Prof. Dr. M. Grohe

C. Aschermann, E. Selman, S. Winter

Präsenzübung mit Lösungen

05.06.2014

Aufgabe 1 **7+7+7=21 Punkte**

Wir betrachten die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b, c\}$.

a) $L_1 := \{w \mid w$ hat $bbac$ **nicht** als Infix.$\}$

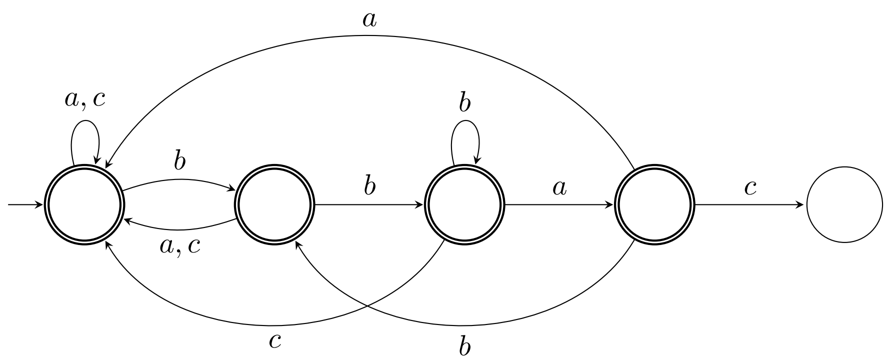
b) $L_2 := \{w \mid w$ hat aa als Infix oder w hat bc als Suffix.$\}$

c) $L_3 := L(r)$ für den regulären Ausdruck $r = (a + bc)^*ab$

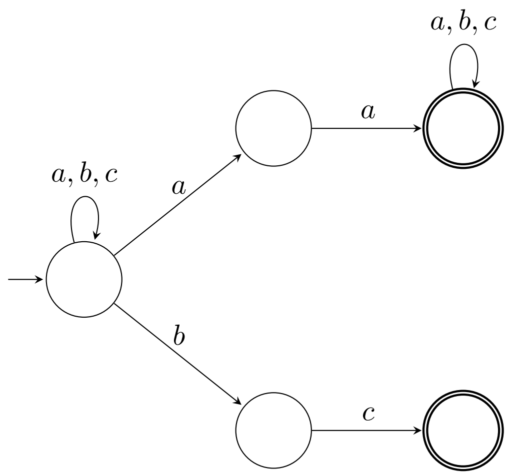
Geben Sie jeweils einen NFA an, der die gegebene Sprache erkennt.

Lösung:

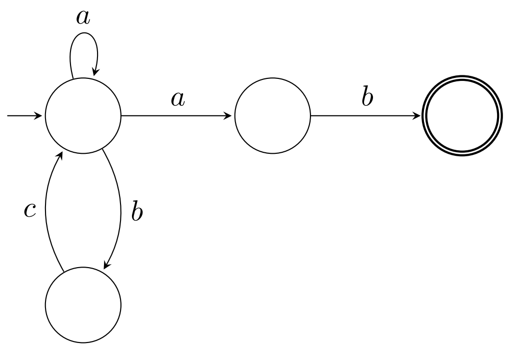
a)



b)



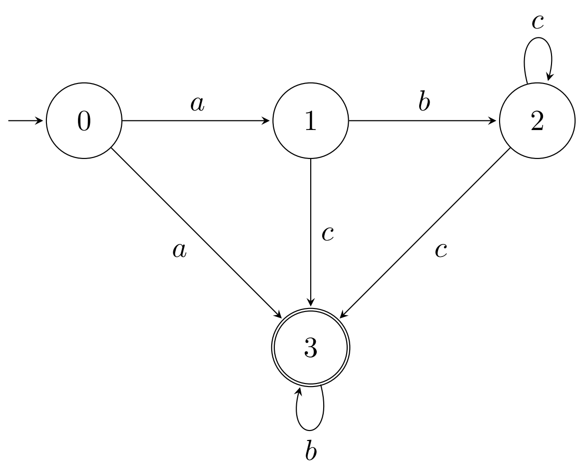
c)


