Kapitel 4
Reguläre Sprachen

Abschnitt 4.1
Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind ein Formalismus, um Sprachen zu beschreiben, und zwar nicht als Ergebnisse von Berechnungen, wie es endliche Automaten tun, sondern „direkt“, oder deklarativ.

Sie verwenden dazu die Operationen auf Sprachen, die wir bereits kennengelernt haben: Mengenoperationen, Verkettung, Iteration.

Beispiel 4.1

Der reguläre Ausdruck

$$a(a+b)^*bb$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ beschreibt die Sprache über Σ, die aus allen Wörtern besteht die mit einem a beginnen und mit zwei bs enden.

Beispiel 4.2

Der folgende reguläre Ausdruck in UNIX BRE (Basic Regular Expression) Syntax, wie sie zum Beispiel vom Befehl `grep` verwendet wird, beschreibt Emailadressen der RWTH Aachen:

```
[a-z0-9\.-]*@[a-z0-9\.-]*\.rwth-aachen\.de
```

(nur solche, die aus Kleinbuchstaben, Ziffern, Punkten, und Bindestrichen bestehen).

Definition 4.3

Sei Σ ein Alphabet. Die Menge RA_Σ der regulären Ausdrücke über Σ is rekursiv wie folgt definiert.

Basisregeln.

- $\emptyset \in \mathrm{RA}_\Sigma$,
- $\varepsilon \in \mathrm{RA}_\Sigma$,
- $a \in \mathrm{RA}_\Sigma$ für alle $a \in \Sigma$.

Rekursive Regeln.

- Wenn $r, s \in \mathrm{RA}_\Sigma$, dann $(r + s) \in \mathrm{RA}_\Sigma$.
- Wenn $r, s \in \mathrm{RA}_\Sigma$, dann $(r \cdot s) \in \mathrm{RA}_\Sigma$.
- Wenn $r \in \mathrm{RA}_\Sigma$, dann $r^* \in \mathrm{RA}_\Sigma$.

Beispiel 4.4

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

$$\emptyset, \quad (((\varepsilon + a) \cdot b) + (b \cdot c)^*)^*, \quad a^{**} \in \mathrm{RA}_\Sigma\,.$$

Bei Angabe konkreter Ausdrücke erlauben wir:

- Weglassen des Punktes $\cdot$
- Weglassen von Außenklammern
- Weglassen von Klammern, soweit nach folgenden Präzedenzregeln überflüssig:
  - * bindet stärker als $\cdot$,
  - $\cdot$ bindet stärker als $+$.
- Weglassen von Klammern bei Mehrfach-Summen, Mehrfach-Produkten
- Große Summenzeichen: für eine Menge $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Sigma$ schreiben wir

$$\sum_{a \in S} a \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \quad \text{statt} \quad (a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Beispiel 4.5

Statt $(((a \cdot b^*) + b) + a)$ schreiben wir $ab^* + b + a$

Reguläre Ausdrücke sollen Sprachen beschreiben. Um also die Semantik zu definieren, müssen wir jedem regulären Ausdruck eine Sprache zuordnen.

Definition 4.6

Rekursiv über den Aufbau von RA_Σ definieren wir eine Funktion L, die jedem regulären Ausdruck $r \in \mathrm{RA}_\Sigma$ eine Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$ zuordnet:

Rekursionsanfang.

- $L(\emptyset) := \emptyset$,
- $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
- $L(a) := \{a\}$ für alle $a \in \Sigma$.

Rekursionsschritt. Für alle $r, s \in \mathrm{RA}_\Sigma$,

- $L((r + s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $L((r \cdot s)) := L(r)L(s)$,
- $L(r^*) := L(r)^*$.

Beispiele 4.7

Von regulären Ausdrücken zu Ihren Sprachen.

- $r_1 = aaa^*$ über $\Sigma_1 = \{a\}$.
  $L(r_1)$ ist die Menge aller Wörter in Σ_1^* der Länge mindestens 2.
- $r_2 = a^* + b^* + c^*$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$
  $L(r_2)$ ist die Menge aller Wörter in Σ_2^*, in denen höchstens einer der drei Buchstaben vorkommt.
- $r_3 = (0^*1^*)^*$ über $\Sigma_3 = \{0, 1\}$.
  $L(r_3) = \Sigma_3^*$.
- $r_4 = 0 + 1(0 + 1)^*$ über Σ_{ASCII}.
  $L(r_4) = \texttt{BIN}$ (vgl. Beispiel 3.6)
- $r_5 = (a^*b)^*$ über $\Sigma_5 = \{a, b\}$
  $L(r_5)$ besteht aus dem leeren Wort und allen Wörtern in Σ_5^*, die mit b enden.

Ein Beweis I

$r_5 = (a^* b)^*$ über $\Sigma_5 = \{a, b\}$.

Behauptung

Für alle $w \in \Sigma_5^*$:

$$w \in L(r_5) \iff w = \varepsilon \text{ oder } w \text{ endet mit } b.$$

Beweis. Es gilt

$$L(r_5) = (\{a\}^*\{b\})^* = \bigcup_{n \geq 0} (\{a\}^*\{b\})^n. \qquad (\star)$$

„$\Longrightarrow$“: Sei $w \in L(r_5)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $w \in (\{a\}^*\{b\})^n$.

Wenn $w \in (\{a\}^*\{b\})^0$, so ist $w = \varepsilon$.

Sonst sei $n \geq 1$ so, dass $w \in (\{a\}^*\{b\})^n$. Nach Beobachtung 1.27 ist

$$w = v_1 \dots v_n$$

Ein Beweis II

für geeignete $v_1, \dots, v_n \in \{a\}^*\{b\}$.

Wiederum nach Beobachtung 1.27 gibt es ein $m \geq 0$, so dass

$$v_n \in \{a\}^m\{b\},$$

das heißt, $v_n = a^m b$. Also ist der letzte Buchstabe von v_n ein b.
Der letzte Buchstabe von v_n ist aber auch der letzte Buchstabe von w.

„$\Longleftarrow$“: Sei $w \in \Sigma_5^*$, so dass $w = \varepsilon$ oder dass der letzte Buchstabe von w ein b ist.

Wenn $w = \varepsilon$, so ist $w \in (\{a\}^*\{b\})^0 \subseteq (\{a\}^*\{b\})^* = L(r_5)$.

Sonst ist $w = a_1 \dots a_n$ für ein $n \geq 1$ und $a_1, \dots, a_n \in \Sigma_5$.

Sei $i_0 := 0$, und seien $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Indizes der bs in w, d.h., $a_{i_j} = b$ für $1 \leq j \leq k$ und $a_i = a$ für $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.
Für $1 \leq j \leq k$ sei

$$v_j := a_{i_{j-1}+1} \dots a_{i_j}.$$

Weil der letzte Buchstabe von w ein b ist gilt $i_k = n$, also ist

$$w = v_1 \dots v_k.$$

Außerdem gilt

$$v_j = a_{i_{j-1}+1} \dots a_{i_j} = \underbrace{a \dots a}_{i_j - i_{j-1} - 1 \text{ mal}} \; b \in \{a\}^*\{b\}.$$

Damit

$$w \in (\{a\}^*\{b\})^k \subseteq (\{a\}^*\{b\})^* = L(r_5).$$

□

Beispiele 4.8

Von Sprachen zu regulären Ausdrücken.

- L_1 sei die Menge aller Wörter über $\Sigma_1 := \{0, 1\}$, die 1101 als Infix enthalten.

  $L_1 = L(r_1)$ für $r_1 = (0 + 1)^*1101(0 + 1)^*$.

- `INT` sei die Menge der Dezimaldarstellungen ganzer Zahlen über dem Alphabet Σ_{ASCII}.

  Wir definieren zunächst den Hilfsausdruck

  $$z := (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).$$

  Dann ist $\texttt{INT} = L(r)$ für

  $$r = 0 + (\varepsilon + -)z(0 + z)^*.$$

- Sei Σ ein beliebiges Alphabet, etwa $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$.

  Dann ist

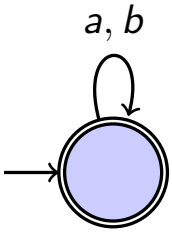
  $$\Sigma^* = L\big((a_1 + a_2 + \dots + a_k)^*\big).$$

Definition 4.9

1. Zwei reguläre Ausdrücke r, s sind äquivalent (wir schreiben $r \equiv s$), wenn $L(r) = L(s)$.
2. Ein regulärer Ausdruck r und ein endlicher Automat (DFA, NFA oder ε-NFA) sind äquivalent, wenn $L(r) = L(\mathcal{A})$.

Beispiel 4.10

Die regulären Ausdrücke $(a + b)^*$ und $(a^* b^*)^*$ sind äquivalent, und sie sind äquivalent zum DFA



Definition 4.11

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist regulär, wenn es einen regulären Ausdruck $r \in \mathrm{RA}_\Sigma$ gibt, so dass $L = L(r)$.

Satz 4.12

Jede reguläre Sprache ist FA-erkennbar.

