspeicher oder Stapel (engl.: stack oder manchmal pushdown stack).
- Das zuletzt eingefügte Symbol liegt dann ganz oben auf dem Stapel. Um auf weiter unten liegende Symbole zugreifen zu können, muss man zunächst die darüber liegenden entfernen.

Motivation

Man kann einen solchen Kellerspeicher zum Beispiel verwenden, um den Call-Stack eines rekursiven Programms abstrakt zu modellieren.

Beispiel 7.1 (informell)

Wir betrachten die Sprache

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

Ein Kellerautomat für diese Sprache arbeitet wie folgt.

- Aufbau des Stapels: Für jedes gelesene a lege ein Symbol auf dem Stapel ab. (Wir verwenden das Symbol Z für „Zähler“.)
- Abbau des Stapels: Für jedes gelesene b nehme ein Symbol Z vom Stapel herunter.
- Zwei Kontrollzustände sorgen dafür, dass Aufbau und Abbau des Stapels nur in dieser Reihenfolge möglich sind (Aufbau mit q_0, Abbau mit q_1, keine Rückkehr von q_1 nach q_0).
- Akzeptiere, wenn am Ende des Eingabewortes der Stapel vollständig abgebaut ist.

Definition 7.2

Ein Kellerautomat (engl.: pushdown automaton, kurz: PDA) ist ein 7-Tupel

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F);$$

dabei ist

- Q eine endliche Menge, die Zustandsmenge,
- Σ ein Alphabet, das Eingabealphabet,
- Γ ein Alphabet, das Stapelalphabet (oder Kelleralphabet),
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*$ endlich, die Transitionsrelation,
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand,
- $Z_0 \in \Gamma$ das Stapelanfangssymbol (oder Kelleranfangssymbol),
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände.

Bemerkung 7.3

PDAs sind nichtdeterministisch mit ε-Transitionen. Wir werden später auch noch deterministische PDAs betrachten.

- PDAs bezeichnen wir mit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und Varianten wie $\mathcal{A}', \mathcal{B}_1$.
- Großbuchstaben X, Y, Z und Varianten wie Z_0, die wir zur besseren Lesbarkeit farbig darstellen, bezeichnen Stapelsymbole, also Elemente des Stapelalphabets Γ.
- Kleinbuchstaben $a, b, \ldots$ und Varianten bezeichnen Eingabesymbole, also Elemente des Eingabealphabets Σ.
- Kleinbuchstaben $v, w \ldots$ und Varianten bezeichnen Wörter in Σ^*.
- Griechische Buchstaben $\gamma, \delta, \ldots$ bezeichnen Wörter in Γ^*.

Wirkung der Transitionen

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$. Dann ist

$$\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*.$$

Transitionen haben also die Gestalt

$$(p, a, Z, q, \gamma) \quad \text{oder} \quad (p, \varepsilon, Z, q, \gamma)$$

Wirkung der Transition (p, a, Z, q, γ):
In Zustand p, bei Eingabesymbol a und Symbol Z oben auf dem Stapel,

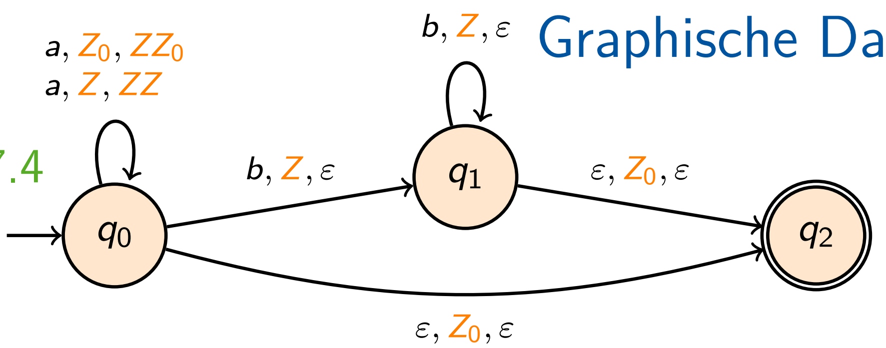
- nimm Z vom Stapel, gehe in den Zustand q über, lege die Symbole aus γ auf den Stapel (in richtiger Reihenfolge, so dass das erste Symbol von γ anschließend oben auf dem Stapel liegt) und gehe zum nächsten Eingabesymbol.

Wirkung der Transition $(p, \varepsilon, Z, q, \gamma)$:
In Zustand p und bei Symbol Z oben auf dem Stapel,

- nimm Z vom Stapel, gehe in den Zustand q über, lege die Symbole aus γ auf den Stapel.

Graphische Darstellung

Beispiel 7.4



Wie endliche Automaten stellen wir PDAs graphisch als Transitionsgraphen dar, deren Knoten die Zustände sind.

Allerdings sind jetzt Kanten im Graphen nicht mehr mit einzelnen Buchstaben des Eingabealphabets oder „ε“ beschriftet, sondern mit Tripeln

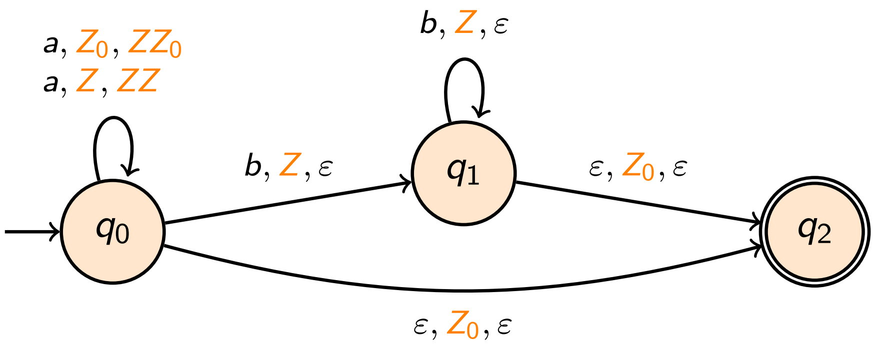
$$\sigma, Z, \gamma \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma^*.$$

Eine mit „σ, Z, γ“ beschriftete Kante vom Zustand p zum Zustand q zeigt an, dass $(p, \sigma, Z, q, \gamma) \in \Delta$.

Mehrere Transitionen zwischen zwei Zuständen fassen wir zusammen; die zugehörigen Tripel (σ, Z, γ) schreiben wir übereinander.

Das Stapelanfangssymbol ist aus dieser Darstellung nicht erkennbar. Wenn nichts anderes gesagt wird, nehmen wir an, es ist Z_0.