a
a
b
c
b

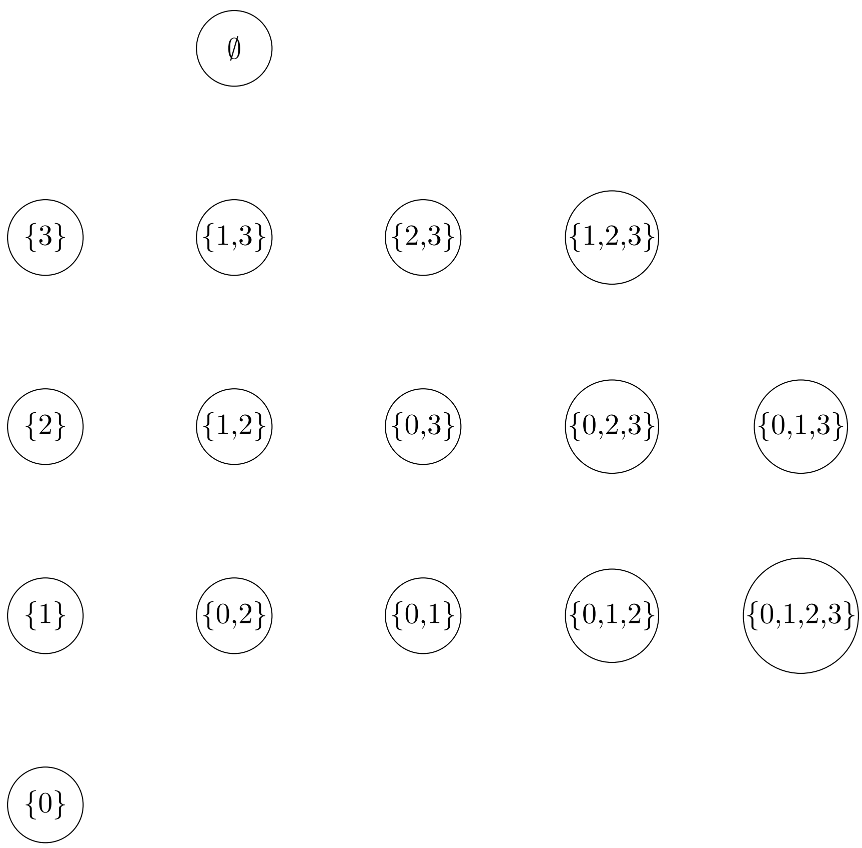
Name: Matrikelnummer:

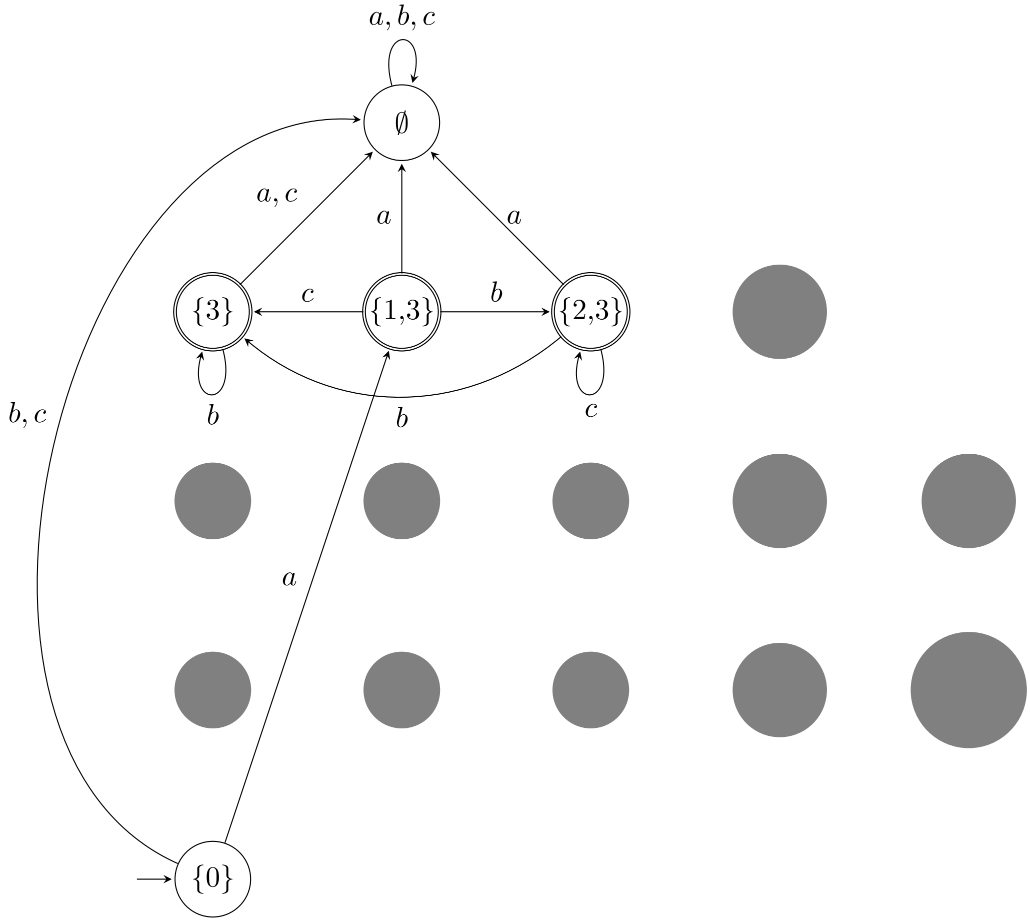
Aufgabe 2 **12 Punkte**

Bestimmen sie durch die Potenzmengenkonstruktion einen DFA, der dieselbe Sprache erkennt wie der folgende NFA.



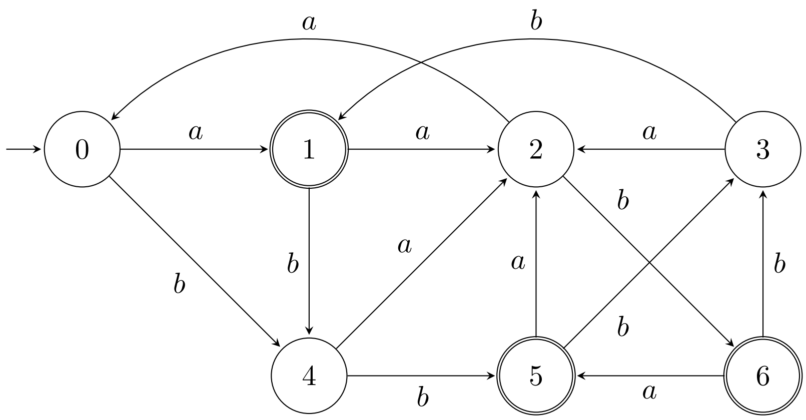
Lösung:
Tragen sie den Startzustand, die Endzustände und die Transitionen in den folgenden Vordruck ein. Streichen Sie die unerreichbaren Zustände durch.




a, b, c
$\emptyset$
a, c
a
a
$\{3\}$
c
$\{1,3\}$
b
$\{2,3\}$
b
b
c
b, c
a
$\{0\}$

Aufgabe 3 **14+4=18 Punkte**

Wir betrachten den folgenden DFA $\mathcal{A}$.