Beweis des Satzes I

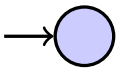
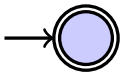
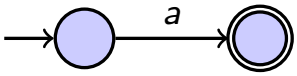
Wir zeigen induktiv über den Aufbau eines regulären Ausdrucks $r \in \mathrm{RA}_\Sigma$, dass $L(r)$ FA-erkennbar ist.

Induktionsanfang.

Behauptung: $L(\emptyset)$, $L(\varepsilon)$ und $L(a)$ für $a \in \Sigma$ sind FA-erkennbar.

Beweis: Alle endlichen Sprachen sind FA-erkennbar.

Im Einzelnen:

- $L(\emptyset) = \emptyset$ wird erkannt durch den NFA 
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ wird erkannt durch den NFA 
- $L(a) = \{a\}$ wird erkannt durch den NFA 

Beweis des Satzes II

Induktionsschritt. Seien $r, s \in \mathrm{RA}_\Sigma$.

Induktionsannahme: $L(r)$ und $L(s)$ sind FA-erkennbar.

Behauptung: $L(r + s)$, $L(rs)$ und $L(r^*)$ sind FA-erkennbar.

Beweis:

- $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$ ist FA-erkennbar nach Satz 2.40(2).
- $L(r \cdot s) = L(r)L(s)$ ist FA-erkennbar nach Satz 2.40(4).
- $L(r^*) = L(r)^*$ ist FA-erkennbar nach Satz 2.40(5). □

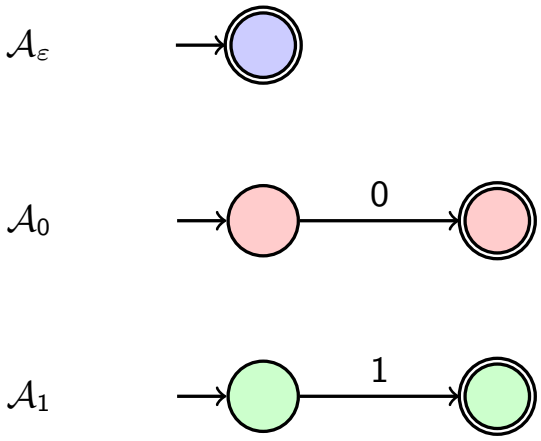
Beispiel 4.13 I

Wir konstruieren zum regulären Ausdruck

$$(0+1)^*1(0+\varepsilon)$$

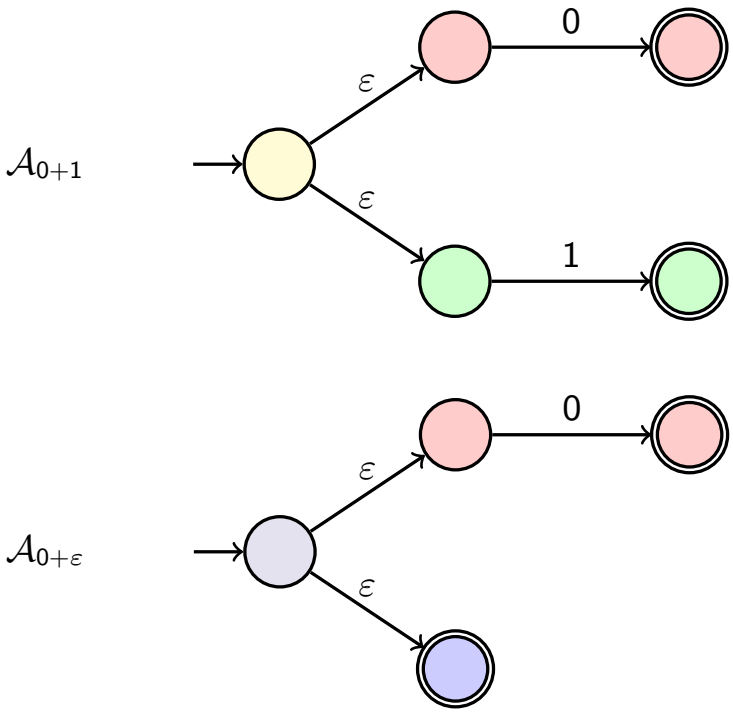
einen äquivalenten ε-NFA.

Zunächst erhalten wir für die Teilausdrücke $\varepsilon, 0, 1$:



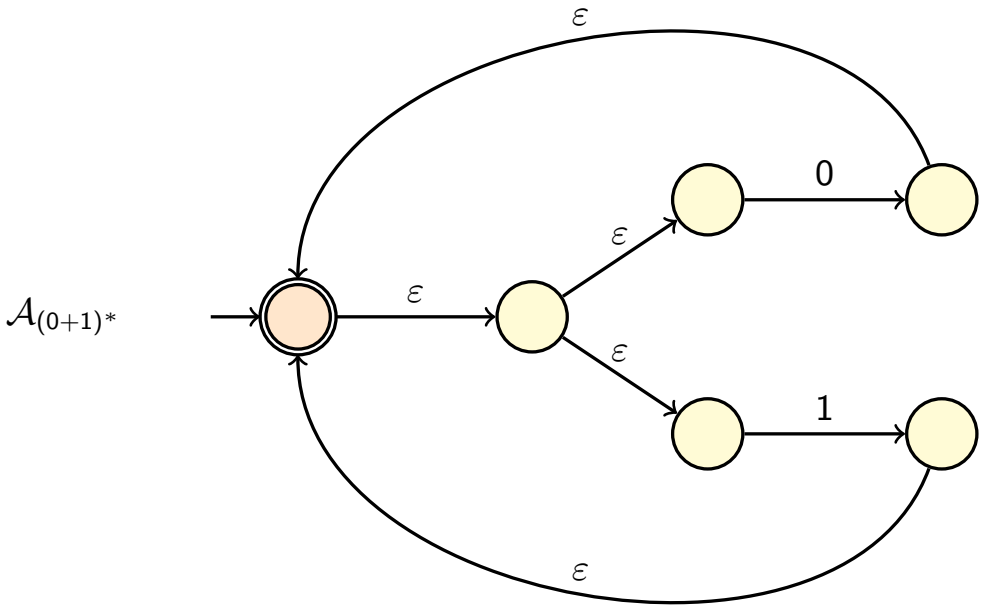
Beispiel 4.13 II

Daraus konstruieren wir für $(0+1)$ und $(0+\varepsilon)$:



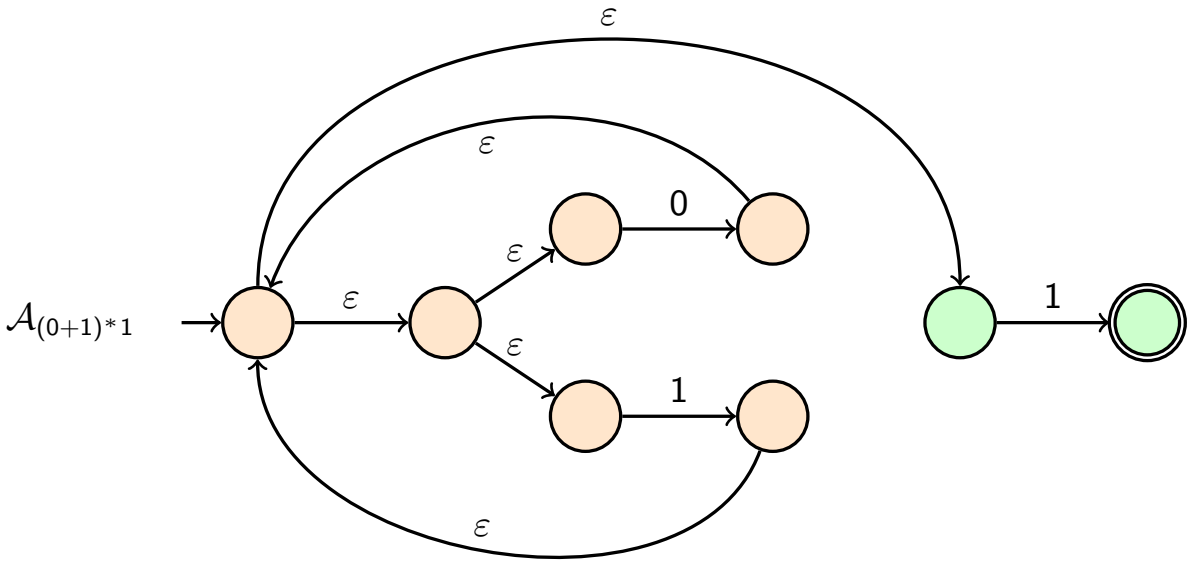
Beispiel 4.13 III

Aus $\mathcal{A}_{0+1}$ erhalten wir für $(0+1)^*$:

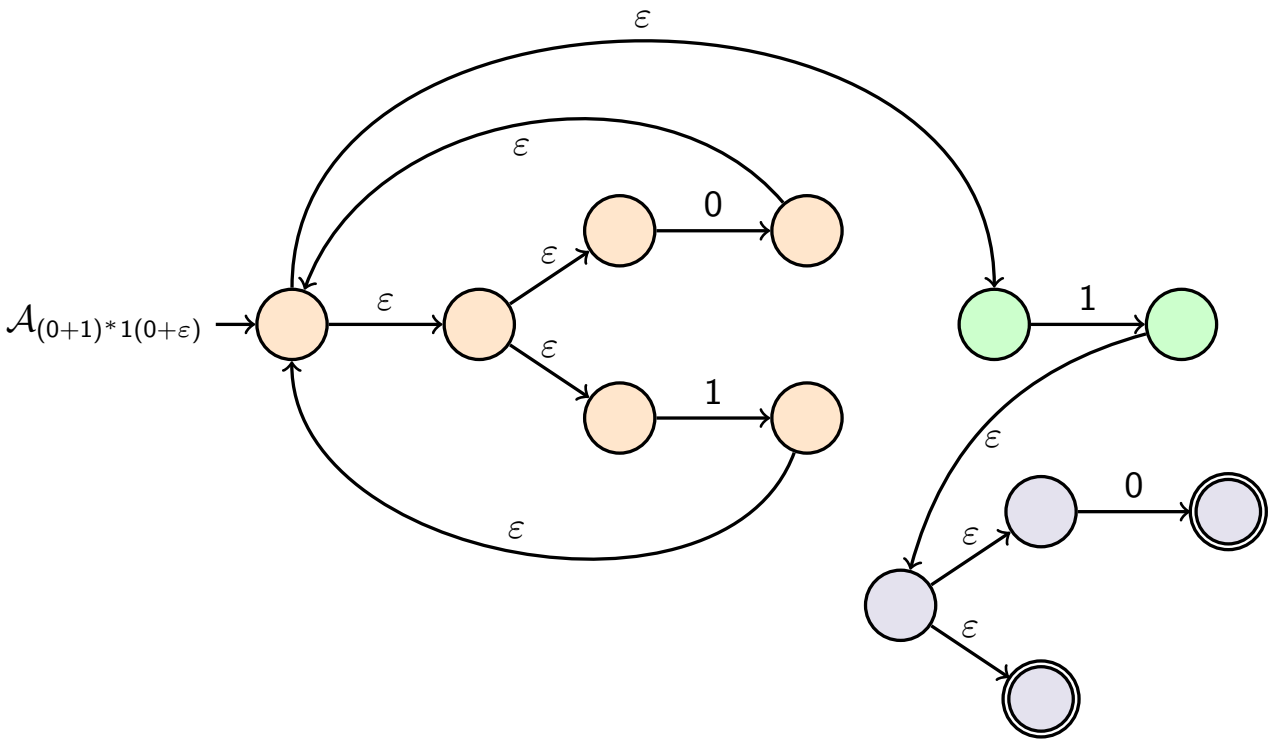


Beispiel 4.13 IV

Jetzt ergibt sich durch Verketten für $(0+1)^*1$ und $(0+1)^*1(0+\varepsilon)$:

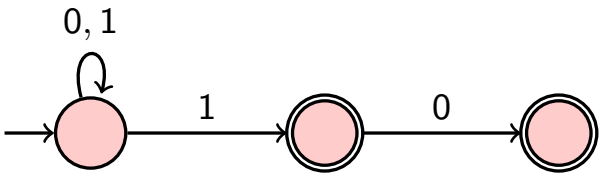


Beispiel 4.13 V



Ein einfacherer äquivalenter NFA ist

Beispiel 4.13 VI



Diskussion

Die allgemeine Konstruktion liefert also in der Regel keinen „optimalen“ ε-NFA für einen regulären Ausdruck.

Dafür funktioniert diese Konstruktion immer und lässt sich leicht automatisieren.

Man kann dann immer noch versuchen, den resultierenden ε-NFA zu „optimieren“, etwa durch Elimination der ε-Transitionen.

Satz 4.14

Jede FA-erkennbare Sprache ist regulär.

Beweisansatz

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ ein NFA.
Wir halten $\mathcal{A}$ bis zum Ende des Beweises fest.

Ziel

Berechne für alle $q \in F$ einen regulären Ausdruck $r_{q_0 q}$, so dass

$$L(r_{q_0 q}) = \{w \mid q_0 \xrightarrow{w} q\}.$$

Dann ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q \in F} L(r_{q_0 q}) = L\Big(\sum_{q \in F} r_{q_0 q}\Big).$$

Um $r_{q_0 q}$ induktiv berechnen zu können, berechnen wir für alle $p, q \in Q$ einen regulären Ausdruck r_{pq}, so dass

$$L(r_{pq}) = \{w \mid p \xrightarrow{w} q\}.$$

Frage

Wie sollen wir $r_{q_0 q}$ induktiv berechnen?

Idee

Wir führen Induktion über die Anzahl der Zustände, die in einem Lauf von p nach q verwendet werden.

Technische Umsetzung

Für $p, q \in Q$ und $X \subseteq Q$ schreiben wir $p \xrightarrow[X]{w} q$ wenn es einen Lauf von p nach q über w gibt, der neben p, q nur Zustände aus X verwendet.

Genauer: Für $w = a_1 \dots a_n$,

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff \exists x_0 = p, x_1, \dots, x_n = q, \text{ so dass } x_1, \dots, x_{n-1} \in X \text{ und } (x_{i-1}, a_i, x_i) \in \Delta \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Lemma 4.15

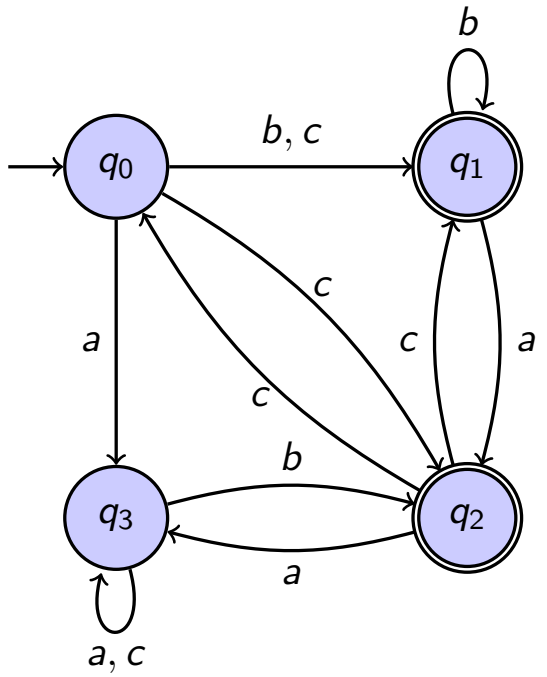
Seien $p, q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

1. $p \xrightarrow[\emptyset]{w} q \iff w = \sigma$ *für ein* $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, *so dass* $p \xrightarrow{\sigma} q$.
2. *Für alle $X \neq \emptyset$ und $x \in X$ gilt*

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{w} q \text{ oder es gibt ein } k \geq 0 \text{ und eine Zerlegung } w = t u_1 \dots u_k v \text{ von } w, \text{ so dass } p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{t} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_1} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_2} x \cdots x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_k} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{v} q.$$

Beispiel 4.16

Sei $\mathcal{A}$ der folgende NFA:



Es gilt:

$$q_0 \xrightarrow[\emptyset]{b} q_1, \quad q_0 \xrightarrow[\emptyset]{c} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_1\}]{bb} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_1\}]{cbb} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_2\}]{cc} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_1,q_2\}]{ccbbbb} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_2,q_3\}]{aacaccbc} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_1,q_2,q_3\}]{aacaccbcbbb} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow[\{q_0,q_1,q_2,q_3\}]{abcbbbb} q_1.$$

Beweis von Lemma 4.15 I

Lemma 4.15

Seien $p, q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

1. $p \xrightarrow[\emptyset]{w} q \iff w = \sigma$ *für ein* $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, *so dass* $p \xrightarrow{\sigma} q$.
2. *Für alle* $X \neq \emptyset$ *und* $x \in X$ *gilt*

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{w} q \text{ oder es gibt ein } k \geq 0 \text{ und eine Zerlegung } w = tu_1 \dots u_k v \text{ von } w, \text{ so dass } p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{t} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_1} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_2} x \cdots x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_k} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{v} q.$$

Beweis.1. ist offensichtlich.

2.

„$\Longleftarrow$“: Klar.

„$\Longrightarrow$“: Es gelte $p \xrightarrow[X]{w} q$.

Beweis von Lemma 4.15 II

Sei $w = a_1 \dots a_n$, und sei $(x_0 = p, x_1, \dots, x_n = q)$ ein Lauf von p nach q über w mit $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$.

Falls $x \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, so gilt $p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{w} q$.