Beispiel 7.4 (Forts.)



beschreibt den PDA

$$\big(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z\}, \Delta, q_0, Z_0, \{q_2\}\big)$$

mit

$$\Delta = \big\{(q_0, a, Z_0, q_0, ZZ_0), (q_0, a, Z, q_0, ZZ), (q_0, b, Z, q_1, \varepsilon), \\ (q_0, \varepsilon, Z_0, q_2, \varepsilon), (q_1, b, Z, q_1, \varepsilon), (q_1, \varepsilon, Z_0, q_2, \varepsilon)\big\}.$$

Idee

Eine Konfiguration eines Systems soll den „Gesamtzustand" des Systems zu einem Zeitpunkt einer Berechnung beschreiben. Die in der Konfiguration zusammengefasste Information muss ausreichen, um den weiteren Verlauf der Berechnung festzulegen.

Für einen PDA besteht dieser „Gesamtzustand" aus dem Zustand, dem Inhalt des Stapels, und dem verbleibenden Rest des Eingabeworts:

$$\kappa = \Big(\underbrace{q}_{\text{Zustand}}, \underbrace{\gamma}_{\text{Stapelinhalt}}, \underbrace{w}_{\text{Rest des Eingabeworts}} \Big).$$

Definition 7.5

Eine Konfiguration eines PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ ist ein Tripel

$$(q, \gamma, w) \in Q \times \Gamma^* \times \Sigma^*$$

Übergangsrelation und Läufe

Definition 7.6

Sei ein $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ ein PDA.

1. Die Übergangsrelation $\rightarrow_{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ ist die folgendermaßen definierte zweistellige Relation auf den Konfigurationen:

   $(q, \gamma, w) \rightarrow_{\mathcal{A}} (q', \gamma', w')$ $:\Longleftrightarrow$ es gibt eine Transition

   $$(q, \sigma, Z, q', \delta') \in \Delta,$$

   und ein $\delta \in \Gamma^*$, so dass $\gamma = Z\delta$ und $\gamma' = \delta'\delta$ und $w = \sigma w'$.

2. Seien κ, λ Konfigurationen von $\mathcal{A}$. Ein Lauf von $\mathcal{A}$ von κ nach λ ist eine Folge

   $$\big(\kappa_0 = \kappa, \kappa_1, \ldots, \kappa_n = \lambda\big)$$

   von Konfigurationen von $\mathcal{A}$, so dass $\kappa_{i-1} \rightarrow_{\mathcal{A}} \kappa_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Akzeptierende Läufe und die Sprache eines PDA

Definition 7.7

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ ein PDA.

1. Sei $w \in \Sigma^*$. Ein Lauf von $\mathcal{A}$ auf w ist ein Lauf von (q_0, Z_0, w) nach (q, γ, ε), für ein $q \in Q$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

   Der Lauf ist akzeptierend, wenn $q \in F$.

2. $\mathcal{A}$ akzeptiert $w \in \Sigma^*$, wenn es einen akzeptierenden Lauf von $\mathcal{A}$ über w gibt.

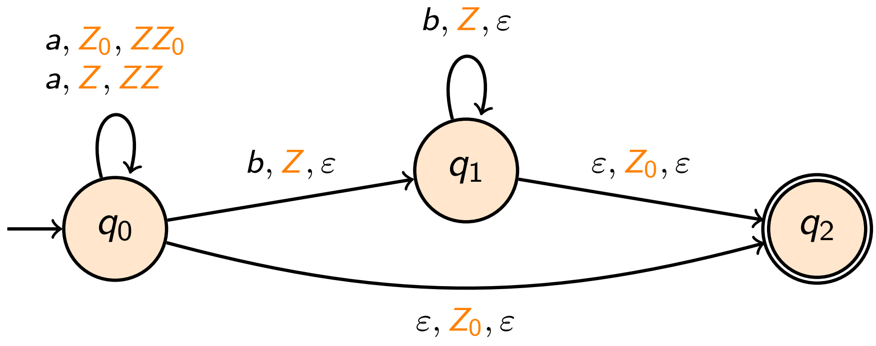
3. Die von $\mathcal{A}$ erkannte Sprache ist

   $$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$

4. Eine Sprache L is PDA-erkennbar, wenn es einen PDA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$ gibt.

Beispiel 7.8

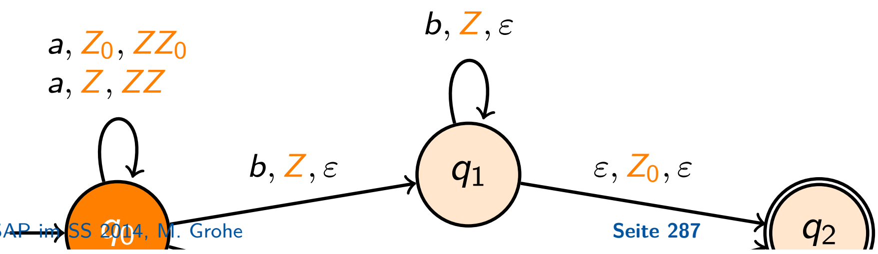
PDA $\mathcal{A}$



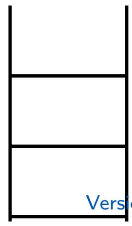
Eingabewort w

$a \quad a \quad a \quad b \quad b \quad b$

PDA $\mathcal{A}$



Stapel



Terminologie und Notation

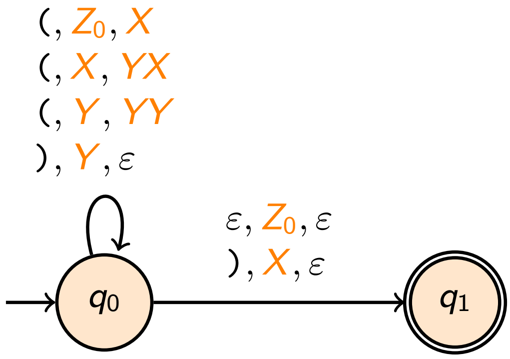
Sei $\mathcal{A}$ ein PDA.

- Wir schreiben $\kappa \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}} \lambda$, wenn es einen Lauf von $\mathcal{A}$ von κ nach λ gibt.
- Die Länge eines Laufes $(\kappa_0, \ldots, \kappa_n)$ von $\mathcal{A}$ ist n.
  Wir schreiben $\kappa \xrightarrow{n}_{\mathcal{A}} \lambda$, wenn es einen Lauf der Länge n von κ nach λ gibt.
  Weiterhin verwenden wir Notationen wie $\kappa \xrightarrow{\leq n}_{\mathcal{A}} \lambda$ und $\kappa \xrightarrow{\geq n}_{\mathcal{A}} \lambda$, mit der offensichtlichen Bedeutung.
- In all diesen Notationen ($\rightarrow_{\mathcal{A}}$, $\xrightarrow{*}_{\mathcal{A}}$, etc.) lassen wir den Index $\mathcal{A}$ weg, wenn der PDA $\mathcal{A}$ aus dem Kontext hervorgeht.

