

## Übungsblatt 1

Abgabetermin: 23.04.2014

- Die Lösungen der Hausaufgaben werden in den Tutorien abgegeben. Zur Not ist es **am Mittwoch 23.04 bis 18 Uhr** möglich, diese in den Kasten vor dem Flur des Lehrstuhls Informatik 7 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, erste Etage).
- Die **Hausaufgaben** müssen in Gruppen von je **3 Studierenden** aus der **gleichen Übungsgruppe** abgegeben werden. Suchen Sie sich beim ersten Termin Ihrer Übungsgruppe (am 15.04 bzw. 16.04) Abgabepartner.
- **Nummer der Übungsgruppe, Nummer des Übungsblattes und Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe in folgender Form aufzuschreiben.

Gruppe: 12

FoSAP-Übungsblatt 5

Erika Mustermann, 294255  
Otto Normalstudent, 315450

Blätter, die ohne Übungsgruppennummer in den Lehrstuhlkasten eingeworfen werden, werden nicht bewertet.

- **Heften bzw. tackern Sie die Blätter!**
- Die Lösungen der Aufgaben werden **am Donnerstag 24.04** in der Globalübung vorgerechnet.

### Tutoraufgabe 1 (Controller für eine automatische Tür)

Erweitern Sie den Automaten aus **Beispiel 1.2**, indem Sie zwei Zustände jeweils für *“wird gerade geöffnet”* und *“wird gerade geschlossen”* hinzufügen. (Sie müssen dabei sinnvolle neue Transitionen hinzufügen.)

## Tutoraufgabe 2 (Mengenoperationen)

Sind folgende Behauptungen richtig? Bestätigen Sie die Behauptung durch einen formalen Beweis oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

Für alle Mengen  $A, B, C, D$  gilt

- a) wenn  $A \subseteq B$  und  $C \subseteq D$ , dann  $A \cap C \subseteq B \cap D$
- b)  $A \subseteq B$  genau dann wenn  $A \cap \overline{B} = \emptyset$
- c)  $A \subseteq B$  genau dann wenn  $\overline{A} \cup B = \mathcal{U}$
- d) wenn  $A \cap C = B \cap C$ , dann  $A = B$
- e) wenn  $A \cup C = B \cup C$ , dann  $A = B$

Hinweis: Bei jeder Teilaufgabe nehmen wir die Existenz eines Universums  $\mathcal{U}$  an, d.h. alle Mengen, die vorkommen, sind Teilmengen von der Menge  $\mathcal{U}$  und für eine Menge  $A$  bezeichnet  $\overline{A}$  die Menge  $\mathcal{U} \setminus A$ .

## Tutoraufgabe 3 (Automatenkonstruktion)

Geben Sie durch Transitionsgraphen deterministische endliche Automaten (DFAs) an, die die folgenden Sprachen erkennen:

- a)  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{in } w \text{ kommt } aa \text{ oder } bb \text{ als Infix vor}\}$
- b)  $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{wenn das Infix } ab \text{ in } w \text{ vorkommt, dann auch das Infix } ac\}$
- c) Die Sprache  $L_3 := (123)^* = \{\varepsilon, 123, 123123, 123123123, \dots\}$  über dem Alphabet  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$ .
- d) Die Sprache  $L_4 := L_5 \cap L_6$  über dem Alphabet  $\Sigma_4 = \{a\}$  mit
$$L_5 := \{w \mid |w|_a \text{ durch zwei teilbar}\} \quad \text{und} \quad L_6 := \{w \mid |w|_a \text{ durch drei teilbar}\}.$$

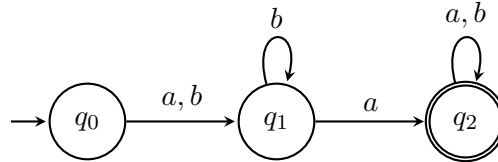
## Tutoraufgabe 4 (Teilbarkeit durch 3 im Oktalsystem)

Geben Sie einen DFA an, der gegeben eine Zahl im Oktalsystem, deren Teilbarkeit durch 3 überprüft. Der gesuchte DFA hat das Eingabealphabet  $\Sigma := \{0, 1, \dots, 7\}$ . Jedem Wort  $a_1, \dots, a_n$  ordnen wir die Zahl  $oct(w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 8^{n-i}$  zu. Der DFA muss dann genau die Wörter  $w$  akzeptieren, für die  $oct(w)$  durch 3 teilbar ist.