Sonst seien $k \geq 0$ und $1 \leq i_0 < i_2 \dots < i_k \leq n-1$ die Indizes i mit $x_i = x$. Seien

$$\begin{aligned} t &:= a_1 \dots a_{i_0}, \\ u_j &:= a_{i_{j-1}+1} \dots a_{i_j} && \text{für } 1 \leq j \leq k, \\ v &:= a_{i_k+1} \dots a_n \end{aligned}$$

Dann gilt $w = tu_1 \dots u_k v$ und

$$p \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{t} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_1} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_2} x \cdots x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{u_k} x \xrightarrow[X\setminus\{x\}]{v} q.$$

□

Hauptlemma

Lemma 4.17

Für alle $X \subseteq Q$ und $p, q \in Q$ gibt es einen regulären Ausdruck $r_X(p, q)$, so dass

$$L\big(r_X(p,q)\big) = \{w \in \Sigma^* \mid p \xrightarrow[X]{w} q\}.$$

Beweis von Lemma 4.17 I

Wir beweisen das Lemma per Induktion über $m := |X|$.

Induktionsanfang: $m = 0$.

Dann ist $X = \emptyset$, und es gilt

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff w = \sigma \text{ für ein } \sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ mit } p \xrightarrow{\sigma} q.$$

Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ alle $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ mit $p \xrightarrow{\sigma} q$. Wir setzen

$$r_\emptyset(p, q) := (\sigma_1 + \ldots + \sigma_k).$$

Induktionsschritt: $m \to m + 1$. Sei $x \in X$ und $X' := X \setminus \{x\}$.

Nach Induktionsannahme finden wir Ausdrücke $r_{X'}(p, q)$, $r_{X'}(p, x)$, $r_{X'}(x, x)$, $r_{X'}(x, q)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir setzen

$$r_X(p, q) := r_{X'}(p, q) + r_{X'}(p, x) r_{X'}(x, x)^* r_{X'}(x, q).$$

Beweis von Lemma 4.17 II

Behauptung

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff w \in L\big(r_X(p, q)\big)$$

Beweis. Sei $w \in \Sigma^*$. Nach Lemma 4.15 gilt

$$p \xrightarrow[X]{w} q \iff p \xrightarrow[X']{w} q \text{ oder es gibt ein } k \geq 0 \text{ und eine Zerlegung } w = t u_1 \ldots u_k v \text{ von } w, \text{ so dass } p \xrightarrow[X']{t} x \xrightarrow[X']{u_1} x \xrightarrow[X']{u_2} x \cdots x \xrightarrow[X']{u_k} x \xrightarrow[X']{v} q.$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$p \xrightarrow[X']{w} q \iff w \in L(r_{X'}(p, q))$$

Beweis von Lemma 4.17 III

und

$$p \xrightarrow[X']{t} x \iff t \in L(r_{X'}(p,x)),$$
$$x \xrightarrow[X']{u_i} x \iff u_i \in L(r_{X'}(x,x)),$$
$$x \xrightarrow[X']{v} q \iff v \in L(r_{X'}(x,q)).$$

Daraus folgt, dass $w = tu_1 \dots u_k v$ für ein $k \geq 0$ und $t, u_1, \dots, u_k, v \in \Sigma^*$ mit

$$p \xrightarrow[X']{t} x \xrightarrow[X']{u_1} x \xrightarrow[X']{u_2} x \cdots x \xrightarrow[X']{u_k} x \xrightarrow[X']{v} q$$

genau dann wenn

$$w \in L\big(r_{X'}(p,x) r_{X'}(x,x)^* r_{X'}(x,q)\big).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung und damit das Lemma. □

Beweis von Satz 4.14 I

Satz 4.14

Jede FA-erkennbare Sprache ist regulär.

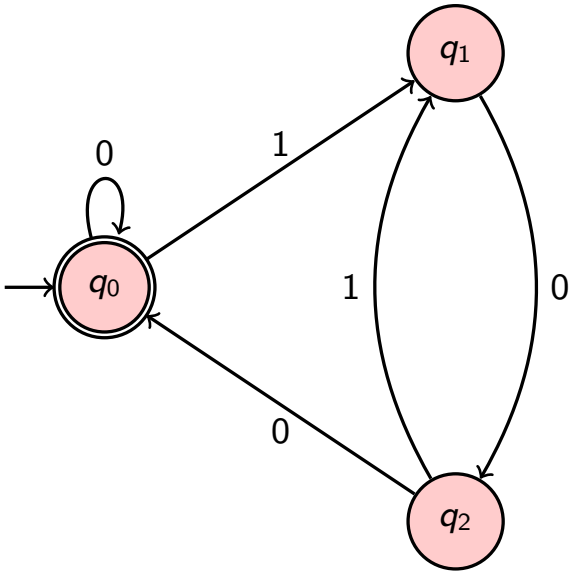
Beweis. Wir betrachten wieder unseren NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$.
Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}) &\iff \exists q \in F : \ q_0 \xrightarrow[Q]{w} q \\ &\iff \exists q \in F : \ w \in L\big(r_Q(q_0,q)\big) \qquad \text{(Lemma 4.17)} \\ &\iff w \in L\Big(\sum_{q \in F} r_Q(q_0,q)\Big). \end{aligned}$$

Also ist $r := \sum_{q \in F} r_Q(q_0,q)$ ein regulärer Ausdruck mit $L(r) = L(\mathcal{A})$. □

Beispiel 4.18 I

Sei $\mathcal{A}$ folgender NFA:



Beispiel 4.18 II

Wir konstruieren einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L(\mathcal{A})$.

Zu berechnen: $r_Q(q_0, q_0)$

Wir berechnen: $r_Q(q_0, q_0)$.

Mit $x = q_1$ erhalten wir
$r_Q(q_0, q_0) = r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1) r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1)^* r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_0)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_0)$.

Mit $x = q_2$ erhalten wir
$r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_0) = r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$.

Beispiel 4.18 III

Wir berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1)$.

Mit $x = q_2$ erhalten wir
$r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1) = r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1)$.

Mit $x = q_2$ erhalten wir
$r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1) = r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) + r_{\{q_0\}}(q_1, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0)$.

Beispiel 4.18 IV

Mit $x = q_2$ erhalten wir
$r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_0) = r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_1, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_0)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) &= r_\emptyset(q_0, q_0) + r_\emptyset(q_0, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_0) \\ &= (0 + \varepsilon) + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \\ &\equiv 0^* \end{aligned}$$

Hier und im folgenden bedeutet $r \equiv r'$, dass die beiden Ausdrücke r und r' äquivalent sind, das heißt, $L(r) = L(r')$.

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Beispiel 4.18 V

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_2)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) &= r_\emptyset(q_0, q_2) + r_\emptyset(q_0, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_2) \\ &\equiv \emptyset \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_2, q_2) &= r_\emptyset(q_2, q_2) + r_\emptyset(q_2, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_2) \\ &\equiv \varepsilon \end{aligned}$$

Beispiel 4.18 VI

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$, $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_0)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_2, q_0) &= r_\emptyset(q_2, q_0) + r_\emptyset(q_2, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_0) \\ &= 0 + 0(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \\ &\equiv 00^* \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_0, q_1)$.

Beispiel 4.18 VII

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) &= r_\emptyset(q_0, q_1) + r_\emptyset(q_0, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_1) \\ &= 1 + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^* 1 \\ &\equiv 0^* 1 \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_2, q_1)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_2, q_1) &= r_\emptyset(q_2, q_1) + r_\emptyset(q_2, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_1) \\ &= 1 + 0(0 + \varepsilon)^* 1 \\ &\equiv 0^* 1 \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Beispiel 4.18 VIII

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_1)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) &= r_\emptyset(q_1, q_1) + r_\emptyset(q_1, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_1) \\ &\equiv \varepsilon \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$, $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_2)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_2) &= r_\emptyset(q_1, q_2) + r_\emptyset(q_1, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_2) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

Noch zu berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$

Beispiel 4.18 IX

Wir berechnen: $r_{\{q_0\}}(q_1, q_0)$.