Beispiel 7.9

Wir betrachten wieder die Sprache $L_K \subseteq \{(,)\}^*$ der korrekten Klammerausdrücke.

Sei $\mathcal{A}_K$ folgender PDA:

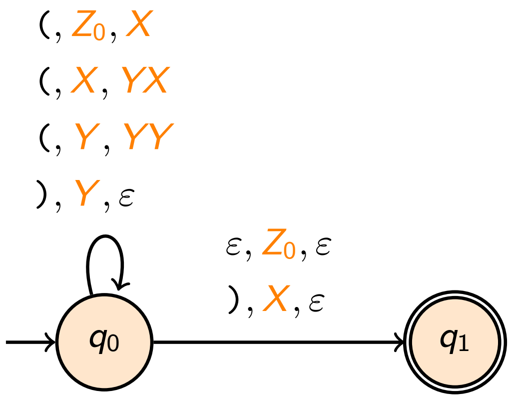


Akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ über dem Wort $(()())$

$$\big(q_0, Z_0, (()())\big) \to \big(q_0, X, ()())\big) \to \big(q_0, YX,)())\big) \to \big(q_0, X, ())\big)$$
$$\to \big(q_0, YX,))\big) \to \big(q_0, X,)\big) \to \big(q_1, \varepsilon, \varepsilon\big)$$

Beispiel 7.9 (Forts.)

$\mathcal{A}_K$



Beispiel 7.9 (Forts.) II

Behauptung 1

$$L(\mathcal{A}_K) = L_K.$$

Um die Behauptung zu beweisen, verwenden wir die Charakterisierung von L_K aus Satz 3.22:

$$L_K = \{w \in \Sigma^* \mid \text{auf}(w) = \text{zu}(w) \text{ und } \text{auf}(v) > \text{zu}(v) \text{ für alle } v \sqsubset w \text{ mit } v \neq \varepsilon\}. \qquad (\star)$$

Dabei ist $\Sigma := \{(,)\}$, und für alle $w \in \Sigma^*$

$$\text{auf}(w) := |w|_(\quad \text{und} \quad \text{zu}(w) := |w|_).$$

Behauptung 2

Beispiel 7.9 (Forts.) III

Sei $w = xy \in \Sigma^*$.

1. *Wenn $(q_0, X, w) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma, y)$ für ein $\gamma \in \Gamma^*$, dann $\text{auf}(x) \geq \text{zu}(x)$ und $\gamma = Y^k X$ für $k = \text{auf}(x) - \text{zu}(x)$.*
2. *Wenn $\text{auf}(x') \geq \text{zu}(x')$ für alle $x' \sqsubseteq x$, dann $(q_0, X, w) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma, y)$ für ein $\gamma \in \Gamma^*$.*

Beweis von Behauptung 2.

Beispiel 7.9 (Forts.) IV

1. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über die Länge n eines Laufes von $\mathcal{A}$ von (q_0, X, w) nach (q_0, γ, y).

   Induktionsanfang $n = 0$: Gelte $(q_0, X, w) \xrightarrow{0} (q_0, \gamma, y)$. Dann ist $\gamma = X$ und $y = w$ und damit $x = \varepsilon$. Also $\text{auf}(x) - \text{zu}(x) = 0$ und $\gamma = Y^0 X$.

   Induktionsschritt $n \to n + 1$: Sei

   $$\big(\kappa_0 = (q_0, X, w), \kappa_1, \ldots, \kappa_{n+1} = (q_0, \gamma, y)\big)$$

   ein Lauf von $\mathcal{A}$ von (q_0, X, w) zu (q_0, γ, y).
   Dann ist $\kappa_n = (q_0, \gamma', y')$ für ein $\gamma' \in \Gamma^*$ und ein Suffix y' von w, denn es gibt keine Transition im Zustand q_1.
   Sei $x' \in \Sigma^*$ so, dass $x'y' = w$. Nach Induktionsannahme ist $\gamma' = Y^{k'} X$, wobei $k' = \text{auf}(x') - \text{zu}(x')$.

   Fall 1: $k' = 0$.

Beispiel 7.9 (Forts.) V

Dann muss die Transition von $\kappa_n = (q_0, X, y')$ nach $\kappa_{n+1} = (q_0, \gamma, y)$

$$(q_0, (, X, q_0, YX)$$

sein. Also gilt $x = x'($ und $\gamma = YX$. Außerdem

$$k = \text{auf}(x) - \text{zu}(x) = \text{auf}(x') - \text{zu}(x') + 1 = k' + 1 = 1$$

und damit $\gamma = Y^k X$.

Fall 2: $k' > 0$.
Dann muss die Transition von $\kappa_n = (q_0, Y^{k'} X, y')$ nach $\kappa_{n+1} = (q_0, \gamma, y)$

$$(q_0, (, Y, q_0, YY) \quad \text{oder} \quad (q_0,), Y, q_0, \varepsilon)$$

sein.

Fall 2a: Die Transition von κ_n nach κ_{n+1} ist $(q_0, (, Y, q_0, YY)$.

Beispiel 7.9 (Forts.) VI

Dann gilt $x = x'($ und $\gamma = Y^{k'+1}X$. Außerdem

$$k = \text{auf}(x) - \text{zu}(x) = \text{auf}(x') - \text{zu}(x') + 1 = k' + 1$$

und damit $\gamma = Y^k X$.

Fall 2b: Die Transition von κ_n nach κ_{n+1} ist $(q_0,), Y, q_0, \varepsilon)$.
Dann gilt $x = x')$ und $\gamma = Y^{k'-1}X$. Außerdem

$$k = \text{auf}(x) - \text{zu}(x) = \text{auf}(x') - (\text{zu}(x') + 1) = k' - 1$$

und damit $\gamma = Y^k X$.

Beispiel 7.9 (Forts.) VII

2. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über $n := |x|$.

   Induktionsanfang $n = 0$: Dann gilt $y = w$ und $(q_0, X, w) \xrightarrow{0} (q_0, X, w)$.

   Induktionsschritt $n \to n + 1$:
   Sei x' das Präfix von x der Länge $|x'| = n$ und y' das Suffix, so dass $w = x'y'$. Nach Induktionsannahme gilt

$$(q_0, X, w) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma', y')$$

   für ein $\gamma' \in \Gamma^*$.