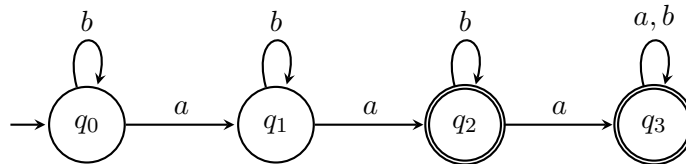
### Tutoraufgabe 5 (von DFAs erkannte Sprachen)

Geben Sie eine möglichst einfache aber präzise, natürlichsprachliche Beschreibung der durch die folgenden endlichen Automaten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  erkannten Sprachen mit  $\Sigma = \{a, b\}$  an.

a)  $\mathcal{A}_1$ :



b)  $\mathcal{A}_2$ :



\*\*\*\*\*

### Aufgabe 6 (Mengenoperationen)

2+2+1+2=7

Sind folgende Behauptungen richtig? Bestätigen Sie die Behauptung durch einen formalen Beweis oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

Für alle Mengen  $A, B, C, D$  gilt

a) wenn  $A \cap C = B \cap C$  und  $A \cup C = B \cup C$ , dann  $A = B$

b) wenn  $A \Delta C = B \Delta C$ , dann  $A = B$

c)  $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$

d) De Morgansche Gesetze:

1)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Hinweis: Der Operator  $\Delta$  für *symmetrische Differenz* zweier Mengen ist definiert durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**Aufgabe 7 (Automatenkonstruktion)****1+2+2+2=7**

Geben Sie jeweils durch Transitionsgraphen einen deterministischen endlichen Automaten an, der die gegebene Sprache erkennt. (Erinnern Sie sich daran, dass  $|w|_a$  die Anzahl der  $a$ s ist, die im Wort  $w$  vorkommen.)

- a) Die Sprache  $L_1 := \{w \in \Sigma_1^* \mid |w|_b = |w|_d = 0\}$  über dem Alphabet  $\Sigma_1 = \{a, b, c, d\}$ .
- b) Die Sprache  $L_2 := \{w \in \Sigma_2^* \mid |w|_a \leq 2\}$  über dem Alphabet  $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$ . Gibt es einen Automaten mit weniger als 4 Zuständen? (Ohne Beweis, nur mit “Ja” oder “Nein” beantworten.)
- c)  $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet mit } aab\}$
- d)  $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt und endet mit dem selben Symbol}\}$

**Aufgabe 8 (Teilbarkeit durch 4 im Ternärsystem)****4**

Geben Sie graphisch einen DFA  $\mathcal{A}$  über dem Alphabet  $\{0, 1, 2\}$  an, der eine Ternäre Zahl genau dann akzeptiert, wenn sie ein Vielfaches von 4 ist. Die erkannte Sprache ist also

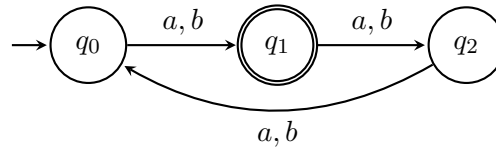
$$K = \{ w \in \{0, 1, 2\}^* \mid t(w) \text{ ist ein Vielfaches von } 4 \},$$

wobei  $t(w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 3^{n-i}$ . Erklären Sie in ein paar Sätzen, warum Ihr Automat die Sprache  $K$  erkennt. (Siehe **Beispiel 1.19.**)

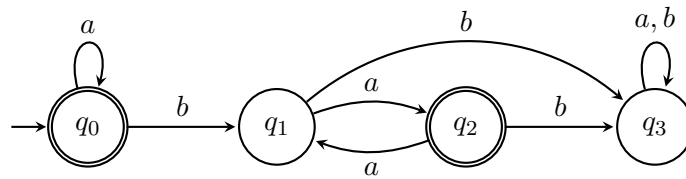
**Aufgabe 9 (von DFAs erkannte Sprachen)****1+2+2=5**

Beschreiben Sie jeweils die von dem gegebenen DFA erkannte Sprache. Seien Sie dabei so präzise wie möglich!

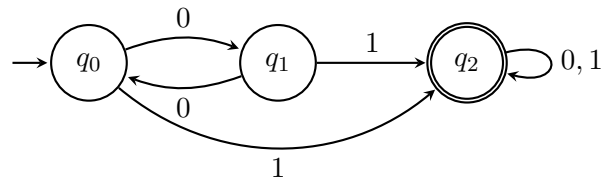
a)  $\mathcal{A}_1$  über  $\Sigma_1 = \{a, b\}$ :



b)  $\mathcal{A}_2$  über  $\Sigma_2 = \{a, b\}$ :



c)  $\mathcal{A}_3$  über  $\Sigma_3 = \{0, 1\}$ :



Gibt es einen kleineren DFA, der die gleiche Sprache akzeptiert wie  $\mathcal{A}_3$ ? (Nur mit “Ja” oder “Nein” beantworten.)