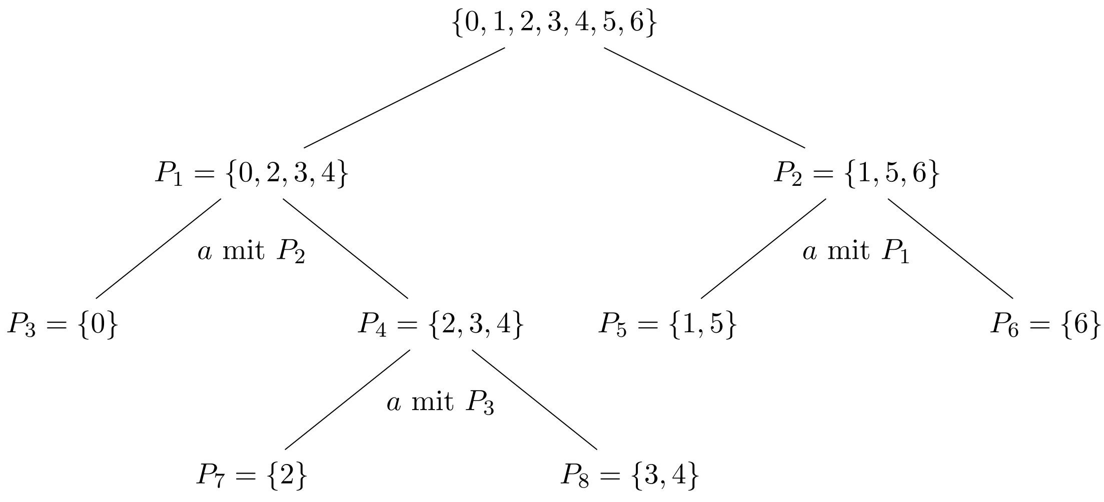


a) Berechnen Sie den minimalen DFA für $L(\mathcal{A})$.

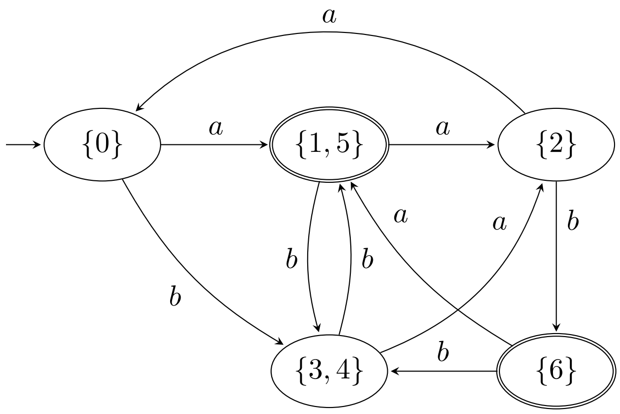
b) Geben Sie zu jeder Myhill-Nerode Äquivalenzklasse für $L(\mathcal{A})$ genau ein Element aus dieser Klasse an.

Lösung:

a) Mit dem Verfeinerungsalorithmus erhalten wir:



Daraus ergibt sich dann der folgende minimale DFA $\mathcal{A}'$.



b) z.B. $\varepsilon, a, b, aa, aab$

Aufgabe 4 **8+8+8=24 Punkte**

Sind folgende Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ regulär? Beweisen Sie jeweils, dass die Sprache nicht regulär ist oder geben Sie einen endlichen Automaten an, der die Sprache akzeptiert.

a) $L_1 := \{wb^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } |w| = k\}$

b) $L_2 := \{a^j b^k \mid 0 \leq j < k\}$

c) $L_3 := \{w \mid \text{Wenn } |w|_a > 1, \text{ dann } |w|_b > 1.\}$

Lösung:

a)

$$L_1 := \{wb^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } |w| = k\} \text{ über dem Alphabet } \{a, b\}$$

L_1 ist nichtregulär.

Der Beweis ist durch Widerspruch.

Angenommen: Die Sprache L_1 ist regulär.

Dann existiert wegen des Pumping Lemmas eine Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $w \in L_1$ mit $|w| \geq n$ sich zerlegen lässt als $w = xyz$ mit

(i) $y \neq \varepsilon$,

(ii) $|xy| \leq n$,

(iii) $xy^k z \in L_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Betrachte das Wort $a^n b^n \in L_1$. Es hat die Länge $\geq n$.

Sei xyz eine Zerlegung von $a^n b^n$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii).

Wegen (i) und (ii) gibt es ein $i \geq 1$, sodass $y = a^i$.