   Fall 1: $x = x'($.
   Dann gilt $(q_0, X, w) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma', y') \to (q_0, Y\gamma', y)$.

   Fall 2: $x = x')$.
   Dann gilt $k' := \text{auf}(x') - \text{zu}(x') > \text{auf}(x) - \text{zu}(x) \geq 0$. Nach Teil 1 der Behauptung gilt $\gamma' = Y^{k'}X$.
   Dann $(q_0, X, w) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma', y') \to (q_0, Y^{k'-1}X, y)$.

Beispiel 7.9 (Forts.) VIII

□

Beweis von Behauptung 1. „$\subseteq$“: Sei $w \in L(\mathcal{A}_K)$. Falls $w = \varepsilon$, so ist $w \in L_K$.

Im Folgenden nehmen wir an, dass $|w| \geq 1$.

Sei $(\kappa_0, \dots, \kappa_m)$ ein akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf w.

Dann gilt:

(i) $\kappa_0 = (q_0, Z_0, w)$.

(ii) $\kappa_m = (q_1, \gamma_m, \varepsilon)$ für ein $\gamma_m \in \Gamma^*$.

(iii) $m \geq 2$, denn $|w| \geq 1$, und von q_0 nach q_1 gibt es mit Stapelsymbol Z_0 nur eine ε-Transition.

Beispiel 7.9 (Forts.) IX

(iv) Für $1 \leq i \leq m-1$ ist $\kappa_i = (q_0, \gamma_i, y_i)$ für ein $\gamma_i \in \Gamma^*$ und ein Suffix y_i von w. Der Zustand in κ_i muss q_0 sein, weil in q_1 keine Transitionen möglich sind.
Sei $x_i \in \Sigma^*$ das Präfix von w, so dass $w = x_i y_i$.

(v) $\kappa_{m-1} = (q_0, X,))$, weil $(q_0,), X, q_1, \varepsilon)$ die einzige Transition von q_0 nach q_1 ist.
Also gilt $\gamma_{m-1} = X$ und $y_{m-1} =)$.

(vi) $\kappa_1 = (q_0, X, y_1)$ und $x_1 = ($, weil $m \geq 2$ und weil $(q_0, (, Z_0, q_0, X)$ die einzige Transition von q_0 nach q_0 mit Stapelsymbol Z_0 ist.
Das erste Symbol von w und von allen x_is ist also (.

(vii) Für $1 \leq i \leq m-1$ sei $x_i' \in \Sigma^*$, so dass $x_i = (x_i'$.
Dann gilt $(q_0, X, x_i' y_i) \xrightarrow{*} (q_0, \gamma_i, y_i)$.
Also $k_i := \text{auf}(x_i') - \text{zu}(x_i') \geq 0$ und $\gamma_i = Y^{k_i} X$ wegen Behauptung 2(1).

(viii) Wegen (v) ist $\gamma_{m-1} = X$, also gilt $k_{m-1} = 0$.

Beispiel 7.9 (Forts.) X

Es gilt $w = x_{m-1}y_{m-1} = \langle x'_{m-1}\rangle$ nach (v) und damit nach (viii)

$$\mathsf{auf}(w) - \mathsf{zu}(w) = \mathsf{auf}(x'_{m-1}) - \mathsf{zu}(x'_{m-1}) = k_{m-1} = 0,$$

also $\mathsf{auf}(w) = \mathsf{zu}(w)$.
Die Präfixe v von w mit $1 \leq |v| < |w|$ sind $x_i = \langle x'_i$ für $1 \leq i \leq n-1$, und nach (vii) gilt

$$\mathsf{auf}(x_i) - \mathsf{zu}(x_i) = 1 + \mathsf{auf}(x'_i) - \mathsf{zu}(x'_i) > 0$$

und damit $\mathsf{auf}(x_i) > \mathsf{zu}(x_i)$.
Also gilt $w \in L_K$ wegen $(\star)$.

„$\supseteq$“: Sei $w \in L_K$. Falls $w = \varepsilon$ ist $(q_0, Z_0, \varepsilon) \to (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$ ein akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf w.
Nehmen wir an, $w \neq \varepsilon$. Dann folgt aus $(\star)$, dass $w = \langle w'\rangle$ für ein $w' \in \Sigma^*$, so dass $\mathsf{auf}(w') - \mathsf{zu}(w') = 0$ und $\mathsf{auf}(v') - \mathsf{zu}(v') \geq 0$ für alle $v' \sqsubseteq w'$.

Beispiel 7.9 (Forts.) XI

Nach Behauptung 2 gilt dann $(q_0, X, w') \xrightarrow{*} (q_0, X, \varepsilon)$. Also

$$(q_0, Z_0, w) \to \big(q_0, X, w'\rangle\big) \xrightarrow{*} \big(q_0, X, \rangle\big) \to (q_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

Also akzeptiert $\mathcal{A}$ das Wort w. $\square$

Beobachtung 7.10

In einer Konfiguration mit leerem Stapel kann ein PDA keine Transition mehr durchführen.
Eine solche Konfiguration kann also nur als letzte Konfiguration in einem Lauf auftreten.

Wir können es als Akzeptanzkriterium verwenden, ob der Stapel in der letzen Konfiguration eines Laufes leer ist. Wir brauchen dann keine Endzustände.

Definition 7.11

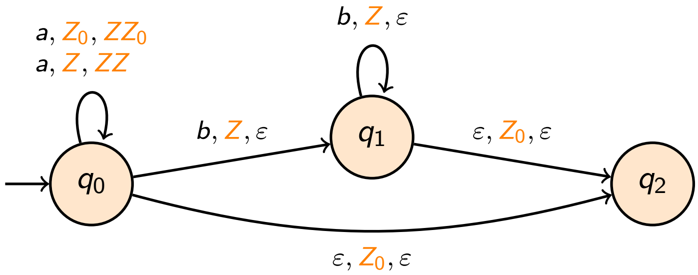
Ein PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert, ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$, wobei die Zustandsmenge Q, das Eingabealphabet Σ, das Stapelalphabet Γ, der Anfangszustand q_0 und das Stapelanfangssymbol Z_0 wie bei einem PDA definiert sind.

Für einen PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert, definieren wir Konfigurationen und Läufe wie für einen PDA. Ein Lauf $(\kappa_0, \dots, \kappa_n)$ ist akzeptierend, wenn $\kappa_n = (q, \varepsilon, \varepsilon)$, für ein beliebiges $q \in Q$.

Jetzt können wir die erkannte Sprache wie bei einem PDA definieren.