Mit $x = q_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) &= r_\emptyset(q_1, q_0) + r_\emptyset(q_1, q_0) r_\emptyset(q_0, q_0)^* r_\emptyset(q_0, q_0) \\ &\equiv \emptyset \end{aligned}$$

Wir haben damit folgende Werte für $r_{\{q_0\}}(q_i, q_j)$:

$$\begin{aligned} &r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) \equiv 0^*, \\ &r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) \equiv 0^*1, \\ &r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) \equiv \emptyset, \\ &r_{\{q_0\}}(q_1, q_0) \equiv \emptyset, \\ &r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) \equiv \varepsilon, \\ &r_{\{q_0\}}(q_1, q_2) \equiv 0, \\ &r_{\{q_0\}}(q_2, q_0) \equiv 00^*, \\ &r_{\{q_0\}}(q_2, q_1) \equiv 0^*1, \\ &r_{\{q_0\}}(q_2, q_2) \equiv \varepsilon. \end{aligned}$$

Beispiel 4.18 X

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_0) &= r_{\{q_0\}}(q_0, q_0) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_0) \\ &\equiv 0^* + \emptyset\varepsilon^* 00^* \\ &\equiv 0^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\{q_0,q_2\}}(q_0, q_1) &= r_{\{q_0\}}(q_0, q_1) + r_{\{q_0\}}(q_0, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_1) \\ &\equiv 0^*1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\{q_0,q_2\}}(q_1, q_1) &= r_{\{q_0\}}(q_1, q_1) + r_{\{q_0\}}(q_1, q_2) r_{\{q_0\}}(q_2, q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2, q_1) \\ &\equiv \varepsilon + 0\varepsilon * 0^*1 \\ &\equiv \varepsilon + 00^*1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\{q_0,q_2\}}(q_1,q_0) &= r_{\{q_0\}}(q_1,q_0) + r_{\{q_0\}}(q_1,q_2) r_{\{q_0\}}(q_2,q_2)^* r_{\{q_0\}}(q_2,q_0) \\ &\equiv \emptyset + 0\varepsilon^* 00^* \\ &\equiv 000^* \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} r_Q(q_0,q_0) &= r_{\{q_0,q_2\}}(q_0,q_0) + r_{\{q_0,q_2\}}(q_0,q_1) r_{\{q_0,q_2\}}(q_1,q_1)^* r_{\{q_0,q_2\}}(q_1,q_0) \\ &\equiv 0^* + 0^* 1(\varepsilon + 00^* 1)^* 000^* \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen zum äquivalenten Ausdruck $\varepsilon + (0+10)^* 0$.

Zusammenfassung

Insgesamt haben wir also folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.19 (Äquivalenzsatz von Kleene)

Eine Sprache ist genau dann regulär, wenn sie FA-erkennbar ist.

Von nun an sprechen wir nicht mehr von FA-erkennbaren Sprachen, sondern nur noch von regulären Sprachen.

Aus Satz 2.40 folgt, dass die Klasse der regulären Sprachen unter den Mengenoperationen, Verkettung und Iteration abgeschlossen ist.

Das hat zur Folge, dass wir die regulären Ausdrücke um zusätzliche Operatoren für Komplement und Durchschnitt erweitern könnten, ohne dadurch zusätzliche Sprachen beschreiben zu können.

Anders ausgedrückt: Komplement und Durchschnitt lassen sich mit den vorhandenen Operatoren für Vereinigung, Verkettung und Iteration simulieren.

(Das ist nicht offensichtlich!)

Anwendung: Textsuche mit regulären Ausdrücken

Wir können mit regulären Ausdrücken "Muster" spezifizieren, die wir in einem Text finden möchten.

Beispiel: Der reguläre Ausdruck

$$(\mathtt{F} + \mathtt{f})\mathtt{o}(\mathtt{SAP} + \mathtt{sap})$$

über dem Alphabet Σ_{ASCII} spezifiziert das Wort „FoSAP“ mit verschiedenen Groß-/Kleinschreibungsvarianten.

In Unix gibt es Befehle wir `grep` und `egrep`, die die Textsuche mit regulären Ausdrücken direkt umsetzen. Weiterhin bieten viele Programmiersprachen (z.B. `Perl`) und Editoren (z.B. `emacs`) die Möglichkeit zur Textsuche mit regulären Ausdrucken.

Compiler verwenden die Suche mit regulären Ausdrücken in der lexikalischen Analyse, um den Programmtext in sogenannte „Token“ zu zerlegen.

Algorithmische Umsetzung

Eingabe: Text $T \subseteq \Sigma^*$ und regulärer Ausdruck $r \in \mathrm{RA}_\Sigma$.

Aufgabe: Entscheide, ob T ein Wort aus $L(r)$ als Infix enthält.

Algorithmus:

1. Sei $r' := \left(\sum_{a\in\Sigma} a\right)^* r \left(\sum_{a\in\Sigma} a\right)^*$.

   Dann gilt $T \in L(r') \iff T$ enthält ein $w \in L(r)$ als Infix.
2. Berechne zu r' äquivalenten ε-NFA $\mathcal{A}$
3. Berechne zu $\mathcal{A}$ äquivalenten NFA $\mathcal{A}'$.

Variante 1

4. Entscheide, ob $T \in L(\mathcal{A}')$.

Laufzeit $O(kn)$,
wobei k =Länge von r
und n =Länge von T.

Variante 2

4. Berechne zu $\mathcal{A}'$ äquivalenten DFA $\mathcal{A}''$.
5. Entscheide, ob $T \in L(\mathcal{A}'')$.

Laufzeit $2^{O(k)} + O(n)$

Normalerweise ist n viel größer als k. Je nachdem wieviel ist die erste oder zweite Variante besser.

Reguläre Ausdrücke in UNIX

Die wichtigsten Elemente der Unix-Syntax für reguläre Ausdrücke sind:

- $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ statt $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- Punkt "." steht für ein beliebiges Zeichen
- Buchstabenmenge nach ASCII-Reihenfolge durch Angabe des ersten und letzten Buchstaben (z.B. `[a-z]`, `[a-z0-9]`)
- | statt $+$
- r? statt $\varepsilon + r$
- r+ statt $r^* r$
- $r\{4\}$ statt $rrrr$

Im Detail verwenden allerdings verschiedene Unixbefehle und Programme verschiedene Varianten der Syntax.

Beispiel 4.20

Internationale Version der Aachener Telefonnummern

(+49) 0241-9876543

+49-241-9876543

0049-241-9876543

Regulärer Ausdruck in UNIX ERE (Extended Regular Expression) Syntax

```
(\(\+49\) 0|\+49-|0049-)241-[1-9][0-9]*
```


Abschnitt 4.2
Das Pumping-Lemma

Alle?

Nein, denn es gibt mehr Sprachen als reguläre Ausdrücke.

Intuition

L ist regulär, wenn der Test auf Mitgliedschaft eines Wortes w in L durch buchstabenweises Durchlesen unter Zuhilfenahme eines beschränkten Speichers möglich ist.

Beispiel 4.21

$L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } b \iff w \text{ beginnt mit } a\}$

Intuition: Regulär, denn man muss sich nur den ersten Buchstaben des Wortes merken und am Ende mit dem letzten vergleichen.
(Endlicher Speicher genügt.)

Beispiel 4.22

$L_2 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \geq 3748\}$.

Intuition: Regulär, denn man muss sich die Zahl der 1en merken, bis man 3748 gesehen hat. Dazu reichen 3749 Zustände.

Beispiel 4.23

$L_3 := \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \text{ ist durch 9 teilbar}\}$

Intuition: Regulär, denn man muss sich bloss die Anzahl der bisher gesehenen 0en modulo 9 merken. Dazu reichen 9 Zustände.

Beispiel 4.24

$L_4 := \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$

Intuition: Nicht regulär, denn man muss sich die Differenz zwischen bislang gesehenen 1en und 0en merken. Dazu reicht ein endlicher Speicher nicht aus.

Beispiel 4.25

$L_5 := \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Intuition: Nicht regulär, denn man muss sich zumindest bis zur Mitte das ganze bisher gelesene Wort merken. Dazu reicht ein endlicher Speicher nicht aus.

Beispiel 4.26

Die Sprache $L_K \subseteq \{(,)\}$ der korrekten Klammerausdrücke (vgl. Beispiel 3.8).

Intuition: Nicht regulär, denn man muss sich zu jedem Zeitpunkt die Anzahl der bisher geöffneten, aber noch nicht geschlossenen Klammern merken. Dazu reicht ein endlicher Speicher nicht aus.

Beispiel 4.27

Die Sprache $\texttt{LIST(BIN)} \subseteq \Sigma^*_{\text{ASCII}}$ (vgl. Beispiel 3.7).

Intuition: Nicht regulär, denn man muss sich merken, wieviele Klammern schon aufgegangen sind, um sie wieder schließen zu können.

Beispiel 4.28

Die Sprache $\texttt{ART} \subseteq \Sigma^*_{\text{ASCII}}$ (vgl. Beispiel 3.20).

Intuition: Nicht regulär, denn auch hier muss man sich merken, wieviele Klammern schon aufgegangen sind, um sie wieder schließen zu können.

Beweis der Nicht-Regularität

Intuition ist schön und gut, aber wie lässt sich die Nicht-Regularität beweisen?

Beispiel 4.24 (Forts.) I

Behauptung

Die Sprache

$$L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$$

ist nicht regulär.

Beweis.Annahme: L_4 is regulär.

(Wir werden aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten.)

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(\mathcal{A}) = L_4$.
Sei $n := |Q|$ die Anzahl der Zustände von $\mathcal{A}$.
Wir betrachten das Wort

$$w = 0^n 1^n \in L_4 = L(\mathcal{A}).$$

Beispiel 4.24 (Forts.) II

Sei

$$(r_0, a, r_1, a, \ldots, a, r_n, b, r_{n+1}, b, \ldots, b, r_{2n})$$

der akzeptierende Lauf von $\mathcal{A}$ auf w.

Unter den $(n+1)$ Zuständen $r_0, \ldots, r_n$ muss mindestens einer doppelt auftreten. Etwa

$$r_i = r_j, \qquad \text{wobei } 1 \leq i < j \leq n$$

Dann ist auch

$$(r_0, a, r_1, a, \ldots, a, r_i, a, r_{j+1}, a, \ldots, a, r_n, b, r_{n+1}, b, \ldots, b, r_{2n})$$

ein akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$.