Jetzt schauen wir uns die Eigenschaft (iii) an. Wähle $k = 2$. Wegen $i \geq 1$ gilt $xy^2 z = a^{n+i} b^n \notin L_1$ im Widerspruch zu (iii). (Es geht nicht mit $k = 0$. Falls i gerade ist, gilt $xy^0 z = a^{n-i} b^n \in L_1$.) Also ist die Annahme falsch, d.h. L_1 ist nichtregulär.

b)

$$L_2 := \{a^j b^k \mid j < k\} \text{ über dem Alphabet } \{a, b\}.$$

L_2 ist nichtregulär.

Der Beweis ist durch Widerspruch.

Angenommen: Die Sprache L_2 ist regulär.

Dann existiert wegen des Pumping Lemmas eine Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $w \in L_2$ mit $|w| \geq n$ sich zerlegen lässt als $w = xyz$ mit

(i) $y \neq \varepsilon$,

(ii) $|xy| \leq n$,

(iii) $xy^k z \in L_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Betrachte das Wort $a^n b^{n+1} \in L_2$. Es hat die Länge $\geq n$.

Sei xyz eine Zerlegung von $a^n b^{n+1}$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii).

Wegen (i) und (ii) gibt es ein $i \geq 1$, sodass $y = a^i$.

Jetzt schauen wir uns die Eigenschaft (iii) an. Wähle $k = 2$. Wegen $i \geq 1$ gilt $xy^2z = a^{n+i}b^{n+1} \notin L_2$ im Widerspruch zu (iii). (Es geht nicht mit $k = 0$.) Also ist die Annahme falsch, d.h. L_2 ist nichtregulär.

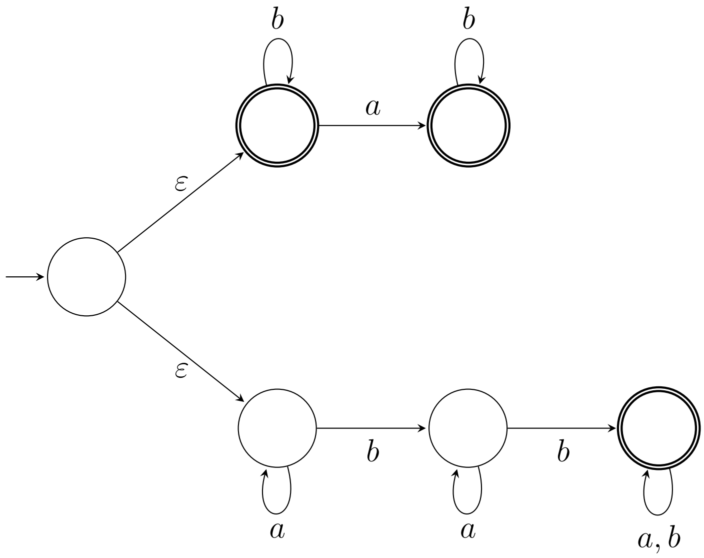
c)

$$L_3 := \{w \mid \text{Wenn } |w|_a > 1, \text{ dann } |w|_b > 1.\} \text{ über dem Alphabet } \{a, b\}.$$

L_3 ist regulär.

Beachte, dass $L_3 = \{w \mid |w|_a \leq 1 \text{ oder } |w|_b > 1\}$.

Folgender ε-NFA erkennt L_3.



Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Sei L eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die Sprache

$$L_{\text{Präfix}} = \{w \mid w \text{ ist Präfix eines Wortes in } L\}$$

regulär ist.

Es reicht, wenn Sie ausgehend von einem NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$, der L erkennt, einen NFA $\mathcal{A}'$ konstruieren, der $L_{\text{Präfix}}$ erkennt. Erklären Sie kurz die Idee Ihrer Konstruktion.

Lösung:

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ ein NFA der die Sprache L erkennt.