Beispiel 7.12

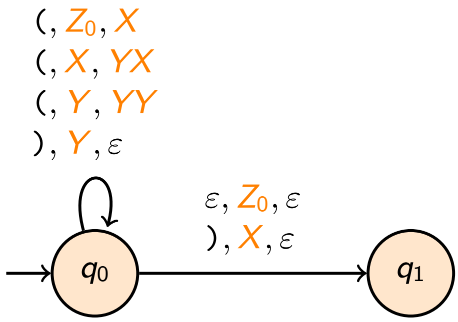
Der PDA (vgl. Beispiel 7.8)



erkennt die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ mit leerem Stapel.

Beispiel 7.13

Der PDA (vgl. Beispiel 7.9)



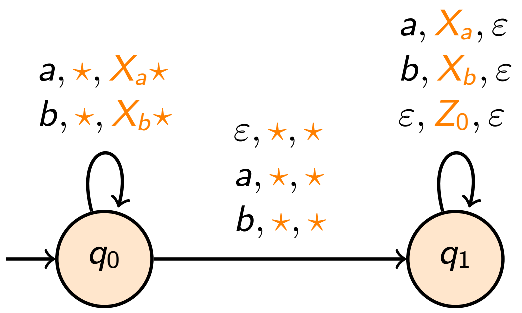
erkennt die Sprache L_K mit leerem Stapel.

Beispiel 7.14

Wir betrachten die Sprache der Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$:

$$L_P = \{a_1 \dots a_n \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}, a_i = a_{n+1-i} \text{ für } 1 \le i \le n\}.$$

Folgender PDA $\mathcal{A}_P$ erkennt L_P mit leerem Stapel:



Dabei steht in jeder Transition $\star$ für ein beliebiges Symbol im Stapelalphabet $\{Z_0, X_a, X_b\}$.

Äquivalenz der Akzeptanzbedingungen

Satz 7.15

Eine Sprache ist genau dann PDA-erkennbar, wenn sie erkennbar ist durch einen PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert.

(Beweis Übung)

Queue-Systeme

Wie PDAs, der Speicher ist jedoch als Warteschlange (Queue) organisiert: neue Speicherinhalte werden hinten angefügt; jeweils das erste Symbol kann gelesen werden.

Turingmaschinen

Speicherzugriff kann an jeder beliebigen Stelle erfolgen.

Mehr dazu in der Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität.

Abschnitt 7.2

Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

Äquivalenzsatz

Satz 7.16

Eine Sprache ist genau dann PDA-erkennbar, wenn sie kontextfrei ist.

Erinnerung: Chomsky-Normalform

Eine kontextfreie Grammatik ist in Chomsky-Normalform (CNF), wenn sie nur Regeln der Gestalt $A \to BC$ und $A \to a$ für Nichtterminalsymbole A, B, C und Terminalsymbole a enthält.

Beispiel 7.17

Folgende Grammatik $\mathcal{G}$ für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist in CNF:

$$
\begin{aligned}
S &\to AC \mid AB & \qquad C &\to SB \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Definition 7.18

Sei $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in CNF.
Wir definieren einen PDA $\mathcal{A}_\mathcal{G} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$, der mit leerem Stapel akzeptiert, durch:

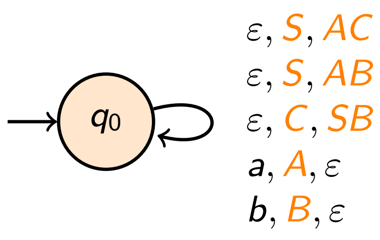
- $Q := \{q_0\}$,
- $\Gamma := N$,
- $\Delta := \big\{(q_0, \varepsilon, A, q_0, BC) \bigm| A \to BC \in P\big\}$
  $\cup\big\{(q_0, a, A, q_0, \varepsilon) \bigm| A \to a \in P\big\}$,
- $Z_0 := S$.

Beispiel 7.17 (Forts.)

Wir betrachten wieder die Grammatik $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{llll} S \to AC \mid AB & & & C \to SB \\ A \to a & & & \\ B \to b & & & \end{array}$$

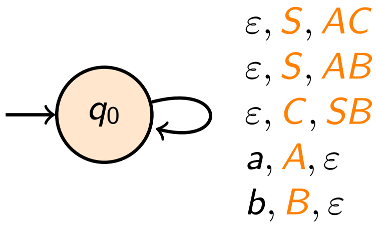
$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ ist folgender PDA mit Stapelanfangssymbol S:



$\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} S &\to AC \mid AB \\ C &\to SB \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$



Ableitung von $aabb$ in $\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ll} & \underline{S} \\ \to & \underline{A}C \\ \to & a\underline{C} \\ \to & a\underline{S}B \\ \to & a\underline{A}BB \\ \to & aa\underline{B}B \\ \to & aab\underline{B} \\ \to & aabb \end{array}$$

Akz. Lauf von $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ auf $aabb$

$$\begin{array}{ll} & (q_0, S, \quad aabb) \\ \to & (q_0, AC, \quad aabb) \\ \to & (q_0, C, \quad abb) \\ \to & (q_0, SB, \quad abb) \\ \to & (q_0, ABB, abb) \\ \to & (q_0, BB, \quad bb) \\ \to & (q_0, B, \quad b) \\ \to & (q_0, \varepsilon, \quad \varepsilon) \end{array}$$

Definition 7.19

Ein Linksableitung in einer Grammatik ist eine Ableitung, in der in jedem Schritt das am weitesten links stehende Nichtterminalsymbol ersetzt wird.

Beispiel 7.20

Linksableitung von $aabb$ in der Grammatik $\mathcal{G}$ aus Beispiel 7.17:

$$\underline{S} \to \underline{A}C \to a\underline{C} \to a\underline{S}B \to a\underline{A}BB \to aa\underline{B}B \to aab\underline{B} \to aabb$$

Notation

$\alpha \underset{L}{\to} \beta$, auch $\alpha \overset{*}{\underset{L}{\to}} \beta$, $\alpha \overset{n}{\underset{L}{\to}} \beta$.

Beobachtung 7.21

Für alle kontextfreien Grammatiken $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, alle Satzformen $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$ und alle $n \geq 0$ gilt:

$$\alpha \overset{n}{\to} \beta \iff \alpha \overset{n}{\underset{L}{\to}} \beta.$$

$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ erkennt $L(\mathcal{G})$ I

Satz 7.22

Sei $\mathcal{G}$ eine kontextfreie Grammatik in CNF. Dann gilt

$$L(\mathcal{A}_\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$.
Wir zeigen per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ und $\beta \in N^*$ gilt:

$$S \xrightarrow[L\ \mathcal{G}]{n} x\beta \iff (q_0, S, xy) \xrightarrow{n}_{\mathcal{A}_\mathcal{G}} (q_0, \beta, y). \qquad (\star)$$

Daraus folgt sofort die Behauptung des Lemmas.

