Prof. Dr. M. Grohe C. Aschermann, E. Selman, S. Winter

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 04.06.2014

Tutoraufgabe 1 (Nichtreguläre Sprachen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nichtregulär sind.

a) $L = \{a^j b^j c^j \mid j \geq 0\}$

b) $K = \{a^j b^k c^k \mid j \geq 1, k \geq 0\} \cup \{b^j c^k \mid j, k \geq 0\}$

Tutoraufgabe 2 (Die Umkehrung des Pumping Lemmas gilt nicht)

Zeigen Sie, dass die Umkehrung des Pumping Lemmas (Lemma 4.30) nicht gilt. Benutzen Sie dazu die Sprache

$$K = \{a^j b^k c^k \mid j \geq 1, k \geq 0\} \cup \{b^j c^k \mid j, k \geq 0\}$$

aus Tutoraufgabe 1.

Hinweis: Das Pumping Lemma hat die Form:

$$K \text{ ist regulär} \Longrightarrow \text{Es gibt eine Zahl } n \geq 1 \ldots$$

Sie müssen zeigen, dass die Umkehrung dieser Implikation nicht gilt.

Tutoraufgabe 3 (Myhill-Nerode Äquivalenz)

Sei L die Sprache der Wörter gerader Länge über dem Alphabet $\{a, b\}$, die mindestens ein a enthalten, d.h.

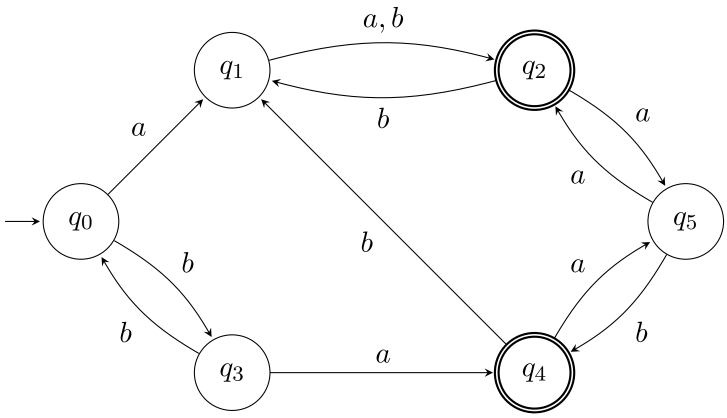
$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist gerade und } |w|_a \geq 1\}.$$

a) Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim_L$ an. Was ist $\text{index}(L)$?

b) Geben Sie für jedes Paar $v_{/L}$, $w_{/L}$ von $\sim_L$-Äquivalenzklassen jeweils ein trennendes Wort $x \in \{a, b\}^*$ an, d.h. ein Wort x, so dass $vx \in L$ gdw. $wx \notin L$.

c) Geben Sie den Myhill-Nerode DFA für L an.

d) Der folgende Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert die Sprache L.



Minimieren Sie $\mathcal{A}$ mit dem Verfeinerungsalgorithmus. Schreiben Sie dazu für jeden Schritt die entstandenen Klassen auf.
Geben Sie den minimalen Automaten $\widetilde{\mathcal{A}}$ an.

e) Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathcal{A}_L$ nach $\widetilde{\mathcal{A}}$ an.

⋆⋆⋆⋆⋆

Aufgabe 4 (Nichtreguläre Sprachen) **3+3=6**

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nichtregulär sind.

a) Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ über dem Alphabet $\{a\}$

b) Die Sprache $K = \{a^n b^m a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$

Aufgabe 5 (Eine Variation des Pumping Lemmas) **3+3=6**

a) Zeigen sie die folgende Variation des Pumping Lemmas:
Sei L regulär. Dann gibt es eine Zahl $n \geq 1$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ zerlegbar ist in Wörter x, y, z mit $w = xyz$, die die folgenden Eigenschaften haben

(i) $y \neq \varepsilon$,

(ii) $|yz| \leq n$,

(iii) $xy^k z \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Benutzen Sie dieses Lemma, um zu zeigen, dass die Sprache

$$K = \{a^j b^k c^k \mid j \geq 1, k \geq 0\} \cup \{b^j c^k \mid j, k \geq 0\}$$

aus der Tutoraufgabe 2 nichtregulär ist.

Aufgabe 6 (Myhill-Nerode Äquivalenz) 3+3+2+3+1=12

Die Sprache L über dem Alphabet $\{a, b\}$ bestehe aus den Wörtern, die mit a anfangen und eine gerade Anzahl von bs enthalten, d.h.

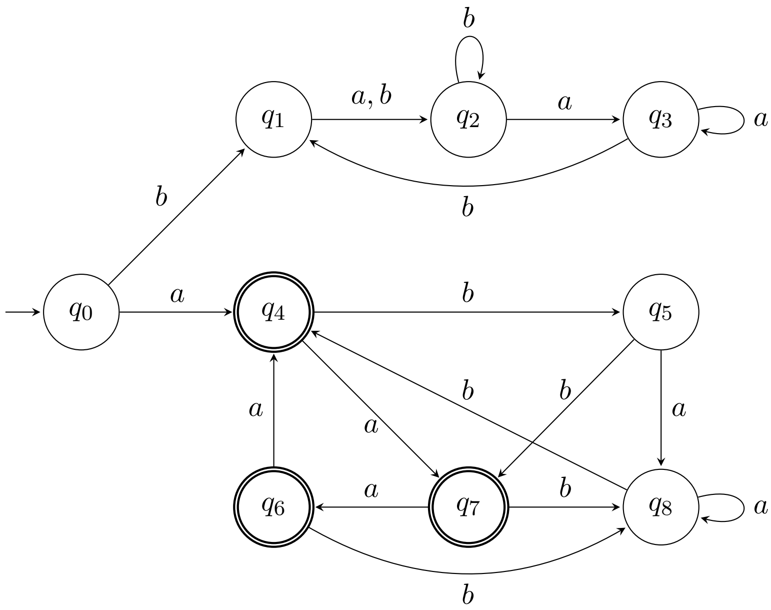
$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = av \text{ für ein Wort } v \in \{a, b\}^* \text{ und } |w|_b \text{ ist gerade.}\}.$$

a) Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim_L$ an. Was ist $\text{index}(L)$?

b) Geben Sie für jedes Paar $v_{/L}$, $w_{/L}$ von $\sim_L$-Äquivalenzklassen jeweils ein trennendes Wort $x \in \{a, b\}^*$ an, d.h. ein Wort x, so dass $vx \in L$ gdw. $wx \notin L$.

c) Geben Sie den Myhill-Nerode DFA für L an.

d) Der folgende Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert die Sprache L.



Minimieren Sie $\mathcal{A}$ mit dem Verfeinerungsalgorithmus. Schreiben Sie dazu für jeden Schritt die entstandenen Klassen auf.
Geben Sie den minimalen Automaten $\widetilde{\mathcal{A}}$ an.

e) Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathcal{A}_L$ nach $\widetilde{\mathcal{A}}$ an.