Dann erkennt der NFA $\mathcal{A}' := (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F')$ die Sprache L_{Prafix}, wobei

$$F' := \{p \in Q \mid \text{Es gibt } v \in \Sigma^* \text{ und } q \in F, \text{ so dass } \mathcal{A} : p \xrightarrow{v} q\},$$

m.a.W. ist F' die Menge aller Zustände, von denen aus ein Endzustand (von $\mathcal{A}$) erreichbar ist.

Behauptung: $L(\mathcal{A}') = L_{\text{Präfix}}$:

"$\subseteq$": Ist $w \in L(\mathcal{A}')$, dann $\mathcal{A}' : q_0 \xrightarrow{w} p$ für ein $p \in F'$.

Nach der Definition von F' gibt es dann $v \in \Sigma^*$ und $q \in F$, sodass $\mathcal{A} : p \xrightarrow{v} q$.

Dann gilt $\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{w} p \xrightarrow{v} q$.

Also $wv \in L$ und damit $w \in L_{\text{Präfix}}$.

"$\supseteq$": Sei $w \in L_{\text{Präfix}}$.

Dann gibt es ein $x \in \Sigma^*$, sodass $wx \in L$.

Seien $p \in Q$ und $q \in F$ so, dass $\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{w} p \xrightarrow{x} q$.

Wegen $\mathcal{A} : p \xrightarrow{x} q$ und $q \in F$ gilt $p \in F'$.

Mit $\mathcal{A}' : q_0 \xrightarrow{w} p$ folgt dann $w \in L(\mathcal{A}')$.

Aufgabe 6 **4+3+8=15 Punkte**

Sei L die Sprache, die von der folgenden Grammatik erzeugt wird.

$$S \to aBb$$
$$B \to baBB$$
$$B \to b$$

a) Geben Sie an, ob die folgenden Wörter in der Sprache L liegen.
(Ohne Begründung)

1. $babbb$
2. abb
3. $ababab bbb$
4. $ababbbab$

b) Geben Sie eine Ableitung des Wortes $ababbabbb$ an.

c) Beweisen Sie per Induktion über die Länge der Ableitung, dass für jedes Terminalwort $w \in L$ gilt: $|w|_b$ ist gerade.

Lösung:

a) Nur 2. und 3. sind in L.

b) $\underline{S} \to a\underline{B}b \to aba\underline{B}Bb \to abab\underline{B}b \to ababba\underline{B}Bb \to ababbab\underline{B}b \to ababbabbb$

c) Per Induktion über n zeigen wir folgende Behauptung.

Für jede Satzform β mit $S \xrightarrow{n} \beta$ gilt: $|\beta|_b + |\beta|_B$ ist gerade.

Induktionsanfang: Ist $n = 0$, dann $\beta = S$ und es gilt $|S|_b + |S|_B = 0$.

Induktionsschritt: Sei $S \xrightarrow{n+1} \beta$ für ein $n \geq 0$ und eine Satzform β.

Dann gibt es eine Satzform α, so dass $S \xrightarrow{n} \alpha \to \beta$.

Für die Regel, die im letzten Schritt $\alpha \to \beta$ angewendet wird, machen wir folgende Fallunterschiedung:

1. Es gilt $\alpha = \gamma_1\underline{S}\gamma_2 \to \gamma_1 aBb\gamma_2 = \beta$. Dann $|\beta|_b + |\beta|_B = |\alpha|_b + |\alpha|_B + 2$.
2. Es gilt $\alpha = \gamma_1\underline{B}\gamma_2 \to \gamma_1 baBB\gamma_2 = \beta$. Dann $|\beta|_b + |\beta|_B = |\alpha|_b + |\alpha|_B + 2$.
3. Es gilt $\alpha = \gamma_1\underline{B}\gamma_2 \to \gamma_1 b\gamma_2 = \beta$. Dann $|\beta|_b + |\beta|_B = |\alpha|_b + |\alpha|_B$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $|\alpha|_b+|\alpha|_B$ gerade. Daraus folgt, dass $|\beta|_b + |\beta|_B$ in allen der drei Fällen gerade ist.