$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ erkennt $L(\mathcal{G})$ II

Induktionsanfang $n = 0$.

$$\begin{aligned} S \xrightarrow[L]{0} x\beta &\iff x\beta = S \\ &\iff x = \varepsilon \text{ und } \beta = S \\ &\iff (q_0, S, xy) = (q_0, \beta, y) \\ &\iff (q_0, S, xy) \xrightarrow{0} (q_0, \beta, y). \end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$.
„$\Longrightarrow$“: Gelte $S \xrightarrow[L]{n+1} x\beta$. Sei $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$, so dass

$$S \xrightarrow[L]{n} \alpha \xrightarrow[L]{} x\beta.$$

Fall 1: Die im letzten Ableitungsschritt verwendete Regel ist $B \to CD$.

$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ erkennt $L(\mathcal{G})$ III

Weil es sich um eine Linksableitung handelt, ist dann $\alpha = xB\gamma$ und $\beta = CD\gamma$ für ein $\gamma \in N^*$.
Nach Induktionsannahme gilt

$$(q_0, S, xy) \xrightarrow{n} (q_0, B\gamma, y).$$

Weil $(q_0, \varepsilon, B, q_0, CD) \in \Delta$ gilt dann

$$(q_0, B\gamma, y) \rightarrow (q_0, CD\gamma, y),$$

also $(q_0, S, xy) \xrightarrow{n+1} (q_0, \beta, y)$.

Fall 2: Die im letzten Ableitungsschritt verwendete Regel ist $B \rightarrow b$.
Weil es sich um eine Linksableitung handelt, ist dann $\alpha = x'B\beta$ und $x = x'b$ für ein $x' \in \Sigma^*$.
Nach Induktionsannahme gilt

$$(q_0, S, x'by) \xrightarrow{n} (q_0, B\beta, by).$$

$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ erkennt $L(\mathcal{G})$ IV

Weil $(q_0, b, B, q_0, \varepsilon) \in \Delta$ gilt dann

$$(q_0, B\beta, by) \rightarrow (q_0, \beta, y),$$

also $(q_0, S, xy) \xrightarrow{n+1} (q_0, \beta, y)$.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $(q_0, S, xy) \xrightarrow{n+1} (q_0, \beta, y)$. Seien $\beta' \in \Gamma^* = N^*$ und $y' \in \Sigma^*$, so dass

$$(q_0, S, xy) \xrightarrow{n} (q_0, \beta', y') \rightarrow (q_0, \beta, y).$$

Fall 1: Die im letzten Schritt des Laufes verwendete Transition ist $(q_0, \varepsilon, B, q_0, CD)$.
Dann ist $y' = y$ und $\beta' = B\gamma$ und $\beta = CD\gamma$ für ein $\gamma \in \Gamma^*$.
Nach Induktionsannahme gilt

$$S \xrightarrow[L]{n} xB\gamma,$$

und weil $xB\gamma \underset{L}{\rightarrow} xCD\gamma$ gilt $S \xrightarrow[L]{n+1} x\beta$.

Fall 2: Die im letzten Schritt des Laufes verwendete Transition ist $(q_0, b, B, q_0, \varepsilon)$.

Dann ist $y' = by$ und $\beta' = B\beta$.

Wähle x' so, dass $x = x'b$. Nach Induktionsannahme gilt

$$S \xrightarrow[L]{n} x'B\beta,$$

und weil $x'B\beta \underset{L}{\rightarrow} x\beta$ gilt $S \xrightarrow[L]{n+1} x\beta$.

$\square$

Von Grammatiken zu PDAs

Korollar 7.23

Jede kontextfreie Sprache ist PDA-erkennbar.

Beweis.

Sei L eine kontextfreie Sprache und $L' = L \setminus \{\varepsilon\}$. Sei $\mathcal{G}$ eine kontextfreie Grammatik in CNF für L'.

Satz 7.22 $\implies$ $L' = L(\mathcal{A}_\mathcal{G})$.

Falls $L' = L$ ist damit L PDA-erkennbar.

Sonst können wir aus $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ leicht einen PDA konstruieren, der $L = L(\mathcal{A}_\mathcal{G}) \cup \{\varepsilon\}$ erkennt (Übung). $\square$

Von PDAs zu Grammatiken: Idee

Zu einem PDA
$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$$
wollen wir eine Grammatik $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ konstruieren.

- Als Nichtterminalsymbole in $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ benutzen wir ein Startsymbol S und Tripel der Form $[pZq]$ mit $p, q \in Q, Z \in \Gamma$.
- Die Regeln von $\mathcal{G}$ sollen folgendes leisten

$$[pZq] \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w \quad \Longleftrightarrow \quad (p, Z, w) \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

  Insbesondere:

$$[q_0 Z_0 q] \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w \text{ für ein } q \in Q$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A} \text{ akzeptiert } w \text{ mit leerem Stapel.}$$

- Wir nehmen also die Regel $S \to [q_0 Z_0 q]$ für jeden Zustand q hinzu.

Umsetzung

$\mathcal{A}$ habe eine Transition (p, a, Z, XY, p').

Dann kann $\mathcal{A}$ wie folgt von p nach q gelangen und dabei Z vom Stapel entfernen:

1. $\mathcal{A}$ liest das Eingabesymbol a und das Stapelsymbol Z, geht in den Zustand p' über und legt XY auf den Stapel.
2. $\mathcal{A}$ gelangt von p' zu einem Zwischenzustand p'' und entfernt dabei X vom Stapel.
3. $\mathcal{A}$ gelangt von p'' nach q und entfernt dabei Y vom Stapel.

Dieses Verhalten lässt sich in folgenden Regeln zusammenfassen:

$$[pZq] \to a[p'Xp''][p''Yq],$$

für alle $p'' \in Q$.

Dies geht analog auch für ε statt a.

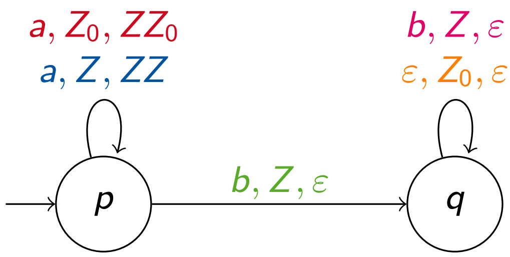
Definition 7.24

Sei $\mathcal{A} = \big(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0\big)$ ein PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert.

