Übungsblatt 5

Abgabetermin: 21.05.2014

Tutoraufgabe 1 (Abschlusseigenschaften FA-erkennbarer Sprachen)

Sei Σ ein Alphabet. Für Wörter $x = a_1 \ldots a_n$ und $y = b_1 \ldots b_n$ über Σ, wobei $a_i, b_i \in \Sigma$, bezeichnen wir das Wort

$$x \diamond y := a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n$$

als die *perfekte Mischung* von x mit y.
Für zwei Sprachen K und L über Σ sei die *perfekte Mischung von K mit L* die Sprache

$$K \Diamond L := \{x \diamond y \mid x \in K \text{ und } y \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Klasse der FA-erkennbaren Sprachen unter perfekter Mischung abgeschlossen ist.

Tutoraufgabe 2 (rekursive Definitionen - 1)

Die Sprache L über dem Alphabet $\{a, b\}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel: $\varepsilon \in L$.

Rekursive Regel: Wenn $w \in L$, dann $awb \in L$.

Zeigen Sie per Induktion, dass $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Tutoraufgabe 3 (rekursive Definitionen - 2)

Die Menge $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel: $(1, 99) \in M$.

Rekursive Regeln:

(1) Wenn $(x, y) \in M$, dann $(x + 2, y) \in M$.

(2) Wenn $(x, y) \in M$, dann $(x, -y) \in M$.

(3) Wenn $(x, y) \in M$, dann $(y, x) \in M$.

a) Geben Sie eine Ableitung von $(97, -3)$ an.

b) Finden Sie eine einfache Beschreibung von M und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Beschreibung.

Tutoraufgabe 4 (rekursive Definitionen - 3)

Wir betrachten die Sprachen `BIN` und `LIST(BIN)` aus der Vorlesung.

<u>Rekursive Definition von `BIN`</u>:

> **Basisregeln:** $\texttt{0,1} \in \texttt{BIN}$.
>
> **Rekursive Regeln:** Für alle $w \in \Sigma^*_{\text{ASCII}} \setminus \{\texttt{0}\}$:
> Wenn $w \in \texttt{BIN}$, dann $w\texttt{0}, w\texttt{1} \in \texttt{BIN}$.

<u>Rekursive Definition von `LIST(BIN)`</u>:

> **Basisregel:** $\texttt{nil} \in \texttt{LIST(BIN)}$.
>
> **Rekursive Regeln:** Für alle $v \in \texttt{BIN}$ und $w \in \Sigma^*_{\text{ASCII}}$:
> Wenn $w \in \texttt{LIST(BIN)}$, dann $\texttt{cons(}v,w\texttt{)} \in \texttt{LIST(BIN)}$.

Die Sprache `LIST(BIN)` representiert Listen ähnlich zu dem Syntax der Programmiersprache Lisp. (Siehe auch `http://en.wikipedia.org/wiki/Cons`.)

a) Definieren Sie rekursiv über den Aufbau von `LIST(BIN)` die Abbildung

$$\texttt{concatenate} : \texttt{LIST(BIN)} \times \texttt{LIST(BIN)} \to \texttt{LIST(BIN)},$$

die zwei Listen zu einer einzigen Liste zusammenfügt.

Es soll z.B. gelten:

$\texttt{concatenate(cons(0,cons(11,nil)),cons(101,nil))} = \texttt{cons(0,cons(11,cons(101,nil)))}$

b) Definieren Sie rekursiv die Sprache `HLIST(BIN)` der Haskell-Listen. Dabei wird z.B. die Liste "10,111,0,1,10" von dem Wort

$$\texttt{10:111:0:1:10:[]} \in \texttt{HLIST(BIN)}$$

repräsentiert.

Definieren Sie rekursiv über den Aufbau von `HLIST(BIN)` die Abbildung

$$\text{HaskellToLisp} : \texttt{HLIST(BIN)} \to \texttt{LIST(BIN)},$$

die die Sprache `HLIST(BIN)` in die Sprache `LIST(BIN)` übersetzt.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 5 (Abschlusseigenschaften FA-erkennbarer Sprachen) **6**

Sei Σ ein Alphabet. Seien w, x, y Wörter über Σ.
Dann ist w *eine Mischung von x und y*, wenn es Wörter $x_i, y_i \in \Sigma^*$ gibt mit

$$x = x_1 \dots x_n, \quad y = y_1 \dots y_n, \quad n \geq 1,$$

sodass

$$w = x_1y_1, \dots, x_ny_n.$$

Für zwei Sprachen K und L über Σ bezeichnen wir die Sprache

$$\{w \in \Sigma^* \mid \text{ Es gibt } x \in K \text{ und } y \in L, \text{ sodass } w \text{ eine Mischung von } x \text{ und } y \text{ ist.}\}.$$

als die *Mischung von K und L*.

Zeigen Sie, dass die Klasse der FA-erkennbaren Sprachen unter Mischung abgeschlossen ist.

Aufgabe 6 (rekursive Definitionen - 1) **2+4=6**

Sei Σ ein Alphabet. Sei Σ^* rekursiv wie im Beispiel 3.9 definiert. Sei $s : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Abbildung, die jedes Wort $a_1a_2 \dots a_n$ auf seine Spiegelung $a_na_{n-1} \dots a_1$ abbildet.

a) Definieren Sie die Abbildung s rekursiv über den Aufbau von Σ^*.

b) Zeigen Sie, dass $s(xy) = s(y)s(x)$ für alle Wörter $x, y \in \Sigma^*$.

Hinweis: Gehen Sie dabei wie folgt vor. Zeigen Sie für jedes Wort $x \in \Sigma^*$ per Induktion über den Aufbau von Σ^*, dass

$$s(xy) = s(y)s(x) \text{ für alle Wörter } y \in \Sigma^*.$$

Aufgabe 7 (rekursive Definitionen - 2) **1+(2+3)=6**

Die Menge $L \subseteq \{a, b\}^*$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel: $ab \in L$.

Rekursive Regeln:

(1) Für alle $w \in \{a, b\}^*$: Wenn $w \in L$, dann $ww \in L$.

(2) Für alle $v, w \in \{a, b\}^*$: Wenn $vaw \in L$, dann $v \in L$.

a) Geben Sie eine Ableitung von $ababab$ an.

b) Zeigen Sie, dass $L = \{ab\}^*$. Gehen Sie dabei wie folgt for:

- Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Wort $(ab)^n$ in L liegt.
- Zeigen Sie per Induktion über den Aufbau von L:

  für alle $w \in L$ gilt $w = (ab)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.