Das akzeptierte Wort enthält allerdings weniger as als bs, ist also nicht in L_4. Widerspruch! □

Pumping Lemma

Ist L regulär, so lässt sich jedes hinreichend lange Wort aus L so dreiteilen, dass man den mittleren Teil streichen oder wiederholen kann, ohne L zu verlassen.

Beweisidee

Hat ein Wort w mindestens so viele Buchstaben wie Zustände in einem NFA $\mathcal{A}$ für L, wird in einem Lauf über w ein Zustand p wiederholt. Daraus ergibt sich die gewünschte Dreiteilung von $w \in L$ in Segmente x, y, z:

$$\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{x} p \xrightarrow{y} p \xrightarrow{z} q \in F$$

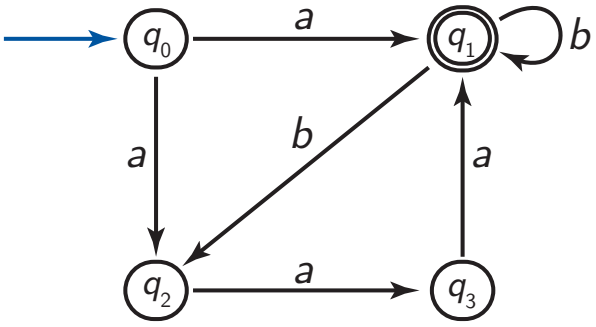
Zum Beispiel gilt dann auch

$$\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{x} p \xrightarrow{y} p \xrightarrow{y} p \xrightarrow{z} q$$
$$\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{x} p \xrightarrow{z} q$$

Damit sind auch $xyyz$ und xz in L.

Beispiel 4.29

Sei $L = L(\mathcal{A})$ für folgenden NFA $\mathcal{A}$.



Wir betrachten das Wort $w = aaabaabb$ der Länge $|w| = 8 \geq 4 = |Q|$.

Es gilt $w \in L$; ein akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf w ist

$$(q_0, a, q_2, a, q_3, a, q_1, b, q_2, a, q_3, a, q_1, b, q_1, b, q_1)$$

Also

$$\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{aab} q_2 \xrightarrow{aabb} q_1$$

Dreiteilung der Eingabe: $a\ aab\ aabb$.

Ebenfalls akzeptierte Wörter: $a\ aabb$ und $a\ aab\ aab\ aabb$

Lemma 4.30

Sei L regulär. Dann gibt es eine Zahl $n \geq 1$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ zerlegbar ist in Wörter x, y, z mit

$$w = xyz,$$

die folgende Eigenschaften haben

1. $y \neq \varepsilon$,
2. $|xy| \leq n$,
3. $xy^k z \in L$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis I

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NFA mit $L(\mathcal{A}) = L$.
Wir setzen

$$n := |Q|.$$

Betrachte nun ein Wort $w = a_1 \dots a_m \in L$ der Länge $|w| = m \geq n$.
Sei

$$(r_0, a_1, r_1, \dots, a_m, r_m)$$

ein akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf w. Es gilt $r_0 = q_0$ und $r_m \in F$

Es gibt i, j mit $0 \leq i < j \leq n \leq m$, so dass $r_i = r_j =: r$.

Sei $x := a_1 \dots a_i$ und $y := a_{i+1} \dots a_j$ und $z := a_{j+1} \dots a_m$.
Es gilt

(i) $y \neq \varepsilon$, weil $|y| = j - i > 0$.

(ii) $|xy| = j \leq n$.

Außerdem

$$\mathcal{A} : p_0 \xrightarrow{x} r \xrightarrow{y} r \xrightarrow{z} r_m \in F.$$

Aus $r \xrightarrow{y} r$ folgt $r \xrightarrow{y^k} r$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Also gilt auch

$$\mathcal{A} : p_0 \xrightarrow{x} r \xrightarrow{y^k} r \xrightarrow{z} r_m \in F$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit

(iii) $xy^kz \in L(\mathcal{A}) = L$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

□

Beispiel 4.24 (Forts.)

Wir haben bereits gezeigt, dass die Sprache
$L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$ nicht regulär ist.

Hier ein anderer Beweis mit dem Pumping Lemma:

Angenommen, L_4 ist regulär.

Wähle n zu L_4 gemäß Pumping Lemma und betrachte $w = 0^n1^n \in L_4$.

Pumping Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \text{ mit } |xy| \leq n \text{ und } y \neq \varepsilon \text{ und } xz = xy^0z \in L_4.$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = 0^j$ mit $j \geq 0$ und $y = 0^k$ mit $k > 0$.

Aber $xz = 0^{n-k}1^n \notin L_4$, weil $|xz|_0 = n - k < n = |xz|_1$.

Widerspruch!

□

Beispiel 4.25 (Forts.)

Behauptung

Die Sprache $L_5 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen, L_5 ist regulär.

Wähle n zu L_5 gemäß Pumping Lemma und betrachte $w = 0^n 1 0^n 1 \in L_5$.

Pumping Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \text{ mit } |xy| \leq n \text{ und } y \neq \varepsilon \text{ und } xz \in L_5.$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = 0^j$ mit $j \geq 0$ und $y = 0^k$ mit $k > 0$.

Aber $xz = 0^{n-k} 1 0^n 1 \notin L_5$, weil $n - k < n$.

Widerspruch! □

Beispiel 4.26 (Forts.)

Behauptung

Die Sprache $L_K \subseteq \{(,)\}$ der korrekten Klammerausdrücke ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen, L_K ist regulär.

Wähle n zu L_K gemäß Pumping Lemma und betrachte $w = (^n)^n \in L_K$.

Pumping Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \text{ mit } |xy| \leq n \text{ und } y \neq \varepsilon \text{ und } xz \in L_K.$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = (^j$ mit $j \geq 0$ und $y = (^k$ mit $k > 0$.

Aber $xz = (^{n-k})^n \notin L_K$, weil $n - k < n$.

Widerspruch! □

Beispiel 4.28 (Forts.) I

Behauptung

Die Sprache $\texttt{ART} \subseteq \Sigma^*_{\text{ASCII}}$ *ist nicht regulär.*

Beweis. Angenommen, ART ist regulär.

Wähle n zu ART gemäß Pumping Lemma und betrachte

$$w = (^n 0\big(+0)\big)^n = \underbrace{((\ldots(}_{n \text{ mal}} 0 \underbrace{+0)\,+0)\ldots+0)}_{n \text{ mal}} \in \texttt{ART}.$$

Beispiel: Für $n = 3$ wäre

$$w = (((0+0)+0)+0)$$

Beispiel 4.28 (Forts.) II

Pumping Lemma liefert Zerlegung

$$w = xyz \text{ mit } |xy| \leq n \text{ und } y \neq \varepsilon \text{ und } xz \in \texttt{ART}.$$

Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \varepsilon$ gilt $x = (^j$ mit $j \geq 0$ und $y = (^k$ mit $k > 0$.

Aber $xz = (^{n-k} 0\big(+0)\big)^n \notin \texttt{ART}$, weil $n - k < n$.

Widerspruch! □

Beispiele

- Menge der Wörter mit genau so vielen 0en wie 1en
- Menge der Wiederholungswörter ww.
- Menge der korrekten Klammerausdrücke.
- Listen (in der syntaktischen Form `LIST(BIN)`) und arithmetische Ausdrücke.

Merkregel

Endliche Automaten sind zu schwach für

- Worteigenschaften, deren Überprüfung eine Zählervariable mit Wertebereich $\mathbb{N}$ erfordert,
- Spezifikation der Wiederholung von Mustern beliebiger Länge,
- Mengen von Ausdrücken mit beliebiger Klammertiefe.

Abschnitt 4.3

Myhill-Nerode Äquivalenz

Unsere bisherigen Charakterisierung der regulären Sprachen beziehen sich auf verschiedene Formalismen (endliche Automaten, reguläre Ausdrücke) zur Berechnung bzw. Beschreibung der Sprachen.

Ziel

Wir wollen reguläre Sprachen direkt anhand ihrer mathematischen Eigenschaften charakterisieren.

Vorgehen

- Mit jeder Sprache über Σ assozieren wir eine Äquivalenzrelation auf Σ^*, also eine Einteilung von Σ^* in Äquivalenzklassen.
- Es wird sich herausstellen, dass die regulären Sprachen gerade die Sprachen mit nur endlich vielen Äquivalenzklassen sind.

Exkurs: Äquivalenzrelationen

Definition 4.31

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine zweistellige Relation $\sim$ auf X, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $x \sim x$ ($\sim$ ist reflexiv);

(ii) wenn $x \sim y$, dann $y \sim x$ ($\sim$ ist symmetrisch);

(iii) wenn $x \sim y$ und $y \sim z$, dann $x \sim z$ ($\sim$ ist transitiv).