Die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (N, \Sigma, P, S)$ sei wie folgt definiert:

- S ist ein neues Symbol.
- $N := \{S\} \cup \{[pZq] \mid p, q \in Q, Z \in \Gamma\}$.
- $P := \Big\{[pZp_m] \to \sigma[p_0 Z_1 p_1][p_1 Z_2 p_2] \dots [p_{m-1} Z_m p_m] \;\Big|\; (p, \sigma, Z, p_0, Z_1 \dots Z_m) \in \Delta, m \geq 1, p_1, \dots, p_m \in Q\Big\}$
  $\cup \Big\{[pZp_0] \to \sigma \;\Big|\; (p, \sigma, Z, p_0, \varepsilon) \in \Delta\Big\}$.
  $\cup \Big\{S \to [q_0 Z_0 q] \;\Big|\; q \in Q\Big\}$.

$\mathcal{A}$



$G_{\mathcal{A}} = (N, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$N := \Big\{S, [pZ_0p], [pZ_0q], [pZp], [pZq], [qZ_0p], [qZ_0q], [qZp], [qZq]\Big\}$$

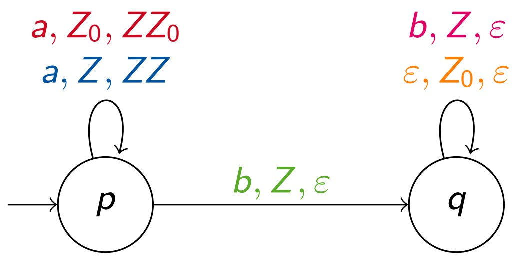
$$P := \left\{ \begin{array}{llll} S & \to [pZ_0p], & [pZp] & \to a[pZp][pZp], \\ S & \to [pZ_0q], & [pZp] & \to a[pZq][qZp], \\ [pZ_0p] & \to a[pZp][pZ_0p], & [pZq] & \to a[pZp][pZq], \\ [pZ_0p] & \to a[pZq][qZ_0p], & [pZq] & \to a[pZq][qZq], \\ [pZ_0q] & \to a[pZp][pZ_0q], & [pZq] & \to b, \\ [pZ_0q] & \to a[pZq][qZ_0q], & [qZq] & \to b, \\ & & [qZ_0q] & \to \varepsilon. \end{array} \right\}$$

$$N := \Big\{S, [pZ_0p], [pZ_0q], [pZp], [pZq], [qZ_0p], [qZ_0q], [qZp], [qZq]\Big\}$$

$$P := \left\{ \begin{array}{llll} S & \to [pZ_0p], & [pZp] & \to a[pZp][pZp], \\ S & \to [pZ_0q], & [pZp] & \to a[pZq][qZp], \\ [pZ_0p] & \to a[pZp][pZ_0p], & [pZq] & \to a[pZp][pZq], \end{array} \right.$$

Beispiel 7.25 (Forts.)

$\mathcal{A}$



$G_{\mathcal{A}}$ (vereinfacht)

$$
\begin{aligned}
S &\to [pZ_0p] \mid [pZ_0q],\\
[pZ_0p] &\to a[pZp][pZ_0p],\\
[pZ_0q] &\to a[pZp][pZ_0q] \mid a[pZq][qZ_0q],\\
[pZp] &\to a[pZp][pZp],\\
[pZq] &\to a[pZp][pZq] \mid a[pZq][qZq],\\
[pZq] &\to b,\\
[qZq] &\to b,\\
[qZ_0q] &\to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Beispiellauf

$$
\begin{aligned}
(p, Z_0, aabb) &\to (p, ZZ_0, abb)\\
&\to (p, ZZZ_0, bb)\\
&\to (q, ZZ_0, b)\\
&\to (q, Z_0, \varepsilon)\\
&\to (q, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Beispielableitung

$$
\begin{aligned}
S \to [pZ_0q] &\to a[pZq][qZ_0q]\\
&\to aa[pZq][qZq][qZ_0q]\\
&\to aab[qZq][qZ_0q]\\
&\to aabb[qZ_0q]\\
&\to aabb
\end{aligned}
$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ erzeugt $L(\mathcal{A})$

Satz 7.26

Sei $\mathcal{A}$ ein PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert. Dann gilt

$$L(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) = L(\mathcal{A}).$$

Korollar 7.27

Jede PDA-erkennbare Sprache ist kontextfrei.

Damit ist der Äquivalenzsatz 7.16 bewiesen.

Beweis von Satz 7.26 I

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$ ein PDA, der mit leerem Stapel akzeptiert.
$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ hat folgende Regeln:

- $S \to [q_0 Z_0 q]$ für alle $q \in Q$,
- $[pZp_m] \to \sigma[p_0 Z_1 p_1][p_1 Z_2 p_2] \dots [p_{m-1} Z_m p_m]$ für alle $(p, \sigma, Z, p_0, Z_1 \dots Z_m) \in \Delta$, wobei $m \geq 1$, und $p_1, \dots, p_m \in Q$.
- $[pZq] \to \sigma$ für alle $(p, \sigma, Z, q, \varepsilon) \in \Delta$.

Behauptung 1

Für alle $n \geq 1$, $p, q \in Q$, $Z \in \Gamma$ und $w \in \Sigma^*$ gilt

$$(p, Z, w) \xrightarrow{n}_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad [pZq] \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} w.$$

Beweis. Induktion über n.

Beweis von Satz 7.26 II

Induktionsanfang $n = 1$:

Gelte $(p, Z, w) \to (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Dann ist $w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(p, w, Z, q, \varepsilon) \in \Delta$.

Also $[pZq] \to w \in P$, und es gilt $[pZq] \xrightarrow{1} w$.

Induktionsschritt $1, \dots, n \to n+1$:

Gelte $(p, Z, w) \xrightarrow{n+1} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Sei $(p, \sigma, Z, Z_1 \dots Z_m, p_0)$ die im ersten Schritt verwendete Transition. Es gilt $m \geq 1$, denn sonst wäre der Stapel nach dem ersten Schritt leer und der Lauf würde abbrechen.

Sei $w' \in \Sigma^*$, so dass $w = \sigma w'$.

Dann gilt

$$(p, Z, w) \to (p_0, Z_1 \dots Z_m, w') \xrightarrow{n} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Also gibt es $w_1, \dots, w_m \in \Sigma^*$ und $p_1, \dots, p_m \in Q$, so dass $w' = w_1 \dots w_m$ und $p_m = q$ und

$$(p_{i-1}, Z_i, w_i) \xrightarrow{n_i} (p_i, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis von Satz 7.26 III

für geeignete $n_i \leq n$.
Nach Induktionsannahme gilt $[p_{i-1}Z_ip_i] \xrightarrow{*} w_i$.
Also nach dem Kombinationslemma 6.9 gilt

$$[pZq] \to \sigma[p_0Z_1p_1]\dots[p_{m-1}Z_mp_m] \xrightarrow{*} \sigma w_1 \dots w_m = w.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Behauptung 2

Für alle $n \geq 1$, $p, q \in Q$, $Z \in \Gamma$ *und* $w \in \Sigma^*$ *gilt*

$$[pZq] \xrightarrow{n}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w \quad \Longrightarrow \quad (p, Z, w) \xrightarrow{*}_\mathcal{A} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Beweis.Induktion über n.
Ähnlich wie der Beweis von Behauptung 1. □

Beweis von Satz 7.26 IV

Beweis des Satzes.
"$L(\mathcal{A}) \subseteq L(G_\mathcal{A})$": Sei $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w &\Longrightarrow \text{es gibt ein } q \text{ mit } (q_0, Z_0, w) \xrightarrow{*}_\mathcal{A} (q, \varepsilon, \varepsilon) \\ &\Longrightarrow S \to [q_0Z_0q] \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w \qquad \text{(nach Behauptung 1)} \\ &\Longrightarrow w \in L(\mathcal{G}_\mathcal{A}). \end{aligned}$$

"$L(\mathcal{A}) \supseteq L(G_\mathcal{A})$": Sei $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned} S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w &\Longrightarrow \text{es gibt ein } q \text{ mit } S \to_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} [q_0Z_0q] \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} w \\ &\Longrightarrow (q_0, Z_0, w) \xrightarrow{*}_\mathcal{A} (q, \varepsilon, \varepsilon) \qquad \text{(nach Behauptung 2)} \\ &\Longrightarrow \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

□

Abschnitt 7.3

Deterministische Kellerautomaten

Deterministische PDA's

Definition 7.28

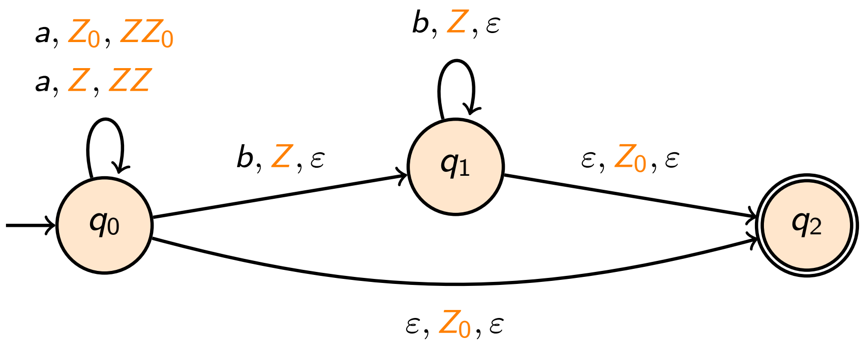
1. Ein PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ ist deterministisch (kurz: ein DPDA), wenn in jeder Konfiguration höchstens eine Transition anwendbar ist.

   Das heißt, für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ trifft höchstens eine der folgenden beiden Möglichkeiten zu:
   - es gibt genau ein $r \in Q$ und genau ein $\gamma \in \Gamma^*$, so dass $(q, a, Z, r, \gamma) \in \Delta$;
   - es gibt genau ein $r \in Q$ und genau ein $\gamma \in \Gamma^*$, so dass $(q, \varepsilon, Z, r, \gamma) \in \Delta$.

2. Eine Sprache L ist DPDA-erkennbar, wenn es einen DPDA gibt, der L erkennt.

Beispiel 7.29 I

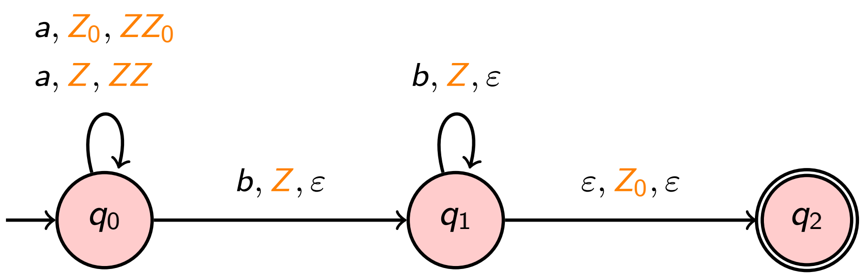
Wir betrachten noch einmal den PDA



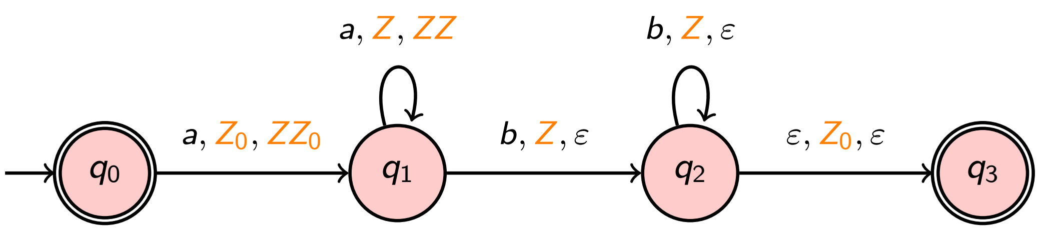
aus Beispiel 7.4, der die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ erkennt.
Dieser PDA ist kein DPDA, weil in der Konfiguration (q_0, Z_0, a) zwei Transitionen möglich sind.

Folgende Variante des PDA ist ein DPDA; er erkennt die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

Beispiel 7.29 II



Ein DPDA für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ erhalten wir durch Hinzufügen eines neuen Zustands:



Satz 7.30

1. *Jede DPDA-erkennbare Sprache ist kontextfrei.*
2. *Jede reguläre Sprache ist DPDA-erkennbar.*
3. *Es gibt DPDA-erkennbare Sprachen, die nicht regulär sind.*
4. *Es gibt kontextfreie Sprachen, die nicht DPDA-erkennbar sind.*

Beweis (Ideen)

1. *Jede DPDA-erkennbare Sprache ist kontextfrei.*
   Jeder DPDA ist ein PDA, also ist auch jede DPDA-erkennbare Sprache PDA-erkennbar und damit kontextfrei.

2. *Jede reguläre Sprache ist DPDA-erkennbar.*
   Jeder DFA lässt sich durch eine DPDA simulieren, der den Stapel nicht verwendet.

3. *Es gibt DPDA-erkennbare Sprachen, die nicht regulär sind.*
   Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist ein Beispiel.

4. *Es gibt kontextfreie Sprachen, die nicht DPDA-erkennbar sind.*
   Die Sprache L_P der Palindrome über $\{a, b\}$ ist ein Beispiel (ohne Beweis).