Beispiele 4.32

1. Äquivalenzrelation $\sim_1$ auf $\mathbb{N}$: $x \sim_1 y \iff x \equiv y \mod 7$.
2. Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf Σ^*: $x \sim_2 y \iff |x| = |y|$.
3. Äquivalenzrelation $\sim_3$ auf der Menge der DFAs mit Alphabet Σ:

$$\mathcal{A} \sim_3 \mathcal{B} \iff L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}).$$

Definition 4.33

Eine Partition einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ von nichtleeren Teilmengen von X, so dass

(i) $P \cap Q = \emptyset$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q$;

(ii) $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = X$.

Die Mengen $P \in \mathcal{P}$ nennen wir die Teile oder Klassen der Partition $\mathcal{P}$.

Beispiele 4.34

1. Partition von $\mathbb{N}$ in gerade und ungerade Zahlen.
2. Partition von Σ^* in Wörter gleicher Länge.

Definition 4.35

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in X$ ist die Menge

$$x/_\sim := \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Satz 4.36

Sei X eine Menge.

1. *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist $\{x/_\sim \mid x \in X\}$ eine Partition von X.*
2. *Ist $\mathcal{P}$ eine Partition von X, so ist $\sim_\mathcal{P}$ mit*

$$x \sim_\mathcal{P} y \iff x, y \in P \text{ für ein } P \in \mathcal{P}$$

eine Äquivalenzrelation auf X, und es gilt $\mathcal{P} = \{x/_{\sim_\mathcal{P}} \mid x \in X\}$.

Exkurs (Forts.): Beispiele 4.37

1. Die Äquivalenzrelation $\sim_1$ auf $\mathbb{N}$ mit

$$x \sim_1 y \iff x \equiv y \mod 2$$

entspricht der Partition in die geraden und ungeraden Zahlen.

2. Die Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf Σ^* mit

$$v \sim_2 w \iff |v| \equiv |w|$$

entspricht der Partition von Σ^* in Wörter gleicher Länge.

Exkurs (Forts.): Index

Definition 4.38

Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen (eine positive natürliche Zahl oder „unendlich“).

Notation

- Wir bezeichnen den Index von $\sim$ durch $\text{index}(\sim)$.
- ∞ steht für „unendlich“.

Beispiele 4.39

1. Der Index der Äquivalenzrelation $\big(x \sim_1 y \iff x \equiv y \mod 2\big)$ auf $\mathbb{N}$ ist 2.
2. Der Index der Äquivalenzrelation $\big(v \sim_2 w \iff |v| \equiv |w|\big)$ auf Σ^* ist ∞.

Definition 4.40

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf Σ^* durch

$$v \sim_L w \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \in \Sigma^* : vx \in L \Leftrightarrow wx \in L,$$

für alle $v, w \in \Sigma^*$.

Lemma 4.41

$\sim_L$ ist eine Äquivalenzrelation auf Σ^*.

Notation

- $w/_L$ (statt $w/_{\sim_L}$) steht für die $\sim_L$-Äquivalenzklasse von w.
- $\Sigma^*/_L := \{w/_L \mid w \in \Sigma^*\}$ ist die Menge aller $\sim_L$-Äquivalenzklassen.
- $\text{index}(L) := \text{index}(\sim_L)$ ist der Index von $\sim_L$.

Reflexivität: Sei $v \in \Sigma^*$.
Trivialerweise gilt für alle $x \in \Sigma^*$: $vx \in L \iff vx \in L$.
Also $v \sim_L v$.

Symmetrie: Seien $v, w \in \Sigma^*$, so dass $v \sim_L w$.
Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$: $\big(vx \in L \iff wx \in L\big)$, und damit auch $\big(wx \in L \iff vx \in L\big)$.
Also $w \sim_L v$.

Transitivität: Seien $u, v, w \in \Sigma^*$, so dass $u \sim_L v$ und $v \sim_L w$.
Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$: $\big(ux \in L \iff vx \in L\big)$ und $\big(vx \in L \iff wx \in L\big)$.
Damit gilt auch $\big(ux \in L \iff wx \in L\big)$.
Also $u \sim_L w$. □

Beispiel 4.42 I

Sei

$$L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ hat Infix } ab\}$$

Wir beginnen mit einigen Beobachtungen zu $\sim_L$:

- $\varepsilon \not\sim_L a$ (mit $x = b$, denn $\varepsilon b \notin L$, aber $ab \in L$)
- $\varepsilon \sim_L b$
- $a \sim_L aa$, denn:
  $ax \in L$
  $\iff$ x hat Infix ab oder x beginnt mit b
  $\iff$ $aax \in L$
- $a \not\sim_L ab$
- $\varepsilon \not\sim_L ab$

Beispiel 4.42 II

Behauptung

Die $\sim_L$-Klassen sind:

$$\varepsilon/_L, \qquad a/_L, \qquad ab/_L$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\varepsilon \not\sim_L a$ und $\varepsilon \not\sim_L ab$ und $a \not\sim_L ab$. Also sind die drei Äquivalenzklassen $\varepsilon/_L$, $a/_L$ und $ab/_L$ verschieden.

Wir müssen noch zeigen, dass dies alle Äquivalenzklassen sind.
Sei dazu $v \in \{a,b\}^*$ beliebig. Wir zeigen, dass $v \sim_L \varepsilon$ oder $v \sim_L a$ oder $v \sim_L ab$.

1. Fall: v enthält ab als Infix.
Dann gilt $vx \in L$ für alle $x \in \Sigma^*$.
Weil auch $abx \in L$ für alle $x \in \Sigma^*$, folgt

$$v \sim_L ab.$$

2. Fall: v enthält ab nicht als Infix, und v endet mit a.
Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} vx \in L &\iff x \text{ beginnt mit } b \text{ oder enthält } ab \text{ als Infix} \\ &\iff ax \in L. \end{aligned}$$

Also

$$v \sim_L a.$$

3. Fall: v enthält ab nicht als Infix, und v endet nicht mit a.
Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} vx \in L &\iff x \text{ enthält } ab \text{ als Infix} \\ &\iff x \in L. \end{aligned}$$

Also

$$v \sim_L \varepsilon.$$

□

Aus der Behauptung folgt $\text{index}(L) = 3$.

Sei

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$$

Wir wissen aus Beispiel 4.24, dass L nicht regulär ist.

Wieder beginnen wir mit einigen Beobachtungen zu $\sim_L$:

- $\varepsilon \not\sim_L 1$, denn $\varepsilon \in L$ und $1 \notin L$.
- $0 \not\sim_L 000$, denn $01 \in L$ und $0001 \notin L$.

Behauptung

Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ gilt

$$0^i \not\sim_L 0^j.$$

Beweis. Wir wählen $x := 1^i$. Dann gilt $0^i x \in L$ und $0^j x \notin L$. □

Aus der Behauptung folgt sofort, dass $\text{index}(L) = \infty$.

Der Satz von Nerode

Satz 4.44

Eine Sprache L is genau dann regulär, wenn $\text{index}(L) < \infty$.

Beispiel 4.45 I

Als eine erste Anwendung des Satzes von Nerode zeigen wir, dass die Sprache $\texttt{LIST(BIN)} \subseteq \Sigma^*_{\text{ASCII}}$ aus den Beispielen 3.7 und 4.27 nicht regulär ist.

Wir zeigen:

$$\text{index}(\texttt{LIST(BIN)}) = \infty \qquad (\star)$$

Dann folgt aus dem Satz von Nerode, dass LIST(BIN) nicht regulär ist.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei

$$v_i := \big(\texttt{cons(0,}\big)^n.$$

Beispiel:

$$v_3 = \texttt{cons(0,cons(0,cons(0,}$$

Beispiel 4.45 II

Behauptung

Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ gilt

$$v_i \not\sim_{\texttt{LIST(BIN)}} v_j$$

Beweis. Wir wählen

$$x := \texttt{nil)}^i$$

Dann gilt

$$v_i x = \underbrace{\texttt{cons(0,cons(0,}\ldots\texttt{cons(0,}}_{i \text{ mal}}\texttt{nil}\underbrace{\texttt{))}\ldots\texttt{)}}_{i \text{ mal}} \quad \in \texttt{LIST(BIN)}$$

und

$$v_j x = \underbrace{\texttt{cons(0,cons(0,}\ldots\texttt{cons(0,}}_{j \text{ mal}}\texttt{nil}\underbrace{\texttt{))}\ldots\texttt{)}}_{i \text{ mal}} \quad \notin \texttt{LIST(BIN)}.$$

Beispiel 4.45 III

□

Aus der Behauptung folgt $\text{index}(\texttt{LIST(BIN)}) = \infty$.

DFA-Zustände und $\sim_L$-Klassen

Lemma 4.46

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $L = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

$$\text{index}(L) \leq |Q|.$$

Korollar 4.47

Für jede reguläre Sprache L gilt $\text{index}(L) < \infty$.

Beweis von Lemma 4.46 I

Lemma 4.46

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $L = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

$$\text{index}(L) \leq |Q|.$$

Beweis. Für alle $v \in \Sigma^*$ sei $q_v \in Q$ der eindeutige Zustand mit

$$\mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{v} q_v.$$

Behauptung 1

Seien $v, w \in \Sigma^*$ mit $q_v = q_w$. Dann gilt

$$v \sim_L w.$$

Beweis von Lemma 4.46 II

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$vx \in L \iff wx \in L. \qquad (\star)$$

Sei also $x \in \Sigma^*$.
Es gilt

$$\begin{aligned} vx \in L = L(\mathcal{A}) &\iff \exists q \in F : \ \mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{vx} q \\ &\iff \exists q \in F : \ \mathcal{A} : q_v \xrightarrow{x} q. \qquad (\star\star) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} wx \in L = L(\mathcal{A}) &\iff \exists q \in F : \ \mathcal{A} : q_0 \xrightarrow{wx} q \\ &\iff \exists q \in F : \ \mathcal{A} : q_w \xrightarrow{x} q. \qquad (\star\star\star) \end{aligned}$$

Weil $q_v = q_w$ sind die Bedingungen $(\star\star)$ und $(\star\star\star)$ identisch, also gilt $(\star)$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beweis von Lemma 4.46 III

Durch Negation folgt aus der Behauptung

$$v \not\sim_L w \implies q_v \neq q_w.$$

Es gibt also höchstens soviele Äquivalenzklassen wie Zustände. □

Umkehrung

Um den Beweis des Satzes von Nerode abzuschließen, müssen wir noch zeigen:

$$\text{index}(L) < \infty \quad \implies \quad L \text{ ist regulär.}$$

Idee

Wir verwenden die Äquivalenzklassen von $\sim_L$ als Zustände eines DFAs für L.

Lemma 4.48

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann gilt für alle $u, v, w \in \Sigma^*$:

$$u \sim_L v \quad \Longrightarrow \quad uw \sim_L vw.$$

Beweis.

Es gelte $u \sim_L v$. Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$(uw)x \in L \iff u(wx) \in L \iff v(wx) \in L \iff (vw)x \in L.$$

Also gilt $uw \sim_L vw$. □

Definition 4.49

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ mit $\text{index}(L) < \infty$. Der Myhill-Nerode DFA für L ist das Tupel

$$\mathcal{A}_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_{L0}, F_L)$$

mit

- $Q_L := \Sigma^*/_L = \{v/_L \mid v \in \Sigma^*\}$,
- $\delta_L : Q_L \times \Sigma \to Q_L$ definiert durch

$$\delta_L(v/_L, a) = va/_L,$$

- $q_{L0} := \varepsilon/_L$,
- $F_L := \{v/_L \mid v/_L \cap L \neq \emptyset\}$.

Lemma 4.50

$\mathcal{A}_L$ ist ein DFA.

Beweis von Lemma 4.50 I

$$\mathcal{A}_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_{L0}, F_L)$$

mit

- $Q_L := \Sigma^*/_L = \{v/_L \mid v \in \Sigma^*\}$,
- $\delta_L : Q_L \times \Sigma \to Q_L$ definiert durch

$$\delta_L(v/_L, a) = va/_L,$$

- $q_{L0} := \varepsilon/_L$,
- $F_L := \{v/_L \mid v/_L \cap L \neq \emptyset\}$.

Was müssen wir überhaupt beweisen?

- Q_L ist eine endliche Menge, weil $\text{index}(L) < \infty$.

Beweis von Lemma 4.50 II

- Σ ist ein Alphabet.
- Offensichtlich ist $q_{L0} \in Q_L$ und $F_L \subseteq Q_L$.
- Wir müssen einzig zeigen, das δ_L wohldefiniert ist.

  Das bedeutet, dass der Wert $\delta_L(v/_L, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten v, sondern nur von der Äquivalenzklasse $v/_L$ abhängt.

  Anders ausgedrückt: Ist $v/_L = v'/_L$, so gilt

$$\delta_L(v/_L, a) = va/_L = v'a/_L = \delta_L(v'/_L, a).$$

  Das folgt sofort aus dem Kongruenzlemma 4.46, nach dem $v \sim_L v' \implies va \sim_L v'a$ gilt. □

Lemma 4.51

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ *mit* $\text{index}(L) < \infty$. *Dann gilt*

$$L = L(\mathcal{A}_L).$$

Das Lemma zeigt, dass jede Sprache mit endlichem Index DFA-erkennbar, also regulär ist. Damit ist der Satz von Nerode bewiesen.

Beweis von Lemma 4.51 I

Behauptung 1

Für alle $w \in \Sigma^*$ *gilt:*

$$\mathcal{A}_L : q_{L0} \xrightarrow{w} w/_L.$$

Beweis. Induktion über den Aufbau von $w \in \Sigma^*$.

Induktionsanfang: $w = \varepsilon$

Es gilt $\mathcal{A}_L : q_{L0} \xrightarrow{\varepsilon} q_{L0} = \varepsilon/_L$.

Induktionsschritt: $w \to wa$ für $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

Sei $q \in Q_L$, so dass $\mathcal{A}_L : q_{L0} \xrightarrow{wa} q$.

Sei $q' \in Q_L$, so dass $\mathcal{A}_L : q_{L0} \xrightarrow{w} q' \xrightarrow{a} q$. Dann gilt $q = \delta_L(q', a)$.

Nach Induktionannahme gilt $q' = w/_L$ und damit

$$q = \delta_L(q', a) = \delta_L(w/_L, a) = wa/_L.$$

□

Beweis von Lemma 4.51 II

Behauptung 2

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

$$w \in L \iff w/_L \in F_L.$$

Beweis.„$\Longrightarrow$“: $w \in L \implies w/_L \cap L \neq \emptyset \implies w/_L \in F_L$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $w/_L \in F_L$. Dann gilt $w/_L \cap L \neq \emptyset$. Sei $w' \in w/_L \cap L$. Dann gilt $w \sim_L w'$ und damit

$$w' = w'\varepsilon \in L \implies w = w\varepsilon \in L.$$

□

Um das Lemma zu beweisen, müssen wir zeigen: Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

$$\mathcal{A}_L \text{ akzeptiert } w \iff w \in L.$$

Beweis von Lemma 4.51 III

Sei $w \in \Sigma^*$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_L \text{ akzeptiert } w &\iff \exists q \in F_L : \mathcal{A}_L : q_{L0} \xrightarrow{w} q \\
&\iff w/_L \in F_L && \text{(Behauptung 1)} \\
&\iff w \in L && \text{(Behauptung 2).}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.52 I

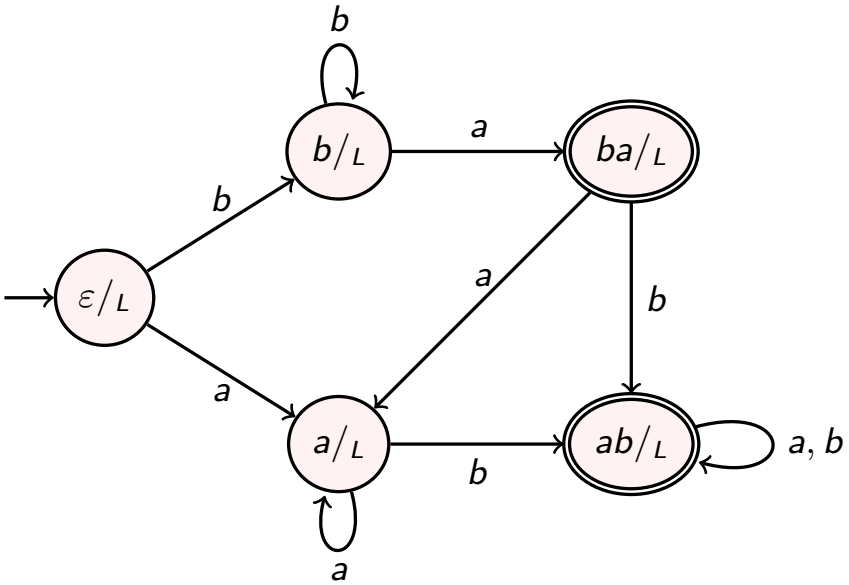
Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ ist die Sprache, die aus allen Wörtern mit Infix ab oder Suffix ba besteht.

Myhill-Nerode Äquivalenzklassen für L:

$ab/_L$	alle Wörter mit Infix ab
$ba/_L$	alle Wörter ohne Infix ab und mit Suffix ba
$a/_L$	alle Wörter ohne Infix ab und ohne Suffix ba, die auf a enden
$b/_L$	alle Wörter ohne Infix ab, die auf b enden
$\varepsilon/_L$	das leere Wort

Myhill-Nerode DFA $\mathcal{A}_L$

Beispiel 4.52 II



Bemerkung 4.53

Wir haben es offen gelassen, wie wir die Myhil-Nerode Äquivalenzklassen bestimmt haben, und es ist auch nicht ganz einfach, dies zu tun.

Im nächsten Kapitel werden wir ein Verfahren kennen lernen, den Myhill-Nerode DFA effizient zu